PT* 25/26 - DM 4 - à rendre le jeudi 27 novembre (au maximum)

On définit $\varphi$ sur $\mathbb{R}[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$
c'est-à-dire que $\varphi(P)$ est le polynôme dérivé du polynôme $(X^2-1)P'$.

## Préliminaire

1.(a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

1.(b) Calculer $\varphi(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pourra traiter séparément le cas $n = 0$.

## Partie 1 : Polynômes de Legendre

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n(X) = (X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad P_n(X) = U_n^{(n)}(X).$$

On rappelle que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée $n$-ème du polynôme $P$. On remarque que $U_0(X) = P_0(X) = 1$.

2. Calculer $P_1$ et $P_2$.
3. Déterminer le degré de $U_n$ puis celui de $P_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que
   $$(X^2-1)U_n' = 2nXU_n. \tag{E}$$
   (b) Rappeler la formule de Leibniz exprimant la dérivée $p$-ème d'un produit de deux polynômes, pour $p \in \mathbb{N}$.
   (c) En dérivant $n+1$ fois l'égalité (E), montrer que :
   $$\varphi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

## Partie 2 : Étude d'un endomorphisme induit

Dans cette question, on fixe un entier naturel non nul $N$.

5. Montrer que $\mathbb{R}_N[X]$ est stable par $\varphi$.
   On note alors $\varphi_N$ l'endomorphisme induit par $\varphi$ sur $\mathbb{R}_N[X]$. Autrement dit
   $$\varphi_N : \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}_N[X] \\ P \longmapsto \varphi(P). \end{cases}$$
6. Écrire la matrice $M_N$ représentative de $\varphi_N$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. Quelle est la taille de cette matrice ?
7. Déterminer les valeurs propres de $\varphi_N$. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
8. En utilisant la partie précédente, déterminer les sous-espaces propres de $\varphi_N$.
9. On souhaite déterminer l'ensemble des valeurs propres de $\varphi$.
   (a) On suppose que $\lambda$ est une valeur propre de $\varphi$ et $P$ un vecteur propre associé.
   Justifier qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $P \in \mathbb{R}_N[X]$.
   En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}, \lambda = n(n+1)$
   (b) En déduire le spectre de $\varphi$

## Correction de l'extrait du problème : BANQUE PT 2025 A

# Préliminaire

1.(a) Il y a **deux** propriétés à vérifier.

- Montrons que $\varphi$ est une application linéaire.
  Soient $(P_1,P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Notons $P_3 = \lambda.P_1 + P_2$.
  Par **linéarité de la dérivation**, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\varphi(P_3) &= \left((X^2-1)P_3'\right)' \\
&= \left((X^2-1)(\lambda P_1 + P_2)'\right)' \\
&= \left((X^2-1)(\lambda P_1' + P_2')\right)' && \textit{linéarité de la dérivation} \\
&= \left(\lambda(X^2-1)P_1' + (X^2-1)P_2'\right)' && \textit{on distribue} \\
&= \lambda.\left((X^2-1)P_1'\right)' + \left((X^2-1)P_2'\right)' && \textit{linéarité de la dérivation} \\
&= \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)
\end{aligned}$$

- Montrons que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[X]$.
  Je propose deux solutions.
  1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
     Comme la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on a $P' \in \mathbb{R}[X]$.
     Comme le produit deux polynômes est un polynôme, on a $(X^2-1).P' \in \mathbb{R}[X]$.
     Comme la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$

     On a prouvé que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$, càd $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}[X]$

  2. On sait que $\mathbb{R}[X]$ est un ensemble (un ev même) **stable par produit interne et par dérivation**, donc $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}[X]$.

1.(b)
- $\varphi(1) = 0$
- Soit $n \geqslant 1$

$$\varphi(X^n) = (n.(X^2-1).X^{n-1})' = (n.X^{n+1} - n.X^{n-1})' = n.(n+1).X^n - n.(n-1).X^{n-2}$$

*rem: on remarque que pour $n = 0$ cette formule est encore valable.*

# Partie 1

2.
- $P_1(X) = U_1'(X) = (X^2-1)' = 2X$
- $P_2(X) = U_2''(X) = \left((X^2-1)^2\right)'' = (X^4 - 2X^2 + 1)'' = 12X^2 - 4$

3.
- Soit $n \geqslant 1$.
  On a $\deg U_n = 2n$, **et donc en dérivant** $n$ **fois**, $\deg P_n = 2n - n = n$.
- On a $\deg P_0 = \deg 1 = 0$
- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(X^2-1).U_n' = (X^2-1).n.2X.(X^2-1)^{n-1} = 2n.X.(X^2-1)^n = 2n.X.U_n \qquad (E)$$

(b) Soient $A$ et $B$ deux polynômes.

$$(A.B)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{(k)}\, B^{(p-k)}$$

(c) On suit l'indication de l'énoncé, et on va tenir compte que :
$\forall k \geqslant 3, (X^2-1)^{(k)} = 0$ et $\forall k \geqslant 2, X^{(k)} = 0$.
En dérivant $n+1$ fois chaque membre de l'égalité (E), on obtient donc successivement

$$\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1}(X^2-1)U_n^{(n+2)} + \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{=n+1}(X^2-1)'U_n^{(n+1)} + \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}(X^2-1)''U_n^{(n)}$$

$$= 2n\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1}XU_n^{(n+1)} + 2n\underbrace{\binom{n+1}{1}}_{=n+1}X'U_n^{(n)},$$

et comme $U_n^{(n)} = P_n \qquad U_n^{(n+1)} = P_n' \qquad U_n^{(n+2)} = P_n'' \qquad ,$

$$(X^2-1)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n = 2nXP_n' + 2n(n+1)P_n.$$

Après simplification,

$$(X^2-1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

5. 
   - Nous savons déjà que $\varphi$ est une application linéaire, ce qui assure que $\varphi_N$ est déjà une application linéaire.
   - Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(\varphi_N) \subset \mathbb{R}_N[X]$.
     Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$.
     On sait déjà que $\varphi(P)$ sera un polynôme; reste à montrer que son degré est inférieur ou égal à $N$.
     Notons $d = \deg(P) \leqslant N$.
     On a
     $$\deg((X^2-1).P') = 2 + (d-1) = d+1$$
     et donc
     $$\deg \varphi_N(P) = ((X^2-1)')' = d \leqslant N$$
     Conclusion: $\boxed{\varphi_N \text{ est un bien endomorphisme de } \mathbb{R}_N[X]}$
     *rem: On aurait pu aussi prouver que* $\mathrm{Im}(\varphi_N) \subset \mathbb{R}_N[X]$ *en considérant*
     $\mathrm{Im}(\varphi_N) = \mathrm{vect}(\varphi(1), \varphi(X), \ldots, \varphi(X^n))$ *et en calculant chacune de ces images comme on le fera ci-dessous*

6. Pour tout $k \in [\![0,N]\!], \varphi_N(X^k) = k.(k+1).X^k - k.(k-1).X^{k-2}$.

$$M = \mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^N)}(\varphi_N)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -N(N-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & N(N+1) \end{pmatrix}$$

La matrice sera carrée d'ordre $n+1$.

7. **La matrice $M$ est triangulaire: on sait que les valeurs propres comptées avec leur multiplicité de $\varphi_N$ sont les coefficients diagonaux de $\varphi_N$.**

$$\boxed{sp(\varphi_N) = \{\lambda_p = p.(p+1) \,|\, p \in [\![0,N]\!]\}}$$

Avant d'affirmer que $\varphi_N$ possède $N+1$ valeurs propres distinctes, **nous allons effectivement vérifier que celles-ci sont bien distinctes!**

Soient $(p,q) \in [\![0,N]\!]$ tels que $\lambda_p = \lambda_q$.

$$\begin{aligned}\lambda_p = \lambda_q &\iff p^2 + p - q^2 - q = 0\\ &\iff (p-q)(p+q+1) = 0\\ &\iff p = q \text{ ou } q = -1-p\end{aligned}$$

Or l'égalité $q = -1-p$ est impossible car on aurait $q \leqslant -1$.
On a donc bien nécessairement $p = q$

*rem: il était également possiblement d'étudier la fonction* $x \mapsto x(x+1)$ *et de vérifier qu'elle est strictement monotone sur l'intervalle* $[0,N]$

Comme $\varphi_N$ possède $N+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim \mathbb{R}_N[X] = N+1$, on peut dire d'après **la condition suffisante de diagonalisabilité** que $\varphi_N$ est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est de dimension un.

8. Soit $p \in [\![0,N]\!]$.
   On sait que $E_p(\varphi_N)$ est **une droite vectorielle** d'après la question précédente, et que $P_p$ est un vecteur non nul qui appartient à cette droite d'après Q4c), on en déduit que

$$E_p(\varphi_N) = \mathrm{vect}(P_p)$$

9. (a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$ et $P$ **un vecteur propre de** $\varphi$ **associé**.
   - $P$ étant un polynôme NON nul, il possède un degré $d \in \mathbb{N}$.
     Notons $N = d+1$.
     On sait alors que $P \in \mathbb{R}_N[X]$ et $N \geqslant 1$.
     On a bien montré $\boxed{\exists N \geqslant 1, P \in \mathbb{R}_N[X]}$.
   - Ainsi $P$ est un polynôme non nul de $\mathbb{R}_N[X]$ qui vérifie $\varphi_N(P) = \varphi(P) = \lambda.P$.
     $P$ est donc **un vecteur propre de** $\varphi_N$ **également** et donc $\lambda$ est une valeur propre de $\varphi_N$ !
     Ceci permet d'affirmer qu'il existe $n \in [\![0,N]\!]$ tel que $\lambda = n(n+1)$,
     et donc a fortiori $\exists\, n \in \mathbb{N}, \lambda = n(n+1)$

   (b) Pour être rigoureux, on va procéder par double inclusion!
   - La question précédente a justifié que $\boxed{sp(\varphi) \subset \{n(n+1) \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$
   - A' la question 4c), on a montré que tous les nombres de la forme $n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ étaient des valeurs propres de $\varphi$, càd que $\boxed{\{n(n+1) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset sp(\varphi)}$

   Conclusion: $\boxed{sp(\varphi) = \{n(n+1) \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$

*Commentaires sur cette question:*

- *La différence entre* $\varphi$ *et* $\varphi_N$ *? Le premier est un endomorphisme d'un espace de **dimension infinie** (et donc il n'y a pas de notion de polynôme caractéristique pour* $\varphi$*) alors que le second est un endomorphisme d'un espace de **dimension finie**.*
- *Un polynôme* $P$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *étant **fixé**, il appartient à un certain* $\mathbb{R}_N[X]$*. C'est cela qui permet de faire le lien entre les éléments propres de* $\varphi$ *et ceux de* $\varphi_N$