PT* 2025-26
DS 1 du 22 septembre 2025: 4H

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte *(extrait de rapport de jury)*

- L'usage de tout matériel électronique est interdit.

- Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.

- Il est normal que ce sujet vous semble long; un sujet de concours l'est souvent. L'important à la fin des 4 heures est d'avoir répondu à toutes les questions que vous savez traitées: il ne faut donc par trop passer de temps sur une question qui résiste en début d'épreuve. Il est possible aussi que des questions en fin de problème ou exercice soient assez simples ou classiques.

EXERCICE 1

On considère $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{9}$.
On note I l'intervalle $]0,\dfrac{1}{2}[$.

On définit une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0, x_{n+1} = f(x_n)$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède, sur l'intervalle I, une unique solution.
   On la notera α dans la suite de l'énoncé

2. Justifier que tous les termes de la suite (x_n) sont dans l'intervalle I.

3. En utilisant un théorème dont on rappellera l'énoncé complet, justifier qu'il existe une constante réelle $k \in]0,1[$ telle que $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|x_n - \alpha|$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{k^n}{2}$

5. La suite (x_n) est-elle convergente? Si oui, vers quelle limite?

EXERCICE 2

On pose pour tout x réel $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$

Partie I: étude de la fonction g sans la déterminer explicitement

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner g'.

2. Etudier le signe de g'

3. La fonction g est-elle paire ou impaire? Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?

4. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t^2+7}} \leqslant \dfrac{\sqrt{7}}{t^2}$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 3$

5. Dessiner l'allure de la courbe

Partie II: calcul de la fonction g

1. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle y est dérivable, et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. (a) En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{7}.\theta$, une expression de $g(x)$ en fonction de h
   (b) A l'aide de cette expression retrouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 3$

3. Calculer pour tout x réel $h(\operatorname{sh} x)$ et $\operatorname{sh}(h(x))$.
   Qu'en déduisez-vous sur la fonction h?

PROBLEME

Ce problème est constitué de 4 parties largement indépendantes.

Dans la suite, on considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t} dt$

Partie I: étude de la suite (a_n)

1. Calculer a_0
2. Montrer que la suite (a_n) est une suite décroissante.
3. Montrer que $\lim a_n = 0$
4. A l'aide d'un intégration par parties, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1).a_n - a_{n+1}$ est une constante que l'on déterminera.
5. En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n}$

Partie II: une utilisation de la suite (a_n)

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $a_n = \dfrac{n!}{e}\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$
2. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{k!}$ est convergente et donner sa limite.
3. Justifier que lorque n tend vers l'infini, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e + o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$

Partie III: série de terme général $(-1)^n.a_n$

Dans cette partie , on note

- $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t} dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k.a_k$

1. Justifier que l'intégrale I existe
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I - S_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt$
3. En déduire que $\lim S_n = I$. Que vient-on de prouver?

Partie IV: recherche d'un équivalent d'une somme partielle

1. (a) A l'aide de la question 4 de la partie I, exprimer a_n en fonction de n et de a_{n+2} pour $n \in \mathbb{N}$

   (b) En déduire qu'il existe deux constantes K et L (que l'on déterminera) telles que

   $$a_n = \frac{K}{n} + \frac{L}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \qquad \textit{(on devra trouver } (K,L) = (e^{-1},0))$$

   Que peut-on dire de la série de terme général a_n? de celle de terme général $a_n - \dfrac{e^{-1}}{n}$?

   (c) Après avoir rappelé la définition de $o(\dfrac{1}{n^2})$, montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

   $$\forall n \geqslant N,\ -\frac{1}{n^2} \leqslant a_n - \frac{e^{-1}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

   $$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad , \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   (a) une majoration de la suite (C_n)

      i. Expliquer pourquoi la suite (C_n) est majorée.

      ii. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $C_n - 1 \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$

      iii. En déduire que $\forall n \geqslant 1, C_n \leqslant 2$

   (b) un encadrement de la suite (B_n)

      i. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$

      ii. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\quad \ln n \leqslant B_n \leqslant 1 + \ln n$

   (c) la détermination d'un équivalent de A_n

      i. A l'aide de la question 1(c) de cette partie, montrer qu'il existe deux réels M_1 et M_2 tels que pour tout n assez grand

      $$-C_n + M_1 \leqslant A_n - e^{-1}.B_n \leqslant C_n + M_2$$

      ii. En déduire que $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}.\ln n.$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1

1. Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9} \end{array}}$
   - La fonction g est une fonction polynomiale donc dérivable sur I et
   $$\forall x \in I, g'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.(x^2 - 1) < 0$$
   - La fonction g est continue et strictement décroissante sur I, elle réalise donc **d'après le théorème de la bijection**, une bijection de I sur $g(I) =]g(\frac{1}{2}, g(0)[=] - \frac{1}{24}, \frac{1}{9}[$
   - Comme $0 \in g(I)$, on en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in I \text{ tel que } g(\alpha) = 0 \text{ càd } f(\alpha) = \alpha}$
2. $\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{3} > 0.$
   La fonction f est strictement croissante et continue sur I,
   et l'on a donc $f(I) = f(]0,1/2[) =]f(0), f(1/2)[=]\frac{1}{9}, \frac{11}{24}[\subset]0,1/2[= I.$
   On vient de montrer que I **est un intervalle stable par** f.

   $\boxed{\text{Comme } x_0 \in I \text{ et que } I \text{ et stable par } f, \text{ on sait que } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I}$
3. On va utiliser **l'inégalité des accroissement finis sur l'intervalle** I dont je rappelle l'énoncé
   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
   telle qu'il existe une constante k telle que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant k$.
   On a alors $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y$'

   On a ici $\forall x \in I, |f'(x)| = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{(1/2)^2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{4}.$
   On peut donc affirmer que
   $$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}.|x - y|$$
4. - Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Comme $x_n \in I$ et $\alpha \in I$ *(il est indispensable de rappeler ceci pour utiliser la question précédente!)*, on peut écrire $|f(x_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4}.|x_n - \alpha|$ ce qui donne bien $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}.|x_n - \alpha|$
   - On peut procéder par récurrence.
     initialisation:
     Comme $x_0 \in]0,1/2[$ et $\alpha \in]0,1/2[$, on a $|x_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} = \dfrac{(3/4)^0}{2}$
     hérédité: elle est quasiment immédiate
5. - On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{(3/4)^n}{2}.$
     Comme $\lim (3/4)^n = 0$, on en déduit que $\lim x_n = \alpha$.
     Conclusion: $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } \alpha}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Partie 1

1. - Notons $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 7}}$.
     La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
     On sait alors que f possède des primitives sur $\mathbb{R}$: notons F l'une d'elles.
     (On a donc $F' = f$ et F est C^1 sur $\mathbb{R}$)
   - D'après **le théorème fondamental du calcul intégral**, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x)$ existe et l'on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = F(3x) - F(x)$$
     Par différence de fonctions C^1, on a
     i) $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$
     ii) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3f(3x) - f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 + 7}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}}$
2. En divisant par 3 le premier quotient cela donne
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7/9}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}} > 0$$
   En effet, le dénominateur du premier quotient est plus petit que celui du second
3. - Soit $x \in \mathbb{R}$.
     On effectue le changement de variable C^1 $\theta = -t$ (et donc $d\theta = -dt$)
   $$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 7}} = \int_{x}^{3x} \frac{-d\theta}{\sqrt{(-\theta)^2 + 1}} = -\int_{x}^{3x} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} = -g(x)$$
     $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est impaire}}$
   - $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ (normal pour une fonction impaire!)
   - $g'(0) = \dfrac{3}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ d'après l'expression précédente
4. (a) Le plus simple était d'utiliser la quantité conjuguée
   Pour $t > 0$ fixé, on a
   $$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 7}} = \frac{\sqrt{t^2 + 7} - t}{t.\sqrt{t^2 + 7}} = \frac{(\sqrt{t^2 + 7})^2 - t^2}{t.\sqrt{t^2 + 7}.(\sqrt{t^2 + 7} + t)} = \frac{7}{t.\sqrt{t^2 + 7}.(\sqrt{t^2 + 7} + t)}$$
   i) Il est clair que cette quantité est positive (strictement même)
   ii) On va majorer ce quotient en minorant deux facteurs du dénominateur
   - $\sqrt{t^2 + 7} \geqslant \sqrt{7}$
   - $\sqrt{t^2 + 7} + t \geqslant t$

   ce qui donne bien
   $$\frac{7}{t.\sqrt{t^2 + 7}.(\sqrt{t^2 + 7} + t)} \leqslant \frac{7}{t.\sqrt{7}.t} = \frac{\sqrt{7}}{t^2}$$

(b) Soit $x > 0$.
D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in [x,3x], 0 \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t^2+7}} \leqslant \frac{\sqrt{7}}{t^2}$$

Ainsi par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{3x} 0.dt \leqslant \int_x^{3x} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t^2+7}}.dt \leqslant \int_x^{3x} \frac{\sqrt{7}}{t^2}.dt$$

ce qui donne

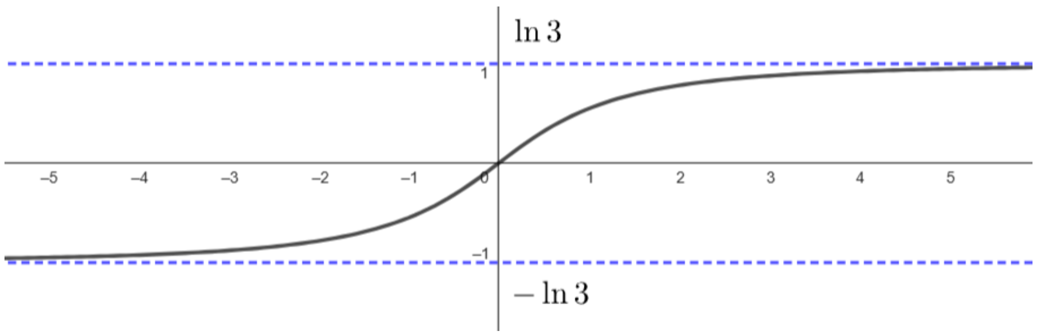
$$0 \leqslant \int_x^{3x} \frac{1dt}{t} - g(x) \leqslant \left[\frac{-\sqrt{7}}{t}\right]_x^{3x}$$

et au final, on a montré que

$$\forall x > 0, 0 \leqslant \ln 3 - g(x) \leqslant \frac{2\sqrt{7}}{3x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{7}}{3x} = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln 3}$

5.
- Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 3$ (et une d'éq. $y = -\ln 3$)
- La droite tangente à l'origine a pour coefficient directeur $g'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$



Partie 2

1. (a) Montrer que h est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   - On a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ donc $\sqrt{x^2+1}$ est bien défini.
   - La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante,
     comme $x^2 + 1 > x^2$, on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$ et donc $\sqrt{x^2+1} + x > 0$.
     ce qui prouve que $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est bien défini

(b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$
(ici il ne suffit pas de dire par les théorème généraux, car la fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable sur son ensemble de définition, il faut donc bien préciser dans la rédaction que 'l'on est jamais avec un zéro sous la racine")
- $f_1 : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable de $\mathbb{R} \to [1, +\infty[$
- la fonction $\sqrt{\ }$ étant dérivable sur $[1, +\infty[$,
  on a par composition la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$
- la fonction $f_3 : x \mapsto x + f_2(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
- Par composition, la fonction $h = \ln \circ f_3$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$
- et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}.2x.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
On effectue le changement de variable $C^1, t = \sqrt{7}.\theta$ (et donc $dt = \sqrt{7}.d\theta$)

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} = \int_{x/\sqrt{7}}^{3x/\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}.d\theta}{\sqrt{7\theta^2+7}} = \int_{x/\sqrt{7}}^{3x/\sqrt{7}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} = \int_{x/\sqrt{7}}^{3x/\sqrt{7}} h'(\theta).d\theta$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h(3x/\sqrt{7}) - h(x/\sqrt{7})$$

(b) On vient de prouver que

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(\frac{3x}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{9x^2}{7}+1}\right) - \ln\left(\frac{x}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{x^2}{7}+1}\right) \\ &= \ln x + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}+\frac{1}{x^2}}\right) - \left[\ln x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{x^2}}\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{3}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}+\frac{1}{x^2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

On a alors par simple composition de limites

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \ln\frac{2.3}{\sqrt{7}} - \ln\frac{2}{\sqrt{7}} = \ln 3$$

3. Ce n'est rien d'autre que le Résolu 26!.
On montre que $\forall x \in \mathbb{R}, h(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh}(h(x)) = x$.
On en déduit que **les fonctions h et sh sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.**
remarque: La fonction réciproque de sh *se note officiellement* argsh *(ou* sh^{-1} *sur les calculatrices). On a montré que* $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

CORRECTION DU PROBLEME

Partie I

1. $a_0 = \int_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n e^{-t}dt - \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1})e^{-t}dt = \int_0^1 t^n(1-t)e^{-t}dt$$
   La fonction $t \mapsto t^n(1-t)e^{-t}$est clairement positive sur le segment [0,1], on en déduit par positivité de l'intégrale que
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n(1-t)e^{-t}dt \geqslant 0$$
   On a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant a_{n+1}$, càd que $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$
3. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$ car $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ et $t^n \geqslant 0$
   Et donc par croissance de l'intégrale, en intégrant sur le segment [0,1] cela nous donne
   $$\int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt, \text{ soit } \boxed{0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$
   Reste alors à utiliser le théorème de convergence par encadrement (ex "des gendarmes") pour en déduire que $\boxed{\lim a_n = 0}$
4. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = e^{-t}$, ce qui donne
   $$(n+1)a_n = \int_0^1 (n+1).t^n.e^{-t}dt = \left[t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 t^{n+1}e^{-t} = e^{-1} + a_{n+1}$$
   On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_n - a_{n+1} = e^{-1}}$ càd $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1})}$
5.
   - Si l'on n'est pas à l'aise avec les équivalents et o,
     on revient à la définition et on forme le quotient
     $$\frac{a_n}{e^{-1}/n} = e.n.a_n = \frac{n}{n+1}(1 + e.a_{n+1})$$
     puis l'on fait tendre $n \to \infty$, et comme $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim a_{n+1} = 0$,
     on trouve que $\lim \frac{a_n}{e^{-1}/n} = 1$ càd $a_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$
   - Si on est à l'aise, on écrit les choses suivantes:
     i) on a $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$
     ii) comme $\lim a_{n+1} = 0$ on a $a_{n+1} = o(e^{-1})$ et donc $e^{-1} + a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}$
     iii) on en déduit que $a_n = \frac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$

   Bref, on a montré que $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}}$

Partie II:

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $a_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
   - **initialisation:** $\mathcal{P}_0$ est vraie.
     En effet on a vu que $a_0 = 1 - e^{-1}$, et l'on a $\frac{0!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - e^{-1}$
   - **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On sait d'après Q.I.4) que $a_{n+1} = (n+1).a_n - e^{-1}$
     On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse de récurrence
     $$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1).a_n - e^{-1} \\ &= (n+1).\frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1} \\ &= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1}.\frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) \end{aligned}$$
     ce qui prouve qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n entier.
2. On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.\frac{a_n}{n!}$.
   On sait d'après Q.I.3) que $\lim a_n = 0$, ce qui permet d'affirmer que $\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.
   On a prouvé que $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{k!} \text{ converge et que } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$
   rem: ceci, on le sait déjà, car ce n'est qu'un cas particulier de la série de l'exponentielle.
3. Notons pour tout $n, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
   D'après Q.II.1), on a $e - S_n = e.\frac{a_n}{n!}$ càd $S_n = e - e.a_n.\frac{1}{n!}$.
   Comme $\lim e.a_n = 0$, on a $-e.a_n.\frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$.
   On a bien montré que $S_n = e + o\left(\frac{1}{n!}\right)$
   rem: ceci prouve que la suite (S_n) converge très rapidement vers e.

Partie III

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+t}$ est **continue** sur le **segment** $[0,1]$, donc par théorème $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ existe}}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a par linéarité de l'intégrale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \int_0^1 t^k.e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k.e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k e^{-t} dt$$

Or

$$\forall t \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

d'où

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.e^{-t}.dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t} dt}_{=I} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt$$

ce qui donne bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt}$

3. • Nous allons montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt = 0$.
   On a

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} \leqslant \frac{t^{n+1}.e^{0}}{1+0} = t^{n+1}$$

   et donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t}.dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1}.dt = \frac{1}{n+2}$$

   Comme $\lim \dfrac{1}{n+2} = 0$, on a bien $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt = 0$

   • Comme **produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers** 0,
   on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (-1)^n . \int_0^1 \frac{t^{n+1}.e^{-t}}{1+t} dt = 0$
   et donc avec la question précédente cela donne $\lim S_n = I$
   On vient de prouver que $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n.a_n \text{ converge et que sa somme vaut } I}$

Partie IV

1. (a) On a vu en Q.I.d)que $\forall n \geqslant 0, (n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Sachant que $(n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$ et que $(n+2)a_{n+1} = e^{-1} + a_{n+2}$, on a

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)a_n &= (n+2)e^{-1} + (n+2)a_{n+1} \\ &= (n+2)e^{-1} + e^{-1} + a_{n+2}\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n = \frac{e^{-1}}{n+1} + \frac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}$

   (b) On regarde chaque terme

- $\dfrac{e^{-1}}{n+1} = \dfrac{e^{-1}}{n} . \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{-1}}{n}(1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})) = e^{-1}.\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)$
- $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n^2}$ et donc $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{e^{-1}}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$
- Comme $\lim a_{n+2} = 0$ on a $\dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o(\dfrac{1}{n^2})$

Au final, on trouve $\boxed{a_n = \frac{e^{-1}}{n} + o(\frac{1}{n^2})}$

Avec les notations de l'énoncé, on a $\boxed{(K,L) = (e^{-1},0)}$

- Comme $a_n \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$ et que $\dfrac{e^{-1}}{n}$ est de signe stable, on peut affirmer que la série $\sum a_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \dfrac{e^{-1}}{n}$, $\boxed{\text{elle est donc divergente.}}$
- Comme $a_n - \dfrac{e^{-1}}{n} = o(\dfrac{1}{n^2})$ et que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est un série **absolument** convergente, on peut affirmer d'après le théorème de comparaison avec le o, que la série de terme général $a_n - \dfrac{e^{-1}}{n}$ est absolument convergente, donc $\boxed{\text{convergente.}}$

(c) Par définition de o,
on peut dire qu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $a_n - \dfrac{e^{-1}}{n} = \dfrac{1}{n^2}.\varepsilon_n$

Comme $\lim \varepsilon_n = 0$, on peut affirmer que pour n assez grand on a $-1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$.
autrement dit, on sait qu'il existe un rang N à partir duquel $-1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$.

On a bien justifié que $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ -\frac{1}{n^2} \leqslant a_n - \frac{e^{-1}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}}$

2. (a) un encadrement de la suite (C_n)

   i. C_n est la somme partielle d'indice n de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.
   Comme on sait que cette série de référence est convergente, on sait que la suite (C_n) est convergente.
   Et par théorème, on sait qu'**une suite convergente est toujours bornée.**
   Conclusion: $\boxed{(C_n) \text{ est une suite majorée.}}$

   ii. On sait que pour tout $k \geqslant 2$, on a $1 \leqslant k^2 - k \leqslant k^2$.
   comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que pour tout $k \geqslant 2, \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2-k}$
   Soit $n \geqslant 2$,
   d'après ce que l'on a montré ci-dessus, on peut dire que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$$

   On a donc $\forall n \geqslant 2, C_n - 1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$

iii. une décomposition classique en éléments simples donne

$$\frac{1}{X^2-X}=\frac{1}{X(X-1)}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X}$$

Soit $n\geqslant 2$.
On a donc par procédé télescopique

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n}$$

Ceci prouve avec la question précédente que

$$\forall n\geqslant 2, C_n=1+C_n-1\leqslant 1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}\leqslant 2$$

Et comme $C_1=1$, on a bien montré que le résultat est valable aussi à partir du rang 1: $\boxed{\forall n\geqslant 1, C_n\leqslant 2}$

(b) un encadrement de la suite (B_n)

i. On considère la fonction $f:t\mapsto\frac{1}{t}$ définie sur $[1,+\infty[$.
Il est immédiat que f est une fonction continue et décroissante sur son ensemble de définition.
Soit $n\geqslant 1$ et $t\in[n,n+1]$
Par décroissance de la fonction f sur $[n,n+1]$, on a $f(n+1)\leqslant f(t)\leqslant f(n)$

On a ainsi
$$\forall t\in[n,n+1], f(n+1)\leqslant f(t)\leqslant f(n)$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 f(n+1)dt\leqslant\int_0^1 f(t)dt\leqslant\int_0^1 f(n)dt$$

c'est à dire
$$\frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{n}$$

ii. *On montre séparément les deux inégalités (comme dans la démonstration du cours).*

- Soit $n\geqslant 1$ fixé.
  On sait que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ on a $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{k}$
  On a donc par sommation
  $$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
  ce qui donne avec la relation de Chasles
  $$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=B_n$$
  Comme la fonction ln est croissante , on a $\ln n\leqslant\ln(n+1)$.
  On vient de justifier que $\boxed{\forall n\geqslant 1, \ln n\leqslant B_n}$

- Soit $n\geqslant 1$ fixé.
  ici pour bien faire les choses, il faut distinguer $n=1$ et $n\geqslant 2$.
  - si $n=1$ on a trivialement $B_n=1=1+\ln(1)$
  - si $n\geqslant 2$, on sait que pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$ on a $\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$
    On a donc par sommation
    $$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$$
    ce qui donne avec la relation de Chasles
    $$B_n-1=\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\int_1^n\frac{dt}{t}=\ln n$$

  On a bien justifié que $\boxed{\forall n\geqslant 1, B_n\leqslant 1+\ln n}$

(c) i. D'après la Q.IV.1c), on sait qu'il existe un entier $N>1$ tel que
$$\forall k\geqslant N,\ -\frac{1}{k^2}\leqslant a_k-\frac{e^{-1}}{k}\leqslant\frac{1}{k^2}$$
Soit $n>N$ un entier fixé.
On a par sommation
$$-\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=N}^{n}a_k-\frac{e^{-1}}{k}=\sum_{k=N}^{n}a_k-e^{-1}.\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^2}$$
Ici, il est important de noter que N est un entier fixé, et donc que les sommes $\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}$ sont des constantes que nous nommerons respectivement M_3, M_4 et M_5.
L'encadrement précédent s'écrit alors
$$-(C_n-M_5)\leqslant A_n-M_3-e^{-1}(B_n-M_4)\leqslant C_n-M_5$$
soit encore
$$-C_n+\underbrace{M_5+M_3-e^{-1}.M_4}_{=M_1}\leqslant A_n-e^{-1}.B_n\leqslant C_n\underbrace{-M_5+M_3-e^{-1}.M_4}_{=M_2}$$
On a bien justifié il existe deux réels M_1 et M_2 tels que pour tout n assez grand
$$-C_n+M_1\leqslant A_n-e^{-1}.B_n\leqslant C_n+M_2$$

ii. Comme $C_n\leqslant 2$, pour tout $n\geqslant 1$, on a pour tout n assez grand
$$M_1-2\leqslant A_n-e^{-1}.B_n\leqslant M_2+2$$
Il suffit de diviser chaque membre de l'encadrement précédent par $e^{-1}.\ln(n)>0$
puis d'appliquer le théorème des gendarmes pour trouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{e^{-1}.\ln n}-\frac{B_n}{\ln n}=0$
Or d'après Q IV.2.b)ii), on a pour tout $n\geqslant 2, 1\leqslant\frac{B_n}{\ln n}\leqslant 1+\frac{1}{\ln n}$,
d'après le même théorème, on en déduit que $\lim\frac{B_n}{\ln n}=1$
Au final, on a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{e^{-1}.\ln n}=1$ càd que
$$\boxed{A_n\underset{+\infty}{\sim}e^{-1}.\ln n}$$