5 Equations différentielles

PREMIER ORDRE

ANA 155
On s'intéresse l'équation différentielle (E) $y' + a(x).y = b(x)$ où a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés.

1. On note $A : x \mapsto \int_{x_0}^{x} a(t)dt$.
   Que pouvez-vous dire de cette fonction?
2. On pose $y : x \mapsto K(x).e^{-A(x)}$ avec K fonction dérivable sur I.
   (a) Montrer que y est solution de E ssi il existe une constante C telle que $\forall x \in I, K(x) = C + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{A(t)}.dt$
   (b) En déduire la forme de la solution générale de (E)
   (c) En déduire que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x).y = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution que l'on déterminera

ANA 156
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x f(t)dt = e^x$

ANA 157
Résoudre sur $I =]-\pi/2,\pi/2[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{y(x)}{\cos^2 x} = 0$

ANA 158 (on pourra chercher une solution particulière évidente)
Résoudre sur $I =]0,+\infty[$ l'équation différentielle $2x.y' + y = \dfrac{1}{x}$.
Quelle est la solution générale sur $I =]-\infty,0[$

ANA 159 (avec recollement)
On considère l'équation $(E) : y'.\cos(x) + 2.\sin(x).y = 1 + \sin^2 x$.

1. résoudre (E) sur $]-\pi/2,+\pi/2[$.
2. résoudre (E) sur l'intervalle du type $]\pi/2,3\pi/2[$
3. résoudre (E) sur $]-\pi/2,3\pi/2[$, pour cela
   On pose $$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\pi/2,3\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin x + K.\cos^2 x & \text{si } x < \pi/2 \\ L & = \text{si } x = \pi/2 \\ \sin x + M.\cos^2 x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} \end{array}}$$
   (a) Déterminer la cns sur (K,L,M) pour que y soit continue en $\pi/2$
   (b) Déterminer la cns sur (K,L,M) pour que y soit dérivable en $\pi/2$
   Montrer que si cette cns est vérifiée alors la fonction trouvée est bien solution sur $]-\pi/2,3\pi/2[$

ANA 160
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $x^2.y' - y = e^{-1/x}$

ANA 161 (on pourra chercher une solution particulière d'une forme... particulière)
Résoudre $y' + y = \sin^3 x$

ANA 162
Résoudre $y' - y = x^2.(e^x + e^{-x})$

ANA 163
résoudre sur $]0,\pi/2[$, $\tan(x).y' + y = \sin x$

ANA 164
Donner le plus rapidement possible la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

ANA 165 (avec recollement)
On considère l'équation $(E) : x.(x-1).y' - (x-2).y = 0$

1. On note I un intervalle ne contenant ni 0, ni 1.
   Résoudre I sur un tel intervalle
2. On souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
   Pour cela on pose $$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} K.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ L & \text{si } x = 0 \\ M.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ N & \text{si } x = 1 \\ P.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}}$$
   (a) Déterminer une CNS pour que y soit continue en 0
   (b) Déterminer une CNS pour que y soit dérivable en 0
   (c) Mêmes questions en 1
   (d) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$

ANA 166
On considère l'équation (E) : $(1-x^2)y' + xy = 1$

1. Résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant ni 1, ni -1.
2. On souhaite résoudre (E) sur $]-1,+\infty[$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ n'est pas dérivable en 1^+
   (b) Montrer que $x \mapsto x$ est la seule solution de (E) sur $]-1,+\infty[$

ANA 167
Résoudre les équations ci-dessous sur l'intervalle indiqué

1. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ sur $]-1,+1[$
2. $xy' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}$
3. $x(x+1)y' + y = \arctan(x)$ sur tout intervalle ne contenant ni 0, ni -1.
4. $y' - 2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.y = \operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$
5. $|x|y' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}$
   (pour cette dernière équation, on pourra résoudre sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ puis étudier le recollement

ANA 168

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \ln x$ sur $]0,+\infty[$
2. Tracer la courbe intégrale qui passe par le point $(1,-1)$ puis celle qui passe par le point $(1,0)$. Donner l'allure générale de la famille de toutes les courbes intégrales.
3. Déterminer l'ensemble des points qui sont à tangente horizontale sur les courbes intégrales. Tracer le graphe de cet ensemble.

ANA 169
Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g : t \mapsto f'(t) + tf(t) \end{array}$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ
2. On souhaite trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
   (a) Déterminer Φ^2 et en déduire que $sp(\Phi^2) = \mathbb{C}$ et que tout sep de Φ^2 est de dimension deux
   (b) Soit λ un complexe non nul.
   On note μ un complexe tel que $\mu^2 = \lambda$.
   Déterminer une base de $E_\lambda(\Phi^2)$ en fonction de μ (on pensera à utiliser la question 1)
   (c) Déterminer $E_0(\Phi^2)$
3. résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

ANA 170 (changement de fonction inconnue)
Résoudre sur tout intervalle I ne contenant pas 0 l'équation $xy' - (1+x)y = e^x(1+x^2)$.
(on pourra poser $y = e^x.z$)

ANA 171 (un bel exo... de géométrie!)
Soit l'équation $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ où a et b sont deux fonctions continues sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$

1. On considère la courbe intégrale passant par le point $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$.
   Donner l'équation de la tangente en ce point.
2. On considère les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0.
   Montrer qu'elles sont toutes parallèles ou concourantes!

ANA 172 (fonctions périodiques)
On considère l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions définies, continues sur $\mathbb{R}$ et $T-$ périodiques.

1. Montrer que si y est solution de (E) alors $x \mapsto y(x+T)$ est aussi solution.
   En déduire que l'ensemble des courbes intégrales est invariant par une transformation géométrique que l'on indiquera.
2. Montrer que si y est solution de (E) et si $y(0) = y(T)$ alors y est $T-$périodique.
   (on pourra considérer la fonction $z : t \mapsto y(t+T)$)

ANA 173 (on pourra procéder par Analyse-Synthèse)
Déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x t.f(t)dt = 0$

ANA 174
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1], g(x) = \int_0^1 \min(t,x)f(t)dt$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ

ANA 175
On considère l'équation différentielle $(E)\,(x^2-1)y' + xy = x^3 - x$

1. Montrer que si (E) possède une solution polynomiale alors forcément c'est un polynôme de degré 2, puis déterminer une solution polynomiale P
2. Résoudre (E) sur $]-\infty,-1,]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
3. Montrer que P est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$

ANA 176 (structure)
On considère l'équation différentielle $(E)\,, x^2.y'' + 4.x.y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$
2. En déduire la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. Déterminer la solution telle que $y(1) = y'(1) = 1$

ANA 177
Résoudre $y'' - y = e^x - 2.e^{3x}$

ANA 178
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}\,, x^2.y'' - x.y' + y = 1$
On pourra chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$

ANA 179 (gros calculs!)
Résoudre sur $\mathbb{R}, y'' - 2y' + y = \dfrac{2xe^x}{x^2+1}$

ANA 180

1. résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$ fixé.
2. résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = \cos(x)$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$

ANA 181
résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$ sachant qu'il existe une solution polynomiale à l'équation homogène associée.
(On pourra montrer qu'une solution polynomiale non nulle de l'équation homogène est forcément de degré

ANA 182
Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \int_0^\pi f(t)dt$

ANA 183

1. Résoudre $(E) : y'' - 2y' + y = 1$
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$
   (a) Montrer que la fonction f est de classe C^1, puis C^2, puis qu'elle est solution de (E)
   (b) Que peut-on conclure?

ANA 184
Soit $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}[X]$
Soit l'application φ définie sur E par $\varphi(f)(x) = f(2x) - f(0) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E et que F est stable par φ
2. Si $f \in \ker(\varphi)$, montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2
3. Résoudre cette équation différentielle. En déduire le noyau de la restriction de φ à F

ANA 185
On s'intéresse à l'ensemble $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = y(0)\cos(x)\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel
2. Déterminer tous les éléments de E

ANA 186
Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y''+xy'+4y=0$ à l'aide du changement de variable $x=e^t$.
(écrire les solutions à valeurs réelles)

ANA 187
Déterminer toutes les solutions polynomiales de $(E)\ :\ (1+x^2)y''(x)+xy'(x)-4y(x)=0$

ANA 188
Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)^2y''-2x(1+x^2)y'+2(x^2-1)y=0$ sachant qu'elle possède une solution polynomiale.

ANA 189
On donne l'équation différentielle : $(E) : y''+2y'+y=f$ où y est la fonction inconnue.

et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
2. Soit $m\in\mathbb{R}$. Démontrer que (E) a , sur $\mathbb{R}$, une solution y_m et une seule telle que $y_m(0)=0$ et $y_m'(0)=m$. Puis déterminer y_m.
3. Montrer que y_m admet un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x=0$, suivant les puissances de x. Ecrire ce développement. Existe-t-il un développement limité de y_m (toujours au voisinage de $x=0$ et suivant les puissances de x) à un ordre supérieur à 2 ?

ANA 190
Déterminer les fonctions réelles d'une variable réelle, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x)+f(-x)=xe^x$
(on commencera par montrer qu'une solution est nécessairement de classe C^2 et qu'elle vérifie l'équation différentielle $f''(x)+f(x)=e^x+xe^x-xe^{-x}$)

ANA 191
Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=e^x$
indication:
On va raisonner par analyse-synthese

- Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ alors f est nécessairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ alors on a $f''(x)+f(x)=2\operatorname{ch}x$ pour tout x réel.
- Résoudre l'équation différentielle ci-dessus.
- Répondre enfin à la question posée!

ANA 192
Determiner les fonctions $f\in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telles que $\forall x>0\ ,\ f'(\frac{1}{x})=f(x)$

ANA 193
Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(2-x)$

ANA 194 (suites numériques VS équations différentielles)

1. Déterminer l'expression réelle de u_n sachant que $\forall n\geqslant 0, u_{n+2}+4u_n=0$
2. Déterminer l'expression réelle de la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y=0$
3. Soit $\omega\in\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression réelle de la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y=\cos(\omega.x)$

ANA 195
Résoudre l'équation différentielle $(1+\mathrm{e}^x)^2y''-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'-(3\mathrm{e}^x+1)y=0$ en introduisant $z(x)=\frac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}$

ANA 196
Soit $\lambda>0$ et y une solution de $y''+(1+\dfrac{\lambda}{x^2})y=0$.
On souhaite montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a;a+\pi[$.
Pour cela on considère $a\in\mathbb{R}$ fixé et la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=\sin(x-a)\ldots$).
On note également $z=y'\phi-y\phi'$.

1. Vérifier que $z(a+\pi)-z(a)=y(a+\pi)+y(a)$
2. Montrer que z est strictement monotone sur l'intervalle $[a,a+\pi]$
3. En distinguant les cas strictement croissant et strictement décroissant et en utilisant la question 1, aboutir à une contradiction.
4. Le résultat montré dans cet exercice reste-t-il valable sous l'hypothèse $\lambda\leqslant 0$?

ANA 197
Résoudre $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ en posant $t=\arctan x$

ANA 198
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle $(E) : f''+f=g$

1. montrer que la solution générale (à valeurs dans $\mathbb{R}$) de cette équation est
$$f : x\mapsto \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt+\lambda\cos x+\mu\sin x \text{ avec}(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$
2. en déduire que si g est positive alors $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+\pi)+f(x)\geqslant 0$

ANA 199
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de $4xy''+2y'-y=0$ avec le changement $t=\sqrt{|x|}$

ANA 200
On souhaite résoudre $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=0\quad(1)$ sur un intervalle I ne contenant pas -1.

1. Montrer qu'il existe une solution de la forme $f(x)=e^{\alpha x}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
2. Donner toutes les solutions de (1) sur I
3. (pour les plus courageux) Vérifier que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un sev de dimension trois.

ANA 201
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E): $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, sachant qu'elle admet une solution de la forme $x\longmapsto e^{ax}$. avec $a\in\mathbb{R}$

ANA 202 (Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)
Résoudre :

1. $y''-2y'+2y=xe^x$ (on pourra chercher une sol part de la forme $x\mapsto(ax+b).e^x$)
2. $y''+3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$
3. $y''+y=P(x)$ où P est un polynôme
4. $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$

ANA 203
On considère l'équation différentielle $(E)\quad(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer les solutions de la forme $x\mapsto e^{ax}$ de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant pas $\dfrac{-1}{2}$

ANA 204
Résoudre sur $]0,+\infty[$ les équations différentielles : $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$ et $y''+2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}(**)$

On devra trouver $x\mapsto xe^{-x}\int_1^x \dfrac{e^{2t}}{t}dt-\dfrac{e^x}{x}$

ANA 205
k désigne un paramètre réel. Soit l'équation différentielle : $(E_k)x^2y"+xy'+k^2y=O$ avec $x\in]0,+\infty[$.

1. Intégrer $E(k)$ pour $k=0$
2. Intégrer $E(k)$ pour $k\neq 0$. On utilisera le changement de variable défini par $t=\ln x$.
3. Montrer qu'il existe des valeurs du paramètre k pour lesquelles l'équation $E(k)$ admet des solutions y, différentes de la solution nulle, telles que $y(1)=y(2)=0$. Donner l'expression générale de ces solutions.
4. Soient y_1 et y_2 deux solutions du type précédent, correspondant respectivement à des valeurs k_1 et k_2 distinctes du paramètre k. Calculer l'intégrale $\int_1^2 \dfrac{y_1(x)y_2(x)}{x}dx$

ANA 206
Soit α un réel fixé. A l'aide d'un changement de variable bien choisi,
résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y''+xy'+y=\sin(\alpha\ln x)$

ANA 207
Résoudre :

$$1.)\, y''+y=|x| \qquad , \qquad 2.)\, y''-y=e^{-|x|} \qquad , \qquad 3.)\, y''+y=\sin^2\frac{x}{2}$$

(On commencera par justifier que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace ... de dimension deux)

ANA 208
Soit f la solution de l'équation différentielle $y''+xy'+y=0$ avec les conditions de Cauchy $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

1. montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a
$$\forall n\geqslant 2,\, f^{(n)}+xf^{(n-1)}+(n-1)f^{(n-2)}=0$$
2. montrer que f admet un développement limité en zéro à tout ordre, et donner celui à l'ordre $2n+2$
3. f est-elle une fonction impaire? justifier votre réponse.

ANA 209 (équations d'Euler)
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.
On considère l'équation différentielle $x^2y''+axy'+by=0$ sur $]0,+\infty[$

1. montrer que le changement de variable $x=e^t$ nous ramène à la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.
2. application: résoudre $x^2y''+xy'+4y=0$ (on cherche les sol. à val. réelles)

ANA 210
résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de fonction indiqué

1. $xy''+(2+x)y'+y=0$ (poser $y=\dfrac{z}{x}$)
2. $x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=1$ (poser $y=\dfrac{z}{x^2}$)
3. $y'=(y-1)(xy-x-y)$ (poser $y=1+\dfrac{1}{z}$)
4. $xy'-x=y^2-x^2$ (poser $y=x+z$ puis $u=1/z$)

ANA 211
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x)=1$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. *(On pourra utiliser le changement de fonction $u=x^2y$.)*
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

ANA 212

1. trouver un polynôme solution de $x^2y''-3xy'+4y=0$
2. résoudre $x^2y''-3xy'+4y=x^3$
3. résoudre $x^2y''-3xy'+4y=1$

ANA 213 (une équation hors programme)
On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''+|y|=0 \text{ avec } y(0)=a \text{ et } y'(0)=0.$$

On admettra qu'il possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ que l'on notera y.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, y(x)\leq a$.
2. Déterminez y lorsque $a\leq 0$.
   Pour la suite, on suppose que $a>0$.
3. Déterminer au voisinage de 0 l'expression de y et montrer que y s'annule en deux points $b_-<0$ et $b_+>0$ que l'on déterminera.
4. Achever la résolution de l'exercice.

ANA 214

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ déjà $\begin{cases}(1+x^2)y''-2xy'+2y &=0\\ y(x_0)=y'(x_0)=0\end{cases}$ puis $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)y''-y'-xy=e^{-x}$

ANA 215
On se donne une fonction q définie, décroissante et de classe C^1 sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$.
On considère également une fonction z de classe C^2 sur I et solution sur I de l'équation différentielle $z''(x)+q(x)z(x)=0$

1. On note $u: x\mapsto q(x)z^2(x)+(z'(x))^2$.
   Démontrer que la fonction u est décroissante sur I.
2. En déduire que s'il existe un réel $q_0>0$ tel que $\forall x\in I, q(x)\geqslant q_0$ alors z est bornée sur I.
3. Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur I vérifiant $\forall x\in I, xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0$
   (a) Soit z la fonction définie sur I par $z(x)=\sqrt{x}y(x)$.
   Déterminer une fonction q telle que $\forall x\in I, z''(x)+q(x)z(x)=0$
   (b) En déduire qu'il existe un réel $M>0$ tel que $\forall x\in I, |f(x)|\leqslant\dfrac{M}{\sqrt{x}}$

ANA 216

1. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   de fonction réciproque $x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
2. Résoudre $(E)\ :(x^2+1)y''+xy'-q^2y=0$, où $q>0$, à l'aide d'un changement de variable judicieux

ANA 217
résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation $x^2y''-3xy'+4y=x+4$ avec le changement de variable $t=\ln(|x|)$

ANA 218
résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ avec le changement de variable $x=\cos t$

ANA 219
On considère l'équation différentielle $(E) \quad x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z=x^2.y$
2. Etudier le recollement en 0

ANA 220
On s'intéresse à l'équation différentielle $(E):(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y=0$.
On se propose de la résoudre sur $\mathbb{R}$ de différentes manières…

1. Cela ne servira pas ! montrer que si y est solution de (E) alors $x\mapsto y(-x)$ et $x\mapsto -y(-x)$ le sont aussi.
2. Un coup pour rien ! Déterminer les polynômes solutions de (E). Que peut-on conclure?
3. Un coup de bol ! Chercher les solutions de la forme $x\mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{1+x^2}$ où a,b,c sont trois constantes réelles. Conclure !
4. Méthode classique ! sachant que $x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est solution de (E), résoudre complètement (E).
5. Changement de variable ! Soit φ une fonction bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ de classe C^2.
   On considère la fonction z définie sur $\varphi(\mathbb{R})$ par $z(t)=z(\varphi(x))=y(x)$
   (a) montrer que
   $$(1+x^2)^2.\varphi'^2(x).z''(\varphi(x))+(1+x^2)\left((1+x^2)\varphi''(x)+2x\varphi'(x)\right)z'(\varphi(x))+4z(\varphi(x))=0$$
   (b) déterminer une fonction φ telle que l'équation ci-dessus soit à coefficients constants.
   (c) résoudre alors (E) .

ANA 221 (exemple très riche en calculs!)
On veut résoudre sur $]\sqrt{e},\infty[$, l'équation $x(1-2\ln x)y''+(1+2\ln x)y'-\dfrac{4}{x}y=(1-2\ln x)^2$

1. (a) déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{5-6X}{1-2X}=a+\dfrac{b}{1-2X}$
   (b) à l'aide d'un changement de variable judicieux, déterminer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{x}\dfrac{5-6\ln x}{1-2\ln x}$
   (c) déterminer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1-2\ln x}{x^2}$ et de $\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
2. chercher une solution de l'équation homogène sous la forme $y(x)=x^\alpha$
3. poser $y=x^2z$ et déterminer l'équation différentielle satisfaite par z'
4. montrer que $z':x\mapsto \dfrac{1-2\ln x}{x^2}+A\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
5. en déduire que $y:x\mapsto x(1+2\ln x)+A\ln x+Bx^2$

ANA 222 (pour 3, on pourra poser $x=e^t$)
Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi_n:P\mapsto X^2P''(X)+XP'(X)$
2. $E=\mathbb{R}[X]$ et $\varphi:P\mapsto X^2P''(X)+XP'(X)$
3. $E=C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\varphi:f\mapsto g$ avec $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=x^2f''(x)+xf'(x)$

ANA 223
Déterminer les solutions dse des équations suivantes

1. $y''+xy'+y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$
2. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=2$

ANA 224
Soit $(E):(1+x^2)^2y''-2x(1+x^2)y'+2(x^2-1)y=0$

1. Déterminer les solutions développables en série entière
2. En déduire la solution générale de (E)

ANA 225
On note $E=\mathbb{R}_2[X]$.
On considère f l'endomorphisme de E défini par $f(P)=(2X+1)P(X)-(X^2-1)P'(X)$

1. (a) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$. On la note A
   (b) Déterminer les éléments propres de A
   (c) En déduire les éléments propres de f
2. Dans cette question, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on note (E_λ) l'équation différentielle
   $$(2x+1-\lambda)y(x)-(x^2-1)y'(x)=0$$
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,+1\}, \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$
   (b) Déterminer, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_λ) sur chacun des intervalles : $]-\infty,-1[,]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
   (c) Pour quelles valeurs de λ toutes les solutions de (E_λ) sont-elles polynômiales sur chacun des intervalles ci-dessus? Peut-on retrouver ainsi les résultats de la question 1(c)?

ANA 226
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère sur $I=]-1,1[$ l'équation différentielle
$$(1-x^2)y''-\alpha xy'+\alpha y=0 \quad (E_\alpha)$$

1. On suppose dans cette question que $\alpha=2$.
   Déterminer les solutions de (E_2) développables en séries entières.
   Après avoir calculé leur rayon de convergence, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires. A-t-on toues les solutions?
2. On suppose dans cette question que $\alpha=3$.
   Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P)=(1-X^2)P''-3XP'$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
   (b) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
   (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
   En déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3)
3. On suppose dans cette question $\alpha=1$.
   Résoudre l'équation (E_1) à l'aide du changement de variable $x=\sin t$

ANA 227

On considère l'équation différentielle $(E): xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$

1. Montrer par récurrence que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Justifier sans calcul l'existence et l'unicité d'une solution φ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi(1) = 2$ et $\varphi'(1) = -2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \varphi^{(n)}(1)$.
   En dérivant n fois la relation $x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$
4. Justifier que φ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1.
   Déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
5. Soit Γ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées (1,2) et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

ANA 228

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $xy'' + (x-1)y' - y = 0$

1. Déterminer les solutions de (E) développable en série entière (on reconnaitra des séries que l'on sait exprimer à l'aide de fonction usuelles)
2. Sans autre calcul, donner la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$

ANA 229

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0$

1. Déterminer les solutions de (E) développable en série entière (on reconnaitra des séries que l'on sait exprimer à l'aide de fonction usuelles)
2. Sans autre calcul, donner la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$

ANA 230

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

1. Montrer que $y(x) = \sum a_n x^n$ est solution de (E) sur un intervalle $]-R, +R[$ ave $R \neq 0$
   ssi $\begin{cases} a_0 & = 0 \\ \forall n \geqslant 1, (n-2)(n-1)a_n + (n-2)^2 a_{n-1} & = 0 \end{cases}$
2. En déduire une expression simple de $y(x)$ (lorsqu'elle est dse) à l'aide des fonctions usuelles

ANA 231

Résoudre les équation différentielles suivantes (m est un paramètre réel)

1. $y'' - 2y' + y = e^{mx}$
2. $y'' - 2y' + y = xe^{mx}$
3. $y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^x \sin x$
4. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2x)$
5. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(mx)$
6. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2+1}$
7. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-mx}}{x^2+1}$

156 $f : x \mapsto (x+1).e^x$

161 $y : x \mapsto K.e^{-x} - \frac{3}{8}\cos x + \frac{3}{8}\sin x + \frac{3}{40}\cos(3x) - \frac{1}{40}\sin(3x)$

162 $y : x \mapsto K.e^x + \frac{x^3}{3}e^x - (x^2/2 + x/2 + 1/4).e^{-x}$

165 K quelconque et toutes les autres nulles

166
- sur $]-1,1[$, la solution générale sans second membre est $y = A\sqrt{1-x^2}$
- sur $]-\infty, -1[$, la solution générale sans second membre est $y = B\sqrt{x^2-1}$
- sur $]1, +\infty[$, la solution générale sans second membre est $y = C\sqrt{x^2-1}$
- une solution particulière évidente (pour ne pas dire particulièrement évidente!) est $y = x$, sur chacun des 3 intervalles ci-dessus.
- Sur $\mathbb{R}$, se pose le problème du raccordement .
  On considère donc une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $$x \longmapsto \begin{cases} B\sqrt{x^2-1} + x & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \\ A\sqrt{1-x^2} + x & \text{si } x \in]-1, +1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ C\sqrt{x^2-1} + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
  Le problème est simple à traiter : car vu que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0, pour avoir f dérivable en -1 et en 1 on doit nécessairement prendre $A = B = C = 0$. On trouve alors que l'on a nécessairement $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$. Cette condition étant bien entendu suffisante, on a trouve donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

167 1. On demande de résoudre l'équation $\boxed{x(x^2-1)y' + 2y = x^2 \text{ sur }]-1, +1[}$
Comme $x(x^2-1)$ s'annule sur $]-1, +1[$ on va
- résoudre l'équation sur $]0,1[$
- résoudre l'équation sur $]-1,0[$
- étudier le recollement en 0

(a) $\boxed{\text{Résolution de } y' + \dfrac{2}{x(x^2-1)}y = \dfrac{x}{x^2-1} \text{ sur } I =]0,1[}$

- On commence par résoudre l'équation homogène associée.
  Notons A une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x(x^2-1)}$ sur I
  On commence par une décomposition en éléments simples: on trouve
  $$\frac{2}{X(X^2-1)} = \frac{2}{X(X-1)(X+1)} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$
  On a donc
  $$A(x) = \int^x \frac{2}{t(t^2-1)}dt = \int^x \frac{-2}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}dt = -2\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x-1| + Cste$$
  Pour tout $x \in I$ on a
  $$\exp(2\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x-1|) = \frac{|x|^2}{|x+1|.|x-1|} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

La solution générale de l'équation homogène sur $]0,1[$ est $\boxed{y(x) = K.\frac{x^2}{1-x^2} \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$

- On cherche une solution particulière avec la variation de la constante.
  On pose $y(x) = K(x).\frac{x^2}{1-x^2}$
  En remplaçant dans l'équation différentielle, on aboutit à $K'(x) = \frac{-1}{x}$
  Ainsi $K(x) = -\ln|x| + Cste$. Une solution particulière est $y(x) = -\ln|x|.\frac{x^2}{1-x^2}$

  Conclusion: la solution générale sur $]0,1[$ est $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2.(K-\ln(x))}{1-x^2} \end{array} \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$

(b) $\boxed{\text{Résolution de } y' + \frac{2}{x(x^2-1)}y = \frac{x}{x^2-1} \text{ sur } I =]-1,0[}$

On trouve de même $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2.(K-\ln(-x))}{1-x^2} \end{array} \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$

(c) $\boxed{\text{Etude du recollement en 0}}$

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2.(A-\ln(x))}{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ C & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2.(B-\ln(-x))}{1-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$ avec $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$

On rappelle que $\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0$ d'après les limites de référence(croissances comparées)

i) $\boxed{\text{Etude de la continuité en 0}}$
On a directement d'après le rappel

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2.(A-\ln(x))}{1-x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ax^2 - Ax^2\ln(x)}{1-x^2} = 0$$

et de même

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2.(B-\ln(-x))}{1-x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{Bx^2 - Bx^2\ln(-x)}{1-x^2} = 0$$

On trouve donc que $\boxed{y \text{ est continue en 0 ssi } C = 0}$

Dorénavant on considérera $C = 0$

ii) $\boxed{\text{Etude de la dérivabilité en 0}}$

- Pour $x > 0$ on a

$$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{y(x)}{x} = \frac{x.(A-\ln(x))}{1-x^2} = \frac{Ax - Ax\ln(x)}{1-x^2}$$

et donc on peut dire que $\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$ d'après le rappel
ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en 0 et } f'_d(0) = 0}$

- De la même manière on trouve que $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = 0}$

- Comme $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en 0}}$

iii) $\boxed{\text{On vérifie que l'équation est vérifiée en 0}}$
On a bien $0(0^2-1)\times 0 + 2\times 0 = 0^2$

Conclusion: la solution générale sur $]-1,+1[$ est
. $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2.(A-\ln(x))}{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2.(B-\ln(-x))}{1-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

2. $\boxed{\text{On demande de résoudre l'équation } xy' + y = e^x \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Comme x s'annule sur $\mathbb{R}$ (!), on va
- résoudre l'équation sur $]0,+\infty[$
- résoudre l'équation sur $]-\infty,0[$
- étudier le recollement en 0

L'équation étant plutôt simple à résoudre je ne vais exposer ici que le problème du recollement

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x + A}{x} & \text{si } x > 0 \\ C & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x + B}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}}$ avec $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$

On rappelle que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$

i) $\boxed{\text{Etude de la continuité en 0}}$
On étudie la continuité à gauche et à droite
- Pour $x > 0$ on a $y(x) = \frac{e^x + A}{x} = \frac{1 + A + x + o(x)}{x}$
  et donc $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A > -1 \\ 1 & \text{si } A = -1 \\ -\infty & \text{si } A < -1 \end{cases}$
  Ainsi $\boxed{y \text{ est continue à droite en 0 ssi } (A,C) = (-1,1)}$
- on trouve de manière similaire que $\boxed{y \text{ est continue à gauche en 0 ssi } (B,C) = (-1,1)}$

On considère ainsi dorénavant la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$

ii) $\boxed{\text{Etude de la dérivabilité en 0}}$
Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x} = \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o_0(x^2))-1-x}{x^2} = \frac{x}{2}+o_0(x)$$

Ainsi y est dérivable en 0 et l'on a $y'(0)=0$

iii) $\boxed{\text{On vérifie que l'équation est vérifiée en 0}}$
On a bien $0\times 0+1=e^0$

Conclusion: il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est $\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$

Deux remarques sur cet exercice

(a) Si on se place sur *UN INTERVALLE* ne contenant pas 0 on a les équivalences

$$\begin{aligned} xy'+y=e^x &\iff (xy)'=e^x \\ &\iff xy = e^x + Cste \qquad \text{c'est ici que l'hypothèse INTERVALLE est fondamentale} \\ &\iff y = \frac{e^x+Cste}{x} \end{aligned}$$

(b) il est courant de montrer que la fonction y trouvée est en fait C^∞ sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un développement en série entière

3. $\boxed{\text{On demande de résoudre } y' - 2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}y = \operatorname{ch} x}$

– On résout l'équation sans second membre $y' - 2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}y = 0$ sur $I=\mathbb{R}$

La fonction $a : x \mapsto -2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ est continue sur $I=\mathbb{R}$

Notons A une primitive de a sur I,

on a $A(x) = \int -2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}dx = -2\ln|\operatorname{ch} x| + Cste = -2\ln(\operatorname{ch}(x)) + Cste$
et $\exp(2\ln(\operatorname{ch} x)) = \operatorname{ch}^2(x)$

La solution générale de l'équation homogène associée est $\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\operatorname{ch}^2(x) \end{array}}$ avec $K\in\mathbb{R}$

– On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante, on pose donc $y(x) = K(x).\operatorname{ch}^2(x)$.
En remplaçant dans l'équation différentielle, on aboutit à $K'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

Pour déterminer $K(x)$ on peut procéder de 2 manières différentes:

i) Le changement de variable $u = \operatorname{sh}(t)$ (et donc $du = \operatorname{ch}(t).dt$) donne

$$K(x) = \int^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2 t}dt = \int^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{1+\operatorname{sh}^2(t)}dt = \int^{\operatorname{sh} x} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\operatorname{sh} x) + Cste$$

ii) Le changement de variable $u = e^t$ (et donc $du = e^t dt$) donne

$$K(x) = \int^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int \frac{2dt}{e^t+e^{-t}} = \frac{2e^t dt}{e^{2t}+1} = \int^{e^x} \frac{2du}{u^2+1} = 2\arctan(e^x) + Cste$$

Ainsi une solution particulière est $y(x) = \arctan(\operatorname{sh} x).\operatorname{ch}^2(x)$ ou $y(x) = 2\arctan(e^x).\operatorname{ch}^2(x)$

– La solution générale de l'équation complète est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (K+\arctan(\operatorname{sh} x)).\operatorname{ch}^2(x) \end{array}} \qquad \text{avec} \qquad K\in\mathbb{R}$$

4. $\boxed{\text{On souhaite résoudre sur } \mathbb{R} \text{ l'équation } |x|y' + (x-1)y = x^3\ (E)}$

– .
On remarque que $|x|$ s'annule pour $x=0$. Nous allons donc répondre à la question en:
(a) Déterminant les solutions sur $]0,+\infty[$
(b) Déterminant les solutions sur $]-\infty,0[$
(c) Résolvant le problème du raccordement en zéro

(a) $\boxed{\text{Résolution sur }]0,+\infty[.}$

– Sur $]0,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à l'équation $(E'), y' + \dfrac{x-1}{x}y = x^2$. (car $|x| = x$)

– On a $\int^x \dfrac{1-t}{t}dt = \ln(t) - t + cste$.
Donc la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(x) = Ke^{\ln(x)-x} = K.x.e^{-x}$$

– On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.
On pose donc $y(x) = K(x).x.e^{-x}$.
En remplaçant dans (E') cela donne $K'(x) = x.e^x$.
En réalisant un ipp, on trouve que $K(x) = xe^x - e^x + cste$.
Une solution particulière est donc $y(x) = x^2 - x$.

– Conclusion: $\boxed{\text{la solution générale de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } y(x) = x^2 - x + K.x.e^{-x} \text{ avec } K \in}$

(b) $\boxed{\text{Résolution sur }]-\infty,0[.}$

- Sur $]-\infty,0[$, l'équation (E) équivaut à l'équation (E''), $y' + \dfrac{1-x}{x} y = -x^2$. (car $|x| = -x$)
- On a $\int^x \dfrac{t-1}{t} dt = x - \ln|x| = x - \ln(-x) + cste$.
Donc la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(x) = Le^{x-\ln(-x)} = L\frac{e^x}{-x} = -L\frac{e^x}{x} \text{ avec } L \in \mathbb{R}$$

- On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.
On pose donc $y(x) = -L(x)\dfrac{e^x}{x}$.
En remplaçant dans (E'') cela donne $L'(x) = x^3 \exp^{-x}$.
Des intégrations par parties successives
(à chaque fois, on dérive le polynôme et on primitive e^{-x})
nous donnent $L(x) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + cste$.
Une solution particulière est donc $x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$
- Conclusion:
$\boxed{\text{la solution générale de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ est } y(x) = x^2+3x+6+\dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} \text{ avec } L \in \mathbb{R}}$

(c) $\boxed{\text{Etude du recollement en 0.}}$
On considère la fonction
$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 - x + K.x.e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ M & \text{si } x = 0 \\ x^2+3x+6+\dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$$
On cherche les conditions sur $(K,L,M) \in \mathbb{R}^3$ pour que y soit dérivable en 0.

i) $\boxed{\text{Etude de la continuité en 0.}}$
On sait que y est continue en 0 ssi $\lim_{0^-} y = \lim_{0^+} y = y(0)$.
- On a sans difficulté $\lim_{0^+} y(x) = \lim_{0^+} x^2 - x + K.xe^{-x} = 0$
- Pour étudier la limite en 0^-, il faut faire plus attention: détaillons!
  - $\lim_{0^-} x^2+3x+6 = 6$ (et ici pas de problème!)
  - $\lim_{0^-} \dfrac{6}{x} = -\infty$ et $\lim_{0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$.
  - Nous allons utiliser un DL pour l'expression $\dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x}$.
  On obtient $\dfrac{6 - Le^x}{x} = \dfrac{6 - L - Lx + o(x)}{x} = \dfrac{6-L}{x} - L + o(1)$.
  On trouve ainsi que:
    i) si $L > 6$ on a $\lim_{0^-} \dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
    ii) si $L < 6$ on a $\lim_{0^-} \dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} = -\infty$.
    iii) si $L = 6$ on a $\lim_{0^-} \dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} = -6$
  - On a prouvé que y possède une limite finie à gauche en 0 ssi $L = 6$, et dans ce cas $\lim_{0^-} y = 6 - 6 = 0$
- Conclusion: $\boxed{\text{on a prouvé que } y \text{ continue en 0 ssi } (L,M) = (6,0)}$

Dorénavant, on suppose que L et M ont pris ces valeurs.

ii) $\boxed{\text{Etude de la dérivabilité en 0.}}$
On sait que y sera dérivable en 0 ssi y est dérivable à droite et à gauche en 0, et que ces dérivées sont égales.

- $\boxed{\text{dérivabilité à droite}}$.
On a pour $x > 0$, $\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = \dfrac{x^2 - x + Kxe^{-x}}{x} = x - 1 + Ke^{-x}$.
Ainsi $\lim_{0^+} \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = K - 1$.
On a prouvé que y est dérivable à droite en 0 et que $y'_d(0) = K - 1$
- $\boxed{\text{dérivabilité à gauche}}$.
Pour $x < 0$ on a
$$\begin{aligned} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} &= \frac{x^3+3x^2+6x+6-6e^x}{x^2} \\ &= \frac{x^3+3x^2+6x+6-6(1+x+x^2/2+o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{x^3+o(x^2)}{x^2} = x + o(1) \end{aligned}$$
(on a réalisé un DL à l'ordre deux de e^x)
On trouve ainsi que $\lim_{0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$
On a prouvé que y est dérivable à gauche et que $y'_g(0) = 0$
- Conclusion: $\boxed{y \text{ est dérivable en 0 ssi } K = 1, \text{ et dans ce cas } y'(0) = 0}$

(d) Conclusion générale:
On trouve qu'il existe une et une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il s'agit de la fonction
$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 - x + x.e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2+3x+6+6\dfrac{1-e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$$

170 on trouve $xz' - z = 1 + x^2$ puis $y = e^x(x^2-1) + Kxe^x$

171 point de concours $(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)})$

176 $y : x \mapsto K/x + L/x^2 + 1/2$

177 $y : x \mapsto K.e^x + L.e^{-x} + x/2.e^x - e^{3x}/4$

178 $y : x \mapsto -1 - \ln x + Kx + L.x.\ln x$

179 $y : x \mapsto x.\ln(1+x^2).e^x + 2\arctan x.e^x + K.x.e^x + L.e^x$

180 – l'équation homogène a pour solution générale $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} \end{array}}$

– Pour appliquer la méthode ci-dessus, il nous suffit de prendre une solution particulière (si possible qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) de l'équation homogène ci-dessus.
Par exemple, on prend la fonction $x \mapsto e^{-3x}$.
Et pour résoudre (ED2), on pose $y(x) = e^{-3x}.z(x)$.
On a donc $y'(x) = e^{-3x}(z' - 3z)$ et $y''(x) = e^{-3x}(z'' - 6z' + 9z)$.
En reportant dans (ED2), on obtient $e^{-3x}z'' = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$ ce qui équivaut à $z'' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Une première quadrature nous donne $z' = \arctan x + C$ avec C constante réelle.
Une nouvelle intégration fournit $z = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + Cx + D$ avec D constante réelle.

– On a donc trouvé $\boxed{y = \left(x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right).e^{-3x} + Cxe^{-3x} + De^{-3x}}$ avec $(C,D) \in \mathbb{R}^2$

. . . On peut remarquer que la solution trouvée est bien de la forme attendue. . .

181 *indications :*

– *on trouvera qu'une solution polynomiale est nécessairement de degré 2 (raisonner sur le monôme de plus haut degré)*
– *on posera $y(x) = x^2.z(x)$, et on trouvera que z vérifie l'équation $z''(x) + \dfrac{1}{x}z'(x) = \dfrac{1}{x}$*
– *on résoudra cette équation du premier ordre en z', puis en intégrant, on trouvera que $z(x) = K\ln x + x + L$*
– *on "reviendra" en $y(x)$*

185 1. Nous allons montrer que E est un sev de l'espace vectoriel connu $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

i) E est inclus dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition
ii) E est non vide car la fonction constante nulle est dans E
iii) E est stable par combinaison linéaire.
En effet, $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall(y,z) \in E^2$ considérons la fonction $\lambda.y + z$ et notons la t
Comme $t'' = (\lambda.y+z)'' = \lambda.y''+z''$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, t''(x)+t(x) = \lambda.y''(x)+z''(x)+\lambda.y(x)+z(x) = \lambda.(y''(x)+y(x)) + (z''(x)+z(x))$. Or $y''(x)+y(x) = y(0).\cos x$ et $z''(x)+z(x) = z(0).\cos x$ par définition de E. Donc $t''(x)+t(x) = \lambda.y(0).\cos x + z(0).\cos x = (\lambda.y(0)+z(0)).\cos x = t(0).\cos x$.
On a bien prouvé que $t \in E$

2. On suit les indications fournis, c'est à dire:

i) On détermine d'abord les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = A\cos x$ dans le cas où A est une constante réelle quelconque.
ii) Puis on regarde parmi ces solutions celles pour lesquelles on a $y(0) = A$

Ce qui donne concrètement:

(a) Par les méthodes classiques, on trouve que la solution générale de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = A\cos x$ est $\boxed{y(x) = \dfrac{A}{2}.x.\sin x + K\cos x + L\sin x}$ avec $(K,L) \in \mathbb{R}^2$

(b) La condition $y(0) = A$ équivaut donc à $A = K$. On vient de prouver que les fonctions qui sont dans E sont les fonctions qui s'écrivent $\boxed{y(x) = \dfrac{K}{2}.x.\sin x + K\cos x + L.\sin x}$ avec $(K,L) \in \mathbb{R}^2$

Si on note $\boxed{\begin{array}{lcl} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x.\sin x}{2} \end{array}}$ et $\boxed{f_2 \text{ la fonction } \cos}$, nous avons montré que E est un espace vectoriel de dimension deux engendré par les fonctions f_1 et f_2

186 – On commence par écrire que pour tout $x > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence

$$x = e^t \Longleftrightarrow t = \ln x$$

– On considère une fonction inconnue z qui dépend de la variable t telle que

$$\forall x > 0, y(x) = z(t) = z(\ln(x))$$

– En dérivant par rapport à x chaque membre de l'égalité $y(x) = z(\ln x)$, on trouve:

$y'(x) = \dfrac{1}{x}.z'(\ln x)$ puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln x)$

– En reportant dans l'équation cela donne

$$\forall x > 0, x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)\right) + x\left(\frac{1}{x}.z'(\ln x)\right) + 4z(\ln x) = 0$$

Soit $\forall x > 0, z''(\ln x) + 4z(\ln x) = 0$.

En revenant à la variable t cela donne $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z(t) = 0.}$

– La solution générale de cette équation est $\boxed{\begin{array}{lcl} z : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A.\cos(2t) + B.\sin(2t) \end{array}}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

– La solution générale de l'équation initiale est donc

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\cos(2\ln x) + B.\sin(2\ln x) \end{array}} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

remarque: comme on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(x) = y(e^t)$$

On peut dériver par rapport à t et on obtient

$$z'(t) = e^t.y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t.y''(e^t) + (e^t)^2y'(e^t)$$

ce qui donne

$$z'(t) = xy'(x) \text{ et } z''(t) = xy''(x) + x^2y'(x)$$

188 on trouve finalement $y = A(1+x^2)\arctan x + B(1+x^2)$

191 – On souhaite déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)+f(-x) = \exp(x)$ (E).
On note qu'aucun théorème du cours ne s'applique car la relation qui lie f et f' ne les évalue pas au même point. On va procéder par analyse-synthèse.

- **Analyse.** On suppose que f vérifie (E), et on va déterminer les conditions nécessaires que f vérifie forcément.
  1. Une première condition est que f est dérivable sur $\mathbb{R}$! En effet, pour tout x réel $f'(x)$ doit exister.
  2. On a pour tout x réel $f'(x) = \exp(x) - f(-x) \quad (E)$.
     Comme les fonctions exp et $x \mapsto f(-x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,on peut affirmer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  3. En dérivant chaque membre de l'égalité (E) on obtient que pout tout x réel
     $$f''(x) = \exp(x) + f'(-x)$$
  4. On remarque que dire que pour tout x réel $f'(x) = \exp(x) - f(-x)$ revient à dire que pour tout x réel on a $f'(-x) = \exp(-x) - f(x)$
  5. Avec les deux points précédents, on obtient que pour tout x réel on a $f''(x) = \exp(x)+\exp(-x)-f(x)$. C'est à dire que $\boxed{f''(x) + f(x) = 2\operatorname{ch} x \quad (E_2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  6. On résout l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$.
     - une solution particulière évidente est $f = \operatorname{ch}$
     - la solution générale de l'équation homogène associée est $A.\cos + B.\sin$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
     - par théorème, on en déduit que la solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donnée par
       $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch}(x) + A.\cos x + B.\sin x \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$
     - La partie Analyse est terminée. On a trouvé que nécessairement f était de la forme indiquée ci-dessus.

- **Synthèse**. On regarde si la condition nécessaire trouvée ci-dessus est également condition suffisante. C'est à dire on regarde si les fonctions qui s'écrivent $\operatorname{ch} + A.\cos + B.\sin$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout (A,B) ou s'il y a des conditions sur (A,B).
  On suppose donc que pour tout x réel on a $f(x) = \operatorname{ch} x + A\cos x + B\sin x$.
  1. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{sh} x - A.\sin x + B.\cos x$.
  2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \operatorname{ch}(-x) + A.\cos(-x) + B.\sin(-x) = \operatorname{ch} x + A.\cos x - B.\sin x$
  3. On a donc
     $$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + (A+B)(\cos x - \sin x) = e^x + (A+B)(\cos x - \sin x)$$
  4. On en déduit que $\boxed{f \text{ vérifie l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ssi } \forall x \in \mathbb{R}, (A+B).(\cos x - \sin x) = 0.}$
     Or sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ n'est pas constamment nul: la condition précédente équivaut donc à $A + B = 0$ c'est à dire $B = -A$
     rem: ici il est fondamental d'avoir en tête que A et B ne dépendent pas de x !
  5. En conclusion, on a montré que les fonctions f qui vérifie (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
     $$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch} x + A(\cos x - \sin x) \end{array}} \text{ avec } A \text{ quelconque dans } \mathbb{R}$$

195 On trouve $(1+e^x)^3(z'' - z) = 0$ et donc $z = Ae^x + Be^{-x}$

202
1. $y : x \mapsto xe^x + (A\cos x + B\sin x)e^x$
2. $y : x \mapsto \ln x.e^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$
3. $y : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{(2k)}(x) + A\cos x + B\sin x$
4. $y : x \mapsto 2\cos 2x + \sin 2x + e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

206
- – On commence par écrire que pour tout $x > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence
  $$x = e^t \iff t = \ln x$$
  - Suivant la méthode exposée en cours, on pose z une fonction inconnue qui dépend de la variable t telle que $\forall x > 0, y(x) = z(t) = z(\ln(x))$.
    En dérivant par rapport à x chaque membre de l'égalité $y(x) = z(\ln x)$, on trouve:
    $y'(x) = \dfrac{1}{x}.z'(\ln x)$ puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln x)$
    Ce qui donne $z'(t) = xy'x)$ et $x^2y''(x) = -z'(t) + z''(t)$
    En remplaçant cela donne $z''(t) + z(t) = \sin(\alpha t)$
  - On peut aussi, toujours suivant la méthode exposée en cours,
    écrire que $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(x) = y(e^t)$ puis dériver par rapport à t.
    Cela donne $z'(t) = e^t y'(e(t)$ et $z''(t) = e^t.y'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$
    C'est à dire $z'(t) = xy'(x)$ et $z''(t) = xy'(x) + x^2y''(x)$

- $\boxed{\text{résolution de l'équation différentielle } z''(t) + z(t) = \sin(\alpha t) \text{ sur } \mathbb{R}.}$
  - équation sans second membre: On trouve $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = A\cos(t) + B\sin(t)}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
  - équation avec second membre: On doit distinguer 3 cas.
    i) si $\alpha \neq \pm 1$: il y a comme solution évidente $\boxed{z(t) = \dfrac{\sin(t)}{1-\alpha^2}}$
    ii) si $\alpha = 1$: ou en cherchant une solution de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$ ou en complexifiant l'équation(deux méthodes classiques), on trouve comme solution particulière $\boxed{z(t) = \dfrac{-t}{2}\cos(t}$
    iii) si $\alpha = -1$: on trouve $\boxed{z(t) = \dfrac{t}{2}\cos(t)}$
  - Conclusion: la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $z''(t) + z(t) = \sin(\alpha t)$ est
    i) si $\alpha \neq \pm 1 : \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \dfrac{\sin(t)}{1-\alpha^2}$
    ii) si $\alpha = 1 : \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = A\cos(t) + B\sin(t) - \dfrac{t}{2}\cos(t)$
    iii) si $\alpha = -1 : \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \dfrac{t}{2}\cos(t)$
- Comme $\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x))$ on trouve donc comme solution générale est
  $$\boxed{\forall x > 0, y(x) = \begin{cases} A.\cos(\ln(x)) + B.\sin(\ln(x)) - \dfrac{\ln(x).\cos(\ln(x))}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ A.\cos(\ln(x)) + B.\sin(\ln(x)) + \dfrac{\ln(x).\cos(\ln(x))}{2} & \text{si } \alpha = -1 \\ A.\cos(\ln(x)) + B.\sin(\ln(x)) + \dfrac{\sin(\alpha\ln(x))}{1-\alpha^2} & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

210
1. z satisfait $z'' + z' = 0$ et donc $y = \dfrac{Ae^{-x} + B}{x}$
2. z satisfait $z'' - z = 1$ et donc $y = \dfrac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}$
3. z satisfait $z' - z = 1 - x$
4. z satisfait $xz' = 2xz + z^2$, et u satisfait $u' + 2u = -\dfrac{1}{x}$ EQUATION DONT ON NE PEUT DETERMINER EXPLICITEMENT UNE SOLUTION PARTICULIERE

212 1. $y : x \mapsto x^2(A + B\ln x)$
2. $y : x \mapsto x^3 + x^2(A + B\ln x)$
3. $y : x \mapsto 1/4 + x^2(A + B\ln x)$

213 Soit y l'unique fonction telle que $y(0) = a, y'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + |y(x)| = 0$.
(cette équation n'est pas une équation différentielle linéaire, elle ne rentre donc pas dans le cadre du programme. Cependant l'énoncé précise qu'il existe une et une seule solution définie sur $\mathbb{R}$... et cela suffira à notre résolution)

1. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = -|y(x)| \leqslant 0$, on peut affirmer que la fonction y' est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $y'(0) = 0$, on peut alors affirmer que y' est positive sur $]-\infty,0[$ et négative sur $]0,+\infty[$.
La fonction y présente donc un maximum en 0! Et comme $y(0) = a$, on en déduit bien que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leqslant a}$
2. Cas où $a \geqslant 0$.
D'après la question précédente on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leqslant a \leqslant 0$. La fonction y est négative et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, |y(x)| = -y(x)$.
y vérifie donc sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x) - y(x) = 0$. Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Sa solution générale est $y(x) = A.e^x + B.e^{-x}$.
Avec les conditions initiales on trouve bien une et une seule fonction solution $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a.\operatorname{ch} x \end{array}}$

Dans la suite on suppose que $a > 0$

3. – Comme $y(0) = a > 0$ et que y est continue on peut affirmer qu'il existe un intervalle, qui contient 0, et sur lequel y est positive. Sur cet intervalle I, $|y| = y$ et donc $y'' + y = 0$
   – La solution générale de $y'' + y = 0$ est $y(x) = A.\cos x + B.\sin x$. Et avec les conditions initiales on trouve $y(x) = a.\cos x$ sur cet intervalle I
   – La fonction y s'annule en $\boxed{b_+ = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } b_- = \dfrac{-\pi}{2}}$
4. i) Nous allons déterminer l'expression de $y(x)$ sur $[b_+, +\infty[$.
   – Comme y est décroissante sur $[0, +\infty[$ et que $y(\pi/2) = 0$ on en déduit que y est négative sur $[\pi/2, +\infty[$. L'équation différentielle que y vérifie sur cet intervalle est donc $y'' - y = 0$.
   – La solution générale de cette équation est $y(x) = A.e^x + B.e^{-x}$.
   Comme y est continue est dérivable en $\pi/2$ on a $y(\pi/2) = 0 = A.e^{\pi/2} + B.e^{-\pi/2}$ et $y'(\pi/2) = -a\sin(\pi/2) = -a = A.e^{\pi/2} - B.e^{-\pi/2}$
   En résolvant ce système, on trouve $A = -\dfrac{a}{2}.e^{-\pi/2}$ et $B = \dfrac{a}{2}e^{\pi/2}$.
   On a ainsi $y(x) = \dfrac{a}{2}.e^{\pi/2}.e^{-x} - \dfrac{a}{2}.e^{-\pi/2}.e^x = a\operatorname{sh}(\pi/2 - x)$
   ii) Sur $]-\infty, -\pi/2]$ on utilise le même raisonnement.
   et l'on trouve $y(x) = a.\operatorname{sh}(\pi/2 + x)$
5. Précisons qu'il n'est pas nécessaire de vérifier que les raccordements que nous avons trouvés en $\pm\pi/2$ sont deux fois dérivables! En effet, l'énoncé précise qu'il y a existence (et unicité) de la solution, donc la fonction que nous avons trouvée est forcément la solution (et donc est bien deux fois dérivables en $\pm\pi/2$
Conclusion : la solution est $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\operatorname{sh}(\pi + x) & \text{si } x < -\pi/2 \\ a\cos x & \text{si } x \in [-\pi/2, +\pi/2] \\ a\operatorname{sh}(\pi/2 - x) & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} \end{array}}$

215 1. La fonction q est la somme et le produit de fonctions de classe C^1 sur I donc u est C^1 sur I et l'on a

$$u'(x) = q'(x)z^2(x) + 2q(x)z'(x)z(x) + 2z'(x)z''(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(z''(x) + q(x)z(x)) = q'(x)z^2(x)$$

Comme la fonction q est décroissante sur I, on a $q'(x) \geqslant 0$ sur I, et en même temps on a bien sûr $z^2(x) \geqslant 0$.
On a $\forall x \in I, q'(x) \leqslant 0$: c'est à dire que $\boxed{q \text{ est décroissante sur } I}$

2. – La fonction u étant décroissante sur I, on a $\forall x \geqslant 1, u(x) \leqslant u(1)$,
   c'est à dire $q(x)z^2(x) + (z'(x))^2 \leqslant u(1)$
   – comme $(z'(x))^2 \geqslant 0$ et $q(x) \geqslant q_0$ sur I, on en déduit que $q_0 z^2(x) \leqslant u(1)$ sur I, et comme $q_0 > 0$ en divisant chaque membre de l'inégalité on obtient $z^2(x) \leqslant \dfrac{u(1)}{q_0}$
   – On en déduit que $\forall x \in I, |z(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{u(1)}{q_0}}$. Ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction } z \text{ est bornée sur } I}$
3. (a) Par dérivation, on trouve que $y' = \dfrac{z'}{\sqrt{x}} - \dfrac{z}{2}x^{-3/2}$ et $y'' = \dfrac{z''}{\sqrt{x}} - \dfrac{z'}{x^{3/2}} + \dfrac{3/4z}{x^{5/2}}$
   et en remplaçant cela donne $\boxed{z'' + \left(1 + \dfrac{1}{4x^2}\right) z = 0}$
   (b) Il s'agit de bien vérifier que l'on est dans les hypothèses suffisantes pour appliquer la question 2.
   – Notons q la fonction définie sur I par $q(x) = 1 + \dfrac{1}{4x^2}$
   – La fonction q est de classe C^∞ sur I, donc a fortiori C^1, et $\forall x \geqslant 1, q'(x) = \dfrac{-1}{2x^3} < 0$.
   Donc la fonction q est décroissante sur I
   – On a également $\forall x \in I, q(x) \geqslant 1$. (existence de $q_0 > 0$ tel que ...)
   – On a bien vérifiée toutes les hypothèses, on peut affirmer que la fonction z est bornée sur I d'après la question 2: c'est à dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |z(x)| \leqslant M$
   – On a donc prouvé que $\exists M > 0, \forall x \in I, |\sqrt{x}.f(x)| \leqslant M$, ce qui revient à dire

$$\boxed{\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{x}}}$$

222 1. $\varphi(X^k) = k^2 X^k$, donc $n+1$ vp distinctes...
2. tout polynôme appartient à un certain $\mathbb{R}_n[X]$
3. on résout l'équation d'Euler $x^2 f''(x) + xf'(x) - \lambda f(x) = 0$, on pose donc classiquement $x = e^t$ et $f(x) = g(t)$, on a alorq $g''(t) - \lambda g(t) = 0$

223 1. $\forall n \geqslant 0, (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ et $y(x) = \exp(-x^2/2)$
2. $2a_2 - 2a_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 1, (n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n = 0$ et $y(x) = a_0 + a_1 x + (a_0+1)x\arctan x)$

228 – $\forall n \geqslant 0, (n+1)(n-1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0$
– $y(x) = (a_0 - 2a_2) + (2a_2 - a_0)x + 2a_2 e^{-x}$

229 – $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, (n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1} = 0$
– $y(x) = a_3 x^3 + a_4 x^3(e^x - 1)$

230 – $y(x) = a_2 x\ln(1+x)$