PT* 25/26 - DM 3
à rendre le jeudi 13 novembre

Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites *unipotentes* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.
   On considère les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (b) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (c) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, et (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer trois vecteurs non nuls e_1 , e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
   $$f(e_1) = e_1 \qquad f(e_2) = 2e_1 + e_2 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$
   On pourra utiliser la question précédente
   (d) Justifier que (e_1,e_2,e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$
   (e) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$
2. Etude de $\mathcal{N}$
   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par le produit interne.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$
3. Etude de $\mathcal{U}$
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit
   (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par
$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2$$
On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances
   (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ où B est la matrice définie à la question 1
   (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$
   (c) Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \qquad \text{et} \qquad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$
   (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n \text{ fois}}$
   (e) Retrouver $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
   (f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$
5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique?
   (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D

Exercice 2: facultatif (à ne faire que si l'exercice 1 est parfaitement fait!)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Pour tout couple de réels (λ,μ) on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda.t + \mu^2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda.t + \mu \end{array}}$
On note $F = \{f_{\lambda,\mu} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{g_{\lambda,\mu} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F n'est pas un sev de E

2. (a) Montrer que G est un sev de E
   (b) On considère $e_1 = g_{1,0}$ et $e_2 = g_{0,1}$
      i. Justifier que (e_1,e_2) est une base de G
      ii. Donner $\dim G$
      iii. Montrer que G est stable par la loi $\circ$

Correction de l'exercice I : BANQUE PT 2023 A

1. (a) La résolution du système donne $\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

   rem: l'énoncé précisait que l'inconnue était X, il fallait donc donner une réponse avec X

   (b) La résolution du système donne $\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

   (c) Notons $\mathcal{C} = (i,j,k)$.
   On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Nous allons déterminer successivement e_1,e_2,e_3

   - Notons $X_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1)$.
     On a
     $$f(e_1) = e_1 \Longleftrightarrow AX_1 = X_1$$
     A l'aide de Q1(a), on peut choisir (par exemple) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

     ce qui correspond à $\boxed{e_1 = i + j + k}$
   - Notons $X_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_2)$.
     On a
     $$f(e_2) = 2e_1 + e_2 \Longleftrightarrow AX_2 = 2X_1 + X_2 \Longleftrightarrow AX_2 - X_2 = 2X_1 \Longleftrightarrow (A - I)X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
     A l'aide de Q1(b), on peut choisir (par exemple) $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

     ce qui correspond à $\boxed{e_2 = i + k}$
   - Notons $X_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_3)$.
     On a
     $$f(e_3) = -2e_2 + e_3 \Longleftrightarrow AX_3 = -2X_2 + X_3 \Longleftrightarrow AX_3 - X_3 = -2X_2 \Longleftrightarrow (A - I)X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
     Ce qui donne le système $\begin{cases} -2x_3 - 2y_3 + 4z_3 & = -2 \\ -2y_3 + 2z_3 & = 0 \\ -2x_3 - 2y_3 + 4z_3 & = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3 & = 1 + z_3 \\ y_3 & = z_3 \end{cases}$

     On peut choisir par exemple $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

     ce qui correspond à $\boxed{e_3 = i}$

   (d) On peut vérifier que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ en calculant son déterminant dans la base (i,j,k).
   On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

   Ceci nous assure que $\boxed{(e_1,e_2,e_3) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}^3}$

(e) Nous allons utiliser **la formule de changement de base pour les endomorphismes**.
En notant P la matrice de passage de la base (i,j,k) à la base (e_1,e_2,e_3), on a

$$\mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(f) = P.\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f).P^{-1}$$

Or $\mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(f) = A$ et $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

On a donc $A = PBP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{a.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_1} + b.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_2} + c.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \mathrm{vect}(M_1,M_2,M_3)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathcal{N}$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont une famille génératrice de $\mathcal{F} = (M_1,M_2,M_3)$

Montrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_3$
On a donc

$$a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = b = c = 0$.
On vient de prouver que (M_1,M_2,M_3) est une famille libre.

Conclusion : $\boxed{(M_1,M_2,M_3) \text{ est une base de } \mathcal{N}, \text{ et donc } \dim \mathcal{N} = 3}$

(b) Soit $(M,N) \in \mathcal{N}^2$.
Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Le produit matriciel donne $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
et donc on a bien $NM \in \mathcal{N}$
$\boxed{\text{Conclusion: } \mathcal{N} \text{ est stable par le produit interne}}$

(c) Le calcul matriciel donne $N^3 = 0_3$

3. (a) $\mathcal{U}$ ne peut pas être un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car la matrice nulle 0_3 (qui est le vecteur nul de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) n'appartient pas à $\mathcal{U}$
On pouvait aussi indiquer que si $M \in \mathcal{U}$ alors $2M \notin \mathcal{U}$ (car les coefficients diagonaux sont alors égaux à 2)

(b) Soit $(M,N) \in \mathcal{U}$

Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le produit matriciel donne $NM = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & b+b'+ac' \\ 0 & 1 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On reconnait bien une matrice de $\mathcal{U}$ (*car les coefficients au-dessus de la diagonale sont bien des réels en tant que somme/produit de réels!*)

(c) Pour toute matrice $M \in \mathcal{U}$, on a $\det(M) = 1 \neq 0$, ce qui prouve que M est inversible.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$

4. (a) On a $B = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$.

On a donc pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B^{(\alpha)} &= I + \alpha.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= I + \alpha.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Soit $U = I + N$ avec $N \in \mathcal{N}$

On a ainsi

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

- D'après Q2(b), comme $N \in \mathcal{N}$ on a $N^2 \in \mathcal{N}$
- D'après Q2(a), comme $\mathcal{N}$ est un sev, on peut donc dire que $N_1 = \alpha N + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$

On peut donc affirmer que $U^{(\alpha)} = I + N_1$ avec $N_1 \in \mathcal{N}$, et donc que $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$

rem: on pouvait aussi prendre des coefficients inconnus pour N et effectuer le calcul pour connaître les 9 coefficients de $U^{(\alpha)}$ et ensuite constater que c'était bien une matrice de $\mathcal{U}$

(c) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a d'une part

$$\begin{aligned} U^{(\alpha+\beta)} &= I + (\alpha+\beta)N + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} N^2 \\ &= I + (\alpha+\beta)N + \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\alpha-\beta)N^2 \end{aligned}$$

et d'autre part en développant

$$\begin{aligned}
U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)\left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2\right) \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \frac{1}{2}(\alpha\beta + \alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1))N^2 + 0_3 \qquad \textit{car } N^3 = N^4 = 0_3 \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha - \beta)N^2
\end{aligned}$$

on a bien prouvé la première égalité demandée $\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}}$

Passons à la preuve de la seconde.
On a

$$U^{(\alpha)} = I + \underbrace{\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2}_{=N_1 \in \mathcal{N}}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)})\right)^{(\beta)} &= (I + N_1)^{(\beta)} \\
&= I + \beta N_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N_1^2 \\
&= I + \beta\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right) \\
&\quad + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2 \\
&= I + \beta\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2N^2 + 0 \ \textit{car } N^3 = N^4 = 0 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1) + \alpha^2\beta(\beta-1)}{2}N^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta}{2}N^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2 \\
&= U^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}$$

(d) Nous allons procéder par récurrence.
On note $\mathcal{P}_n$: " $U^{(n)} = U^n$ " pour $n \geqslant 1$
Soit $U = I + N$ avec $N \in \mathcal{N}$

- **initialisation**: $\mathcal{P}_1$ est vrai.
  En effet, On a par définition

$$U^{(1)} = I + 1.N + \frac{1(1-1)}{2}N^2 = I + N = U = U^1$$

- **hérédité**: on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé.
  On a donc $U^{(n)} = U^n$ et on a à peine vu que $U^{(1)} = U^1$.
  On peut donc écrire d'après Q4(c)

$$U^{(n+1)} = U^{(n)}.U^{(1)} = U^n.U = U^{n+1}$$

  on a donc prouvé que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant 1, U^{(n)} = U^n$

(e) Soit $n \geqslant 2$.
Comme I et N commutent (précision indispensable), on peut d'après le binôme de Newton écrire

$$U^n = (I+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}.N^k$$

Comme pour tout $k \geqslant 3$ on a $N^k = 0$, on en déduit que

$$U^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} I^{n-k}.N^k = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = U^{(n)}$$

- cas $n = 0$:
  Par convention, on a $U^0 = I$.
  Par ailleurs $U^{(0)} = I + 0.N + \dfrac{0(0-1)}{2} N^2 = I$
  donc la formule est vraie pour $n = 0$ aussi
- cas $n = 1$:
  On a $U^1 = U = I + N$.
  Par ailleurs $U^{(1)} = I + 1.N + \dfrac{1(1-1)}{2} N^2 = I + N = U$
  donc la formule est vraie pour $n = 1$ aussi

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U^{(n)} = U^n}$

(f) *Nous allons montrer que $U^{(-1)}.U = U.U^{(-1)} = I$, ce qui permettra de dire que $U^{(-1)}$ est l'inverse de U*
Comme $U = U^{(1)}$ et $I = U^{(0)}$ on a d'après Q4(c)

$$U^{(-1)}.U = U^{(-1)}.U^{(1)} = U^{(-1+1)} = U^{(0)} = I$$

et

$$U.U^{(-1)} = U^{(1)}.U^{(-1)} = U^{(1-1)} = U^{(0)} = I$$

ce qui permet d'affirmer que U est inversible (ce que l'on savait déjà) et que $\boxed{U^{-1} = U^{(-1)}}$

5. (a) Je propose deux solutions

- première solution: sans calcul quasiment
  Notons $C = B^{(1/2)}$.
  D'après Q4c), on a

  $$C^2 = B^{(1/2)}.B^{(1/2)} = B^{(1)}$$

  et d'après Q4e) $B^{(1)} = B^1 = B$.
  Ainsi

  $$C^2 = B \text{ avec } C = B^{(1/2)}$$

  Reste à calculer C

  $$C = B^{(1/2)} = I + \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1/2(1-1/2)}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice n'est pas unique car par exemple $C' = -C$ vérifie aussi $(C')^2 = B$
- seconde solution: plus calculatoire
  On a $B = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On cherche C sous la forme $C = I + N_1$ avec $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $C^2 = C^{(2)} = I + 2N_1 + N_1^2 = I + \begin{pmatrix} 0 & 2a & ab+c \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que

$$C^2 = B \iff \begin{pmatrix} 0 & 2a & ab+2c \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a & = 2 \\ 2b & = -1 \\ ab+2c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -1 \\ c & = 1/2 \end{cases}$$

Conclusion: $\boxed{\text{la matrice } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } C^2 = B}$

- D'après Q1, on a $A = PBP^{-1}$
  Comme multiplier une égalité par une matrice inversible donne un égalité équivalente, on a
  $$A = D^2 \iff PBP^{-1} = D^2 \iff B = P^{-1}D^2P \iff B = (PDP^{-1})^2$$
  Ainsi si la matrice D vérifie $PDP^{-1} = C$ on aura $A = D^2$
  Il suffit donc de poser $\boxed{D = P^{-1}CP}$

Correction de l'exercice 2

1. Considérons $f_{2,1} \in F$.
   Nous allons montrer que $-2.f_{2,1} \notin F$ ce qui prouvera que F N'est PAS stable par combinaison linéaire.
   Notons $g = -2.f_{2,1}$.
   On a
   $$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = -2.(2.t + 1^2.t) = -4.t + (-2)$$
   Or -2 ne peut s'écrire μ^2 avec $\mu \in \mathbb{R}$ (car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul).
   Ainsi il n'existe pas $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-2.f_{2,1} = f_{\lambda,\mu}$!
2. (a) Nous allons montrer que G est un sev de E
   - $G \subset E$ par définition de G
   - G est non vide, car la fonction $g_{0,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 0 \end{array}$ appartient à G
   - G est stable par combinaisons linéaires.
     Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,k) \in \mathbb{R}^5$.
     On va montrer que $k.g_{\lambda_1,\mu_1} + g_{\lambda_2,\mu_2} \in G$.
     Notons f cette fonction,
     Soit $t \in \mathbb{R}$, on a
     $$\begin{aligned} f(t) &= k.g_{\lambda_1,\mu_1}(t) + g_{\lambda_2,\mu_2}(t) \\ &= k.(\lambda_1.t + \mu_1) + (\lambda_2.t + \mu_2) \\ &= k.(\lambda_1 + \lambda_2).t + k.\mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$
     Notons λ_3 et μ_3 les réels $\lambda_3 = k.(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\mu_3 = k.\mu_1 + \mu_2$
     On vient de montrer que
     $$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda_3.t + \mu_3 = g_{\lambda_3,\mu_3}(t)$$
     ce qui permet d'affirmer que $f = g_{\lambda_3,\mu_3} \in G$

   (b) i. • On a $\boxed{e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array}}$ et $\boxed{e_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 \end{array}}$.

- Pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{\lambda,\mu}(t) = \lambda.t + \mu = \lambda.e_1(t) + \mu.e_2(t)$$

On en déduit donc que

$$f_{\lambda,\mu} = \lambda.e_1 + \mu.e_2$$

Ainsi

$$F = \{\lambda.e_1 + \mu.e_2 \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(e_1,e_2)$$

ceci prouve que $\mathcal{G} = \{e_1,e_2\}$ est une famille génératrice de G
- Montrons que $\mathcal{G}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda.e_1 + \mu.e_2 = 0$.
On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda.e_1(t) + \mu.e_2(t) = \lambda.t + \mu.1 = 0$$

En particulier pour $t = 0$, cela donne $\mu = 0$
Puis pour $t = 1$, on obtient $\lambda + \mu = 0$.
Au final, on a bien montré que $\lambda = \mu = 0$
- Conclusion : $\boxed{\mathcal{G} = \{e_1,e_2\} \text{ est une base de } G}$

ii. La dimension d'un ev étant égale au cardinale d'une base, $\boxed{\dim G = 2}$

iii. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^4$.
On a pour tout t réel

$$\begin{aligned}(g_{\lambda_1,\mu_1} \circ g_{\lambda_2,\mu_2})(t) &= g_{\lambda_1,\mu_1}(g_{\lambda_2,\mu_2}(t))\\ &= g_{\lambda_1,\mu_1}(\lambda_2.t + \mu_2)\\ &= \lambda_1.(\lambda_2.t + \mu_2) + \mu_1\\ &= \lambda_1.\lambda_2.t + \lambda_1.\mu_2 + \mu_1\end{aligned}$$

En notant $\lambda_3 = \lambda_1.\lambda_2$ et $\mu_3 = \lambda_1.\mu_2 + \mu_1$, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, (g_{\lambda_1,\mu_1} \circ g_{\lambda_2,\mu_2})(t) = g_{\lambda_3,\mu_3}(t)$$

ce qui permet d'affirmer que

$$g_{\lambda_1,\mu_1} \circ g_{\lambda_2,\mu_2} = g_{\lambda_3,\mu_3}$$

On a bien prouvé que G est stable par la loi $\circ$