PT* 2025-26
DS 2 du 3 novembre 2025
durée 4h

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**
- Ce devoir est composé de quatre exercices totalement indépendants.

EXERCICE 1

On rappelle que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ *entiers, on note* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

On souhaite étudier la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$.

Pour cela, on pose pour tout $n \geqslant 0, a_n = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ et $b_n = a_n.\sqrt{n}$

1. Simplifier, pour tout n entier, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que la suite (a_n) est un suite décroissante.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+1}{2.\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$

   (b) En déduire que $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$
3. En déduire que la suite $(\ln b_n)$ est convergente puis justifier qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$
4. La série $\sum(-1)^n a_n$ est-elle absolument convergente? Justifier.
5. Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$.

.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-t} \\ y(t) = 2 - e^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On note $A(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Établir les tableaux de variations des fonctions x et y. On précisera les limites aux bornes.
2. Déterminer la tangente à Γ au point $A(0)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses, et préciser un vecteur directeur ainsi qu'une équation cartésienne de la tangente à Γ en ce point.
4. Étudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.
5. Justifier qu'au voisinage de $+\infty$, Γ admet une asymptote oblique D d'équation : $y = -x + 2$. Préciser la position relative de Γ et D.
6. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe Γ, les tangentes et asymptotes déterminées dans les questions précédentes. <u>Unité : 3 cm.</u>
7. On note $B(t)$ le point de D ayant la même abscisse que $A(t)$, où $A(t)$ est le point de Γ de paramètre t.

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la longueur $d(t) = A(t)B(t)$.

   (b) Les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} d(n)$ et $\sum\limits_{n>0} d(\ln(n))$ sont-elles convergentes? Si oui, préciser leur somme.

.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les 2 questions de cet exercice sont indépendantes

1. **Etude d'une famille de coniques**

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On considère la courbe Γ_λ d'équation $\lambda.x^2 + y^2 + 2\lambda.x - \lambda^2 + \lambda + 4 = 0$.

   (a) Déterminer avec précision la nature de Γ_λ lorsque $\lambda = 0$, puis lorsque $\lambda = 2$ et enfin lorsque $\lambda = -2$.

   (b) Déterminer la nature de Γ_λ dans les autres cas.

   (c) Montrer que par tout point du plan passent 2 et exactement 2 courbes de la famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$

2. **Etude de deux tangentes**
   Soit Γ la courbe d'équation cartésienne $(x-y)^2 + y^2 = 1$

   (a) Montrer que Γ est une courbe régulière.

   (b) Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de Γ.
   Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point M_0, et vérifier qu'elle peut s'écrire $(x_0 - y_0).x + (2y_0 - x_0).y - 1 = 0$

   (c) Ecrire l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point $A(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.
   Vérifier que cette tangente passe par le point $I(-\sqrt{2},0)$

   (d) Déterminer une autre tangente à Γ qui passe par le point I

   (e) Déterminer l'angle formé par ces 2 tangentes.

EXERCICE 4

Dans cet exercice on considère la courbe Γ d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) &= \cos t + t.\sin t \\ y(t) &= \sin t - t.\cos t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
On note $M(t)$ le point générique de paramètre t de cette courbe

Les trois questions de cet exercices sont indépendantes.

1. **Etude des points doubles**.

   On rappelle que $M(t_1)$ *est un point double de* Γ *lorsqu'il existe* $t_2 \neq t_1$ *tel que* $M(t_2) = M(t_1)$

   (a) Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$
   (b) En déduire que si $M(t_1)$ est un point double alors nécessairement $M(t_1) = M(-t_1)$ et $t_1 \neq 0$
   (c) En déduire que tous les points doubles de Γ sont situés sur l'axe des abscisses
   (d) Réciproquement, montrer que tous les points de Γ situés sur l'axe des abscisses, sauf un, sont des points doubles.

2. **Etude de la développée**.

   (a) Justifier que Γ possède un unique point singulier.
   (b) On se place sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$
      i. Déterminer le repère de Frenet et la courbure
      ii. En déduire le centre de courbure $C(t)$ associé au point $M(t)$
   (c) On se place maintenant sur l'intervalle $I =]-\infty,0[$.
   Reprendre les questions de la question précédente.

3. **Etude d'une construction géométrique**.

   Un fil inextensible de longueur infinie est enroulé autour du cercle trigonométrique.
   On commence à le dérouler sans glisser à partir du point de coordonnées (1,0), dans le sens trigonométrique.
   Pour tout $t \geqslant 0$, on note $A(t)$ le point de contact du fil avec le cercle, et $P(t)$ l'extrémité libre du fil (celle que l'on tire). Ainsi $A(t)$ est le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OA(t)})$ a pour mesure t.

   (a) Faire un dessin en prenant $t = \pi/4$
   (b) Donner les coordonnées de $A(t)$
   (c) Que vaut la longueur du fil déroulé (c'est à dire, la longueur de l'arc de cercle entre le point $A(0)$ et le point $A(t)$)?
   (d) Donner un vecteur unitaire qui dirige la tangente au cercle au point $A(t)$
   (e) Le point $P(t)$ appartient à cette tangente et la longueur $A(t)P(t)$ est égale à la longueur du fil déroulé.
   En déduire les coordonnées du point $P(t)$.

CORRIGE EXERCICE 1

Thèmes: simplifications de factorielles, développements limités, théorème lien suite-série, règle des équivalents, critère spécial

1. Pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}.\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{1}{4^n}.\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{1}{4}.\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Comme (a_n) est une **suite positive**(précision indispensable!) et que pour tout n on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, on sait que $\boxed{(a_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

2. (a) Soit $n \geqslant 0$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2.\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

(b) donc:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2.\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

et

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln(1+\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

On trouve bien

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{8n^2}$$

3. • Comme $\frac{1}{8n^2}$ est positif, on peut affirmer par **la règle des équivalents** que les séries $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ et $\sum \frac{1}{8n^2}$ sont de même nature.
Or la série $\sum \frac{1}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente!
On a donc $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ série convergente .
• **Le théorème lien série-suite** nous dit que

La série $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ est convergente ssi la suite $(\ln b_n)$ converge

On peut donc affirmer que $\boxed{\text{la suite } (\ln b_n) \text{ est convergente}}$
• Notons $l = \lim \ln b_n$.
On a $b_n = \exp(\ln(b_n))$ pour tout $n \geqslant 1$

Comme la fonction exp est une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$, **le théorème de composition de limites** permet de dire que

$$b_n = \exp(\ln(b_n)) \to \exp(l)$$

On vient de prouver que la suite (b_n) converge vers un réel $\exp(l) > 0$.
Notons $\lambda = \exp(l)$. On a $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

4. On a $|(-1)^n a_n| = a_n \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

La même règle des équivalents permet d'affirmer que $\sum |(-1)^n a_n|$ diverge

$\boxed{\text{Conclusion } \sum(-1)^n.a_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

rem: ici nous sommes dans le cas d'incertitude de la règle de D'Alembert cf. Q1)

5. Nous allons utiliser **le critère spécial de convergence des séries alternées.**

Comme $a_n \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ on peut dire que $\lim a_n = 0$.

La suite (a_n) est une suite décroissante (Q1) et qui tend vers 0 donc on peut affirmer que $\boxed{\sum(-1)^n a_n \text{ est une série convergente}}$

CORRIGE EXERCICE 4

1. (a) Le calcul donne, les doubles produits se simplifiant,

$$\forall t \in \mathbb{R}, ||\overrightarrow{OM(t)}|| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{1+t^2}$$

(b) Soit $M(t_1)$ un point double.
Il existe donc un réel $t_2 \neq t_1$ tel que $M(t_2) = M(t_1)$.
On a donc en particulier

$$||\overrightarrow{OM(t_1)}|| = ||\overrightarrow{OM(t_2)}||$$

ce qui donne

$$\sqrt{1+t_1^2} = \sqrt{1+t_2^2}$$

ce qui équivaut à

$$t_1^2 = t_2^2 \quad \textit{autrement dit} \quad t_1 = \pm t_2$$

Comme $t_1 \neq t_2$, il nous reste donc $t_1 = -t_2$ avec $t_1 \neq 0$.
On a bien prouvé que $M(t_1) = M(-t_1)$ avec $t_1 \neq 0$

(c) Soit $M(t_1)$ un point double.
D'après la question précédente, on a $y(t_1) = y(-t_1)$.
Or

$$y(-t_1) = \sin(-t_1) + t_1.\cos(-t_1) = -\sin t_1 + t_1.\cos t_1 = -y(t_1)$$

On a donc prouvé que

$$y(t_1) = -y(t_1) \quad \textit{c'est à dire} \quad y(t_1) = 0$$

. On a bien $\boxed{M(t_1) \text{ sur l'axe des abscisses}}$

(d) Soit $M(t)$ un point situé sur l'axe des abscisses.
On a donc $y(t) = 0$.
Comme x est une fonction clairement paire, que nous avons vu que y est impaire, on en déduit que

$$\begin{cases} x(-t) & = x(t) \\ y(-t) & = -y(t) = 0 \end{cases} \quad \textit{ce qui donne} \quad \begin{cases} x(-t) & = x(t) \\ y(-t) & = y(t) \end{cases}$$

ceci prouve que $M(t) = M(-t)$ et donc que si $-t \neq t$ (càd $t \neq 0$) alors $M(t)$ est un point double.

On a bien montré que:
$\boxed{\text{tous les points de } \Gamma \text{ situés sur l'axe des abscisses, sauf } M(0)\text{, sont des points doubles.}}$

2. (a) Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$\overrightarrow{M'(t)} = \begin{pmatrix} t.\cos t \\ t.\sin t \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ n'est jamais nul, on trouve que $\overrightarrow{M'(t)} = \vec{0} \iff t = 0$.

Conclusion: $\boxed{M(0 \text{ est l'unique point singulier}}$

(b) On se place sur $I =]0, +\infty[$

i.
- $\dfrac{ds}{dt} = ||\overrightarrow{M'(t)}|| = \sqrt{t^2.(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{t^2} = |t| = t$
- $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{M'(t)}}{||\overrightarrow{M'(t)}||} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$
- Notons α le paramètre angulaire.
On a $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, ce qui donne $\alpha = t$
- $\boxed{\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}.\dfrac{dt}{ds} = 1.\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t}}$

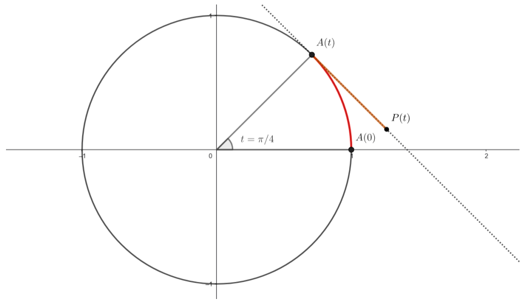
ii. $\boxed{C(t) = M(t) + \dfrac{1}{\gamma}.\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos t + t.\sin t \\ \sin t - t.\cos t \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$

(c) On se place sur $I =]-\infty, 0[$

i.
- $\dfrac{ds}{dt} = ||\overrightarrow{M'(t)}|| = \sqrt{t^2.(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{t^2} = |t| = -t$
- $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{M'(t)}}{||\overrightarrow{M'(t)}||} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$
- Notons α le paramètre angulaire.
On a $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, ce qui donne $\alpha = t + \pi$
- $\boxed{\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}.\dfrac{dt}{ds} = 1.\dfrac{1}{-t} = \dfrac{-1}{t}}$

ii. $\boxed{C(t) = M(t) + \dfrac{1}{\gamma}.\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos t + t.\sin t \\ \sin t - t.\cos t \end{pmatrix} - t.\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}$

remarque: on vient de montrer que la développée de la courbe Γ n'est rien d'autre que le cercle trigonométrique!



3. (a)
(b) $\boxed{A(t) = (\cos t, \sin t)}$
(c) On sait d'une manière générale qu'un arc de cercle de rayon R et de secteur angulaire α a pour longueur $R.\alpha$.
$\boxed{\text{La longueur déroulée est donc simplement ici } 1.t = t}$
(d) Au point $A(t)$ la tangente est dirigée par le vecteur unitaire $\vec{d} = (-\sin t, \cos t)$
(e) D'après l'énoncé, on a $P(t) = A(t) \pm t.\vec{d}$.
D'après l'énoncé physique, et le sens du vecteur $\vec{d}$, on retient

$$P(t) = A(t) - t.\vec{d} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - t.\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + t.\sin t \\ \sin t - t.\cos t \end{pmatrix}$$

Le point $P(t)$ est donc le point $M(t)$!

CORRIGE EXERCICE 3

1. La courbe Γ_λ est une courbe du second degré: ce sera donc soit une ellipse, hyperbole, parabole, soit une conique dégénérée

(a)
- cas $\lambda = 0$.
L'équation devient $y^2 + 4 = 0$.
Comme un carré est toujours positif, cette équation ne possède pas de solution.
$\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_0 \text{ est l'ensemble vide}}$
- sous-cas $\lambda = 2$.
L'équation devient
$$2(x+1)^2 + y^2 = 0$$
Or une somme de carrés est nulle ssi chaque terme est nul, on a donc
$$\begin{cases} (x+1)^2 & = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 0 \end{cases}$$
$\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_2 \text{ est réduit à un point, le point } (-1{,}0)}$
- sous-cas $\lambda = -2$.
L'équation devient
$$-2(x+1)^2 + y^2 = 0 \iff y^2 - [\sqrt{2}(x+1)]^2 = 0 \iff (y - \sqrt{2}(x+1))(y + \sqrt{2}(x+1) = 0$$
ce qui équivaut à
$$y = \sqrt{2}.(x+1) \qquad \text{OU} \qquad y = -\sqrt{2}.(x+1)$$
$\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_{-2} \text{ est la réunion de 2 droites sécantes, les droites } y = \pm\sqrt{2}(x+1)}$

(b) En utilisant la technique habituelle de mise sous forme canonique, l'équation devient

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{\lambda^2-4}{\lambda}}+\frac{y^2}{\lambda^2-4}=1$$

On fait alors le tableau de signes habituel

λ	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
λ^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$	
$\frac{\lambda^2-4}{\lambda}$	$-$	$+$	$-$	$+$	
Nature de Γ_λ	*hyperbole*	*hyperbole*	*vide*	*ellipse**	

et l'on trouve:

- **Si $\lambda \in]-\infty,-2[\cup]-2,0[$, Γ_λ est une hyperbole**
- **Si $\lambda \in]0,2[$, Γ_λ est l'ensemble vide**
- **Si $\lambda \in]2,+\infty[$, Γ_λ est une ellipse.**

  (ce n'est jamais un cercle car pour cela il faudrait que $\frac{\lambda^2-4}{\lambda}=\lambda^2-4$ càd $\lambda=1$, ce qui est exclu dans le cas considéré)

(c) Soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan.
Le nombre de courbes Γ_λ qui passe par le point M est égal au nombre de solutions de l'équation (d'inconnue λ)

$$\lambda.x_0^2+y_0^2+2\lambda.x_0-\lambda^2+\lambda+4=0$$

soit

$$-\lambda^2+(x_0+1)^2.\lambda+y_0^2+4=0$$

Pour cette équation du second degré, on a

$$\Delta=(x_0+1)^4+4(y_0^2+4)\geqslant 16>0$$

Ceci prouve bien qu'il passe deux et exactement deux courbes par le point $M(x_0,y_0)$ fixé quelconque.enumerate

2. (a) On commence par l'étape indispensable: on définit une fonction!
Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} F: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y)^2+y^2-1\end{array}}$

La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et l'on a $\nabla_{(x,y)}F=\begin{pmatrix}2(x-y)\\2(y-x)+2y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x-y\\2y-x\end{pmatrix}$

Ce gradient est nul ssi $\begin{cases}x&=y\\x&=2y\end{cases}$ ssi $x=y=0$.

Or le point $O(0,0)\notin\Gamma$.

Conclusion : $\boxed{\Gamma \text{ est une courbe régulière}}$

(b) Soit $M_0(x_0,y_0)\in\Gamma$.
Notons T_{M_0} la droite tangente à Γ en M_0.
Son équation est

$$\overrightarrow{\nabla_{M_0}F}.\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=0$$

soit

$$(x_0-y_0).(x-x_0)+(2y_0-x_0).(y-y_0)=0$$

et

$$(x_0-y_0).x+(2y_0-x_0).y-x_0^2+2x_0y_0-2y_0^2=0$$

Or comme $M_0\in\Gamma$, on a

$$(x_0-y_0)^2+y_0=1 \quad \textit{càd} \quad x_0^2-2x_0y_0+2y_0^2=1$$

et donc en remplaçant dans l'équation précédente, on trouve bien

$$(x_0-y_0).x+(2y_0-x_0).y-1=0$$

(c)
- En remplaçant dans l'équation ci-dessus $x_0=0$ et $y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouve

$$\boxed{T_A\ :\ -\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}.y-1=0}$$

- On a bien $I\in T_A$ car $-\frac{0}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}-1=0$

(d)
- Soit $M_0(x_0,y_0)\in\Gamma$.
La tangente T_{M_0} passe par le point I lorsque

$$-\sqrt{2}.(x_0-y_0)+(2y_0-x_0).0-1=0 \quad \textit{càd} \quad x_0-y_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Ainsi le point M_0 cherché vérifie le système

$$\begin{cases}x_0-y_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\(x_0-y_0)^2+y_0^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}x_0-y_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\y_0^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

On trouve ainsi deux points

$$M_0(0,\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{et} \quad M_0(-\sqrt{2},\frac{-1}{\sqrt{2}})$$

Ainsi la deuxième tangente qui passe par I est celle au point $M_0(-\sqrt{2},\frac{-1}{\sqrt{2}})$.
Son équation est donc

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}.x-1=0 \qquad \text{soit} \quad x=-\sqrt{2}$$

rem: c'est une tangente verticale.

(e) Le vecteur directeur de la première tangente est $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car colinéaire à $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Le vecteur vecteur directeur de la seconde tangente est $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notons α l'angle entre ces 2 tangentes

On a

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d_1}.\vec{d_2}}{||\vec{d_1}||.||\vec{d_2}||} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

c'est donc $\boxed{\alpha = \arccos(\frac{-1}{\sqrt{5}})}$ car il s'agit d'un angle non orienté de droites

CORRIGE EXERCICE 2

1. x et y sont clairement C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $\begin{cases} x'(t) & = e^t - e^{-t} = 2.\operatorname{sh} t \\ y'(t) & = -e^t \end{cases}$ de signe simple à étudier

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$			$-$		

2. La tangente à Γ en $A(0)$ est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul, donc ici $\overrightarrow{M'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La tangente est ainsi verticale, d'équation $x = 2$

3. Au point $A(\ln 2)$, qui a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, le vecteur dérivé a pour coordonnées

$$(x'(\ln 2), y'(\ln 2)) = \left(\tfrac{3}{2}, -2\right).$$

Une équation cartésienne de la tangente est donc

$$\begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ y - 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2(x - \tfrac{5}{2}) - \tfrac{3}{2}y = 0 \iff 4x + 3y = 10.$$

4. Lorsque $t \to -\infty$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to 2$, on a donc affaire à

$\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y = 2.}$

rem:Comme $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) < 2$, la courbe est toujours en dessous de cette asymptote.

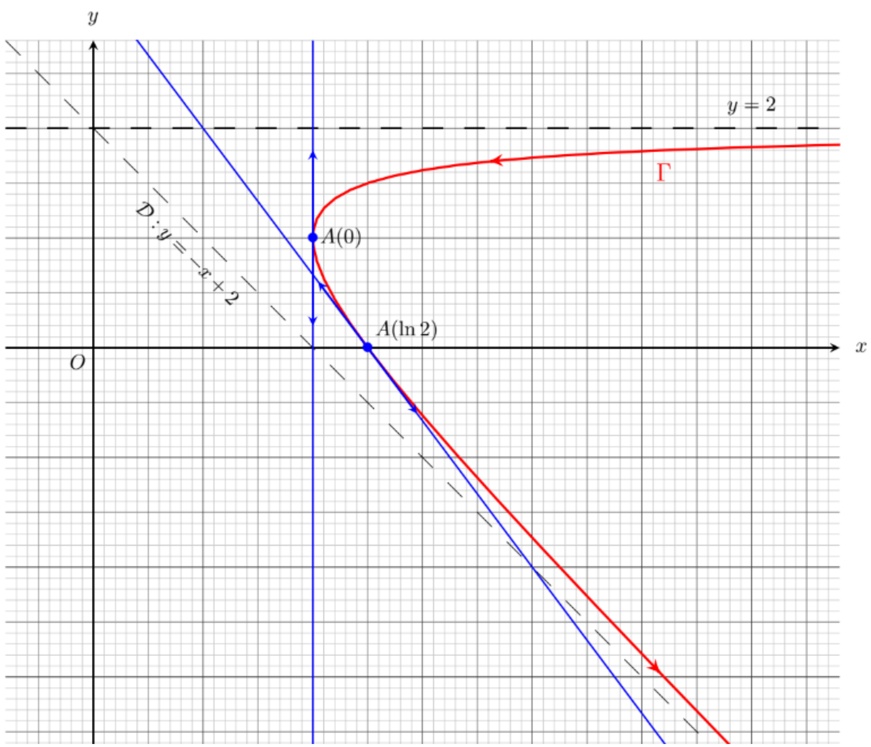
5. Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini, et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2 - e^t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t} - 1}{1 + e^{-2t}} = -1$$

De plus, on a $\lim_{t\to+\infty} y(t) + x(t) = 2 + e^{-t} = 2$

Il y a donc $\boxed{\text{une droite asymptote oblique d'équation } y = -x + 2.}$

Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) + x(t) - 2 = e^{-t} > 0$, donc la courbe est toujours au-dessus de cette asymptote.



7.(a) Les coordonnées de $B(t)$ sont $(x(t), -x(t) + 2)$ donc

$$d(t) = |y(t) - (-x(t) + 2)| = e^{-t}.$$

7.(b)

- La série $\sum_{n\geq 0} d(n) = \sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est une série géométrique de raison $e^{-1} \in]-1,1[$, elle est donc convergente et de somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$
- La série $\sum_{n\geq 1} d(\ln n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, notoirement divergente.