PT* 25/26 - DM 2
à rendre le vendredi 17 octobre

Exercice 1

Soit Γ l'arc de paramétrisation $\gamma : t \mapsto \big(\sin^2 t,(1+\cos t).\sin t\big)$ et $M(t) = \gamma(t)$

1. Etude et tracé de Γ.
   (a) Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$
   (b) Etablir le tableau des variations conjointes
   (c) Etudier le point singulier s'il y en a un.
   (d) Dessiner la courbe en indiquant bien toutes les tangentes mises en évidence.
2. On note $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(t+\pi)$, ainsi que $I = Mil[M_1,M_2]$
   (a) Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux
   (b) Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ décrite par I
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est incluse dans le cercle de centre $(1/2,0)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. La courbe $\mathcal{C}$ est-elle ce cercle tout entier?

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. On note $F(\sqrt{3},0)$ et Δ la droite d'équation $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
   Déterminer l'équation cartésienne de la conique de foyer F, de droite directrice Δ et d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   On considère maintenant et jusqu'à la fin de cet exercice, E la courbe d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4$

2. (a) Montrer que tout point de E est un point régulier
   (b) Soit $M(x_0,y_0) \in E$.
   Montrer que la tangente à E au point $M(x_0,y_0)$ a pour équation cartésienne $\dfrac{x_0.x}{4} + y_0.y - 1 = 0$
3. Soit D une droite d'équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ avec $(u,v) \neq (0,0)$.
   Nous allons montrer dans cette question l'équivalence

$$D \text{ est tangente à } E \iff 4u^2 + v^2 - w^2 = 0$$

   (a) Montrer que si D est tangente à E alors $4u^2 + v^2 - w^2 = 0$
   (b) Réciproquement, on suppose que $4u^2 + v^2 - w^2 = 0$
      i. Montrer que $w \neq 0$
      ii. Justifier que D est une droite tangente à Γ.

4. On considère E' la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= 4\cos(t) \\ y &= 2\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0,2\pi]$

   On note $P(t)$ le point de coordonnées $(4.\cos t, 2\sin t)$

   (a) Sur un même dessin représenter E et E'.
   (On ne demande pas de faire d'étude)

   (b) Soient $P(t)$ et $P(t')$ deux point distincts de E'

      i. Ecrire une équation cartésienne de la droite $(P(t)P(t'))$

      ii. Montrer que cette droite est tangente à E ssi $2\cos^2(t'-t) - \cos(t'-t) - 1 = 0$

      iii. En déduire que la droite $(P(t)P(t'))$ est tangente à E ssi $t' - t \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   (c) Soient $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 2\pi$ trois réels.
   On suppose que les droites $(P(t_1)P(t_2))$ et $(P(t_2)P(t_3))$ sont toutes les deux tangentes à E.
   Montrer que la droite $(P(t_1)P(t_3))$ est alors elle aussi tangente à E.
   Compléter le dessin de la question 3(a) pour illustrer ce résultat.

Exercice 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

On s'intéresse à la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= e^t.\cos t \\ y(t) &= e^t.\sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On note:

- $M(t)$ le point de paramètre t
- Λ le support de la courbe paramétrée

1. Calculer la longueur de Λ entre les points $M(-\ln 3)$ et $M(3\ln 2)$
2. La courbe Λ est-elle de longueur finie?
3. Démontrer que tous les points $M(t)$ pour lesquels la tangente à Λ est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient..
4. Soit $M(t)$ un point de Λ
   Donner le repère de Frenet puis la courbure de Λ au point $M(t)$
5. Déterminer une représentation paramétrique de la développée Γ de Λ.
6. Démontrer que Γ est l'image de Λ par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   (on pourra, si on le souhaite, s'intéresser aux affixes complexes des différents points considérés)

Corrigé de l'exercice 1

1. (a)
   - Les fonctions x et y sont clairement 2π périodiques.
     On restreint l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, +\pi]$ et l'on obtient toute la courbe
   - $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $\begin{cases} x(-t) = \sin^2(-t) & = \sin^2(t) = x(t) \\ y(-t) = (1+\cos(-t)).\sin(-t) & = -(1+\cos(t)).\sin(t) = -y(t) \end{cases}$
     prouve que $M(-t) = s_{Ox}(M(t)$.
     On en déduit que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$, puis pour obtenir la courbe dans son entier on effectue une symétrie par rapport à l'axe $(0x)$
   - $\forall t \in [0,\pi], y(\pi - t) = (1+\cos(\pi - t)).\sin(\pi - t) = (1-\cos t).\sin t$
     ce qui ne donne rien de spécial

   (b)
   - Pour tout $t \in [0,\pi]$ on a
     –
     $$x'(t) = 2.\sin(t).\cos(t) = \sin(2t)$$
     Le signe de cette dérivée est simple à donner pour $t \in [0,\pi]$
     –
     $$\begin{aligned} y'(t) &= -\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t \\ &= -\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t \\ &= (\cos^2 t - 1) + \cos t + \cos^2 t \\ &= 2\cos^2 t + \cos t - 1 \end{aligned}$$
     Cette dérivée est un polynôme du second degré en $\cos t$.
     On s'intéresse donc au trinôme
     $$2X^2 + X - 1 \qquad \text{dont les racines sont } -1 \text{ et } \frac{1}{2}$$
     et donc
     $$y'(t) = 2.(\cos(t)+1).(\cos(t) - \frac{1}{2})$$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0		$+$		0	$-$	0
$x(t)$	0	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	0
$y(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1	↘	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0

On remarque:
- il n'y a pas de branche infinie
- il y a un unique point singulier $M(\pi)$
- $M(0)$ et $M(\pi/2)$ sont des points avec **une tangente verticale**
- $M(\pi/3)$ est un point avec **une tangente horizontale**

remarque: il était également possible de factoriser $y'(t)$ différemment pour déterminer son signe

$$y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t + \cos t = \cos(2t) + \cos t = 2.\cos(\frac{3t}{2}).\cos(\frac{t}{2})$$

(c) Il y a un point singulier, le point $M(\pi)$.
On pose $t = \pi + h$, et on effectue le DL.

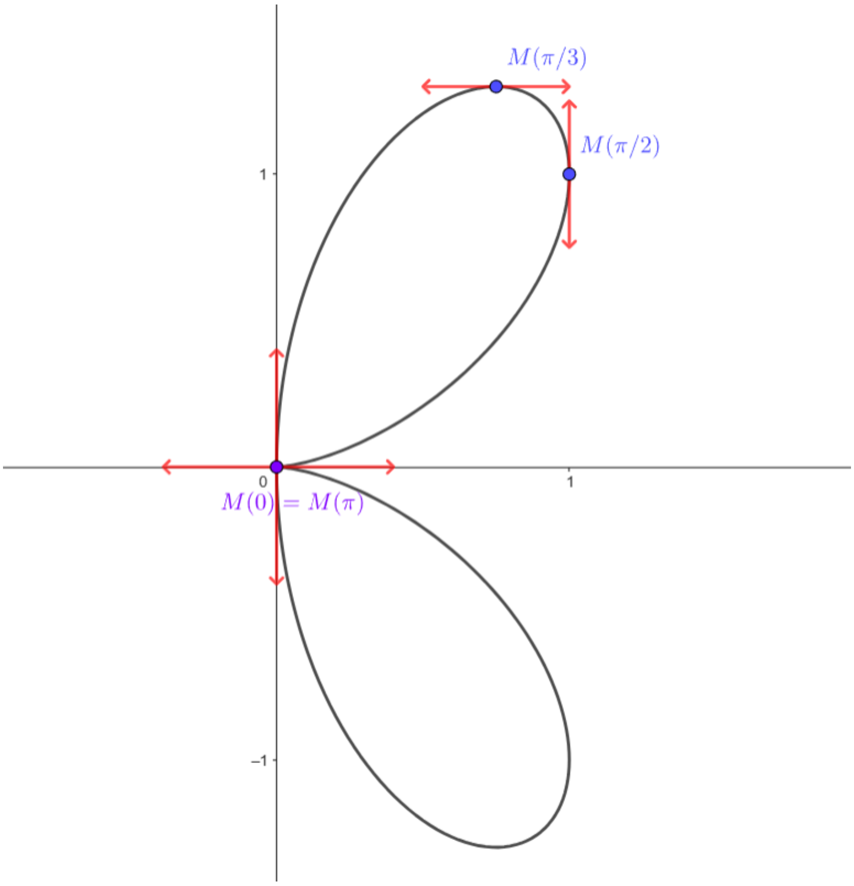
$$x(\pi + h) = \sin^2(\pi + h) = \sin^2(h) = \left(h - \frac{h^3}{3!} + o(h^4)\right)^2 = h^2 - \frac{h^4}{3} + o(h^5)$$

$$\begin{aligned} y(\pi + h) &= -(1 - \cos(h)).\sin h \\ &= -\left(1 - (1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!} + o(h^4))\right).(h - \frac{h^3}{3!} + o(h^4)) \\ &= -\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{4!} + o(h^4)\right).(h - \frac{h^3}{3!} + o(h^4)) \\ &= -\frac{h^3}{2} + o(h^4) \end{aligned}$$

ainsi le DL vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned} M(t) = M(\pi + h) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h^2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h^3.\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + o(h^3) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=M(\pi)} + (t-\pi)^2.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{I}} + (t-\pi)^3.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_{=\vec{J}} + o((t-\pi)^3) \end{aligned}$$

On effectue alors le petit dessin habituel, et on conclut que c'est
$\boxed{\text{un point de rebroussement de première espèce}}$!



2. (a) On effectue bien sûr le produit scalaire de ces deux vecteurs

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2} &= \begin{pmatrix}\sin^2 t\\ (1+\cos t).\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin^2 t\\ -(1-\cos t).\sin t\end{pmatrix}\\ &= \sin^4 t-(1-\cos t)(1+\cos t).\sin^2 t\\ &= \sin^4 t-(1-\cos^2 t).\sin^2 t\\ &= \sin^4 t-\sin^2.\sin^2 t=0\end{aligned}$$

3. On a

$$\forall t\in\mathbb{R}, I=\frac{1}{2}(M_1+M_2)=\begin{pmatrix}\sin^2 t\\ \cos t.\sin t\end{pmatrix}$$

Le lieu de I, ce que l'énoncé appelle la courbe $\mathcal{C}$, admet la paramétrisation suivante

$$t\in\mathbb{R}\mapsto(\sin^2 t\,,\,\cos t.\sin t)$$

rem: on peut bien sûr remplacer l'intervalle $\mathbb{R}$ *par* $[-\pi,+\pi]$

4.
   - Notons $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre (1/2,0) et de rayon $\frac{1}{2}$.
     Son équation cartésienne est

     $$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad x^2-x+y^2=0$$

   - Soit $t\in\mathbb{R}$.
     Nous allons vérifier que $I(t)\in\mathcal{C}_1$.

     $$\sin^4 t-\sin^2 t+\cos^2 t.\sin^2 t=\sin^2 t.(\underbrace{\sin^2 t-1+\cos^2 t}_{=0})=0$$

     Conclusion: $\boxed{\text{on a montré que } \mathcal{C}\subset\mathcal{C}_1}$
   - On nous demande si $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1$.
     On pourrait donc comme première idée penser à étudier l'inclusion réciproque. On peut cependant ici, procéder beaucoup plus rapidement en restant en paramétrique!.

     En passant à l'angle double, on obtient

     $$\forall t\in\mathbb{R}, I(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1-\cos(2t)}{2}\\ \dfrac{1}{2}.\sin(2t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\cos(2t)\\ 0+\frac{1}{2}.\sin(2t)\end{pmatrix}$$

     On peut maintenant faire un changement de paramètre en posant $\theta=\pi-2t$, et l'on obtient

     $$I(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\cos(\pi-\theta)\\ 0+\frac{1}{2}.\sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\cos(\theta)\\ 0+\frac{1}{2}.\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

     Ce qui nous fournit une autre paramétrisation de la courbe **C**

     $$\theta\in\mathbb{R}\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\cos(\theta)\\ 0+\frac{1}{2}.\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

     On reconnait alors le cercle(complet) de centre (1/2,0) et de rayon 1/2

Corrigé de l'exercice 2

1. Notons $\mathcal{C}$ la conique en question.
   Soit $M(x,y)$.
   On a par définition

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff d(M,F) = e.d(M,\Delta) \\ &\Longleftarrow d(M,F)^2 = e^2.d^2(M,\Delta) && \textit{car les 2 membres sont positifs} \\ &\iff (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = \frac{3}{4}.\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &\iff \dots \\ &\iff \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{aligned}$$

   Il s'agit de l'ellipse d'équation $\boxed{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$

2. (a) On note $F : (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 4$
   Soit $M_0 = (x_0,y_0) \in E$
   On a $\vec{\nabla}_{M_0} F = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 8y_0 \end{pmatrix}$
   On en déduire que $\vec{\nabla}_{M_0} F = \vec{0}$ ssi $x_0 = y_0 = 0$
   Or le point $(0,0) \notin E$.

   Conclusion: $\boxed{\text{tout point de } E \text{ est régulier}}$

   (b) Soit $M_0 = (x_0,y_0) \in E$.
   La droite tangente à E au point M_0 est la droite qui passe par le point $M_0(x_0,y_0)$ et de vecteur normal $\vec{\nabla}_{M_0} F = 2\begin{pmatrix} x_0 \\ 4y_0 \end{pmatrix}$.
   Son équation cartésienne est donc

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ 4y_0 \end{pmatrix} = 0$$

   ce qui donne en développant

$$x_0 x + 4y_0 y - x_0^2 - 4y_0^2 = 0$$

   Comme $M_0 \in E$ on a $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$, en remplaçant on trouve ce qui est demandé

   $\boxed{\text{Conclusion : la tangente au point } M_0 = (x_0,y_0) \in E \text{ a pour équation } \frac{x_0 x}{4} + y_0 y - 1 = 0}$

3. (a) Soit D une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ tangente à E.
   On sait donc qu'elle a une équation de la forme $\frac{x_0 x}{4} + y_0 y - 1 = 0$ avec $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$
   Ainsi l'équation de D est proportionnelle à l'équation ci-dessus.
   (en effet, on n'oublie pas qu'il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'une droite, ce qui nous emêche d'identifier les coefficients. Cependant, on sait que deux équations cartésiennes d'une même droite sont proportionnelles.)
   Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x_0/4 \\ y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   D'où

$$4u^2 + v^2 - w^2 = \lambda^2\left(4.\left(\frac{x_0}{4}\right)^2 + y_0^2 - 1\right) = \frac{\lambda^2}{4}\left(x_0^2 + 4y_0^2 - 4\right) = 0$$

On a bien montré la première implication

(b) On suppose que $4u^2+v^2-w^2=0$

i. Montrons par l'absurde que $w \neq 0$.
On suppose que $w=0$
On a donc $4u^2+v^2=0$
Or *une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul*,
d'où $u=v=0$
Contradiction car par hypothèse $(u,v) \neq (0,0)$

ii. D a donc aussi pour équation $\dfrac{u}{w}x+\dfrac{v}{w}y+1=0$ soit $\dfrac{-u}{w}x+\dfrac{-v}{w}y-1=0$
Il s'agit de montrer que D à une équation du type d'une tangente de E, càd de la forme $\dfrac{x_0.x}{4}+y_0.y-1=0$ avec $(x_0,y_0) \in E$

Posons $\begin{cases} x_0 &= \dfrac{-4u}{w} \\ y_0 &= \dfrac{-v}{w} \end{cases} \qquad (*)$

- Avec ce choix, on a

$$x_0^2+4y_0^2-4 = 16.\frac{u^2}{w^2}+4\frac{v^2}{w^2}-4 = \frac{4}{w^2}\left(4u^2+v^2-w^2\right)=0$$

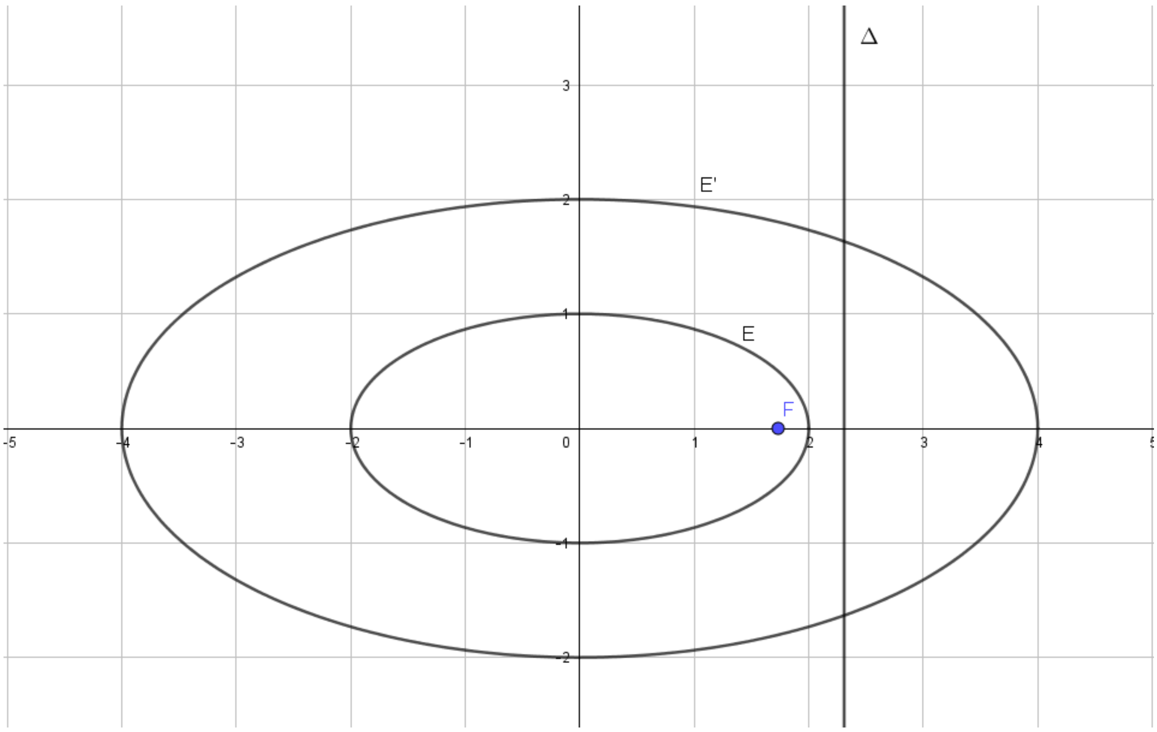
ce qui prouve que (x_0,y_0) est un point de E

- Avec ce choix, on a $ux+vy+w = -\dfrac{w.x_0}{4}x - w.y_0.y+w = \underbrace{w}_{\neq 0}.\left(\dfrac{x_0.x}{4}+y_0.y-1\right)$

et donc D a pour équation $\dfrac{x_0.x}{4}+y_0.y-1=0$

- On a ainsi prouvé que $\boxed{D \text{ est la droite tangente à } E \text{ au point } (x_0,y_0) \text{ défini par } (*)}$

4. (a)



(b) i. La droite $(P(t)P(t'))$ est la droite qui passe par le point $P(t) = (4.\cos(t), 2\sin(t))$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{P(t)P(t')} = 2.\begin{pmatrix} 2(\cos t' - \cos t) \\ \sin t' - \sin t \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc

$$\begin{vmatrix} x - 4\cos t & 2(\cos t' - \cos t) \\ y - 2\sin t & \sin t' - \sin t \end{vmatrix} = 0$$

En développant on trouve

$$(\sin t' - \sin t).x - 2.(\cos t' - \cos t).y - 4.\cos t.\sin t' + 4.\sin t.\cos t' = 0$$

soit

$$\boxed{(\sin t' - \sin t).x - 2.(\cos t' - \cos t).y - 4\sin(t' - t) = 0}$$

ii. D'après Q2, on sait que cette droite est tangente à E ssi

$$4.(\sin t' - \sin t)^2 + (-2)^2.(\cos t' - \cos t)^2 - (-4)^2.\sin^2(t - t') = 0$$

En développant et en simplifiant par 4 cela donne

$$\underbrace{\sin^2 t' + \cos^2 t'}_{=1} + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} - 2.\underbrace{(\sin t'.\sin t + \cos t' \cos t)}_{\cos(t'-t)} - 4.\sin^2(t' - t) = 0$$

En simplifiant par 2 et en utilisant $\sin^2(t' - t) = 1 - \cos^2(t' - t)$

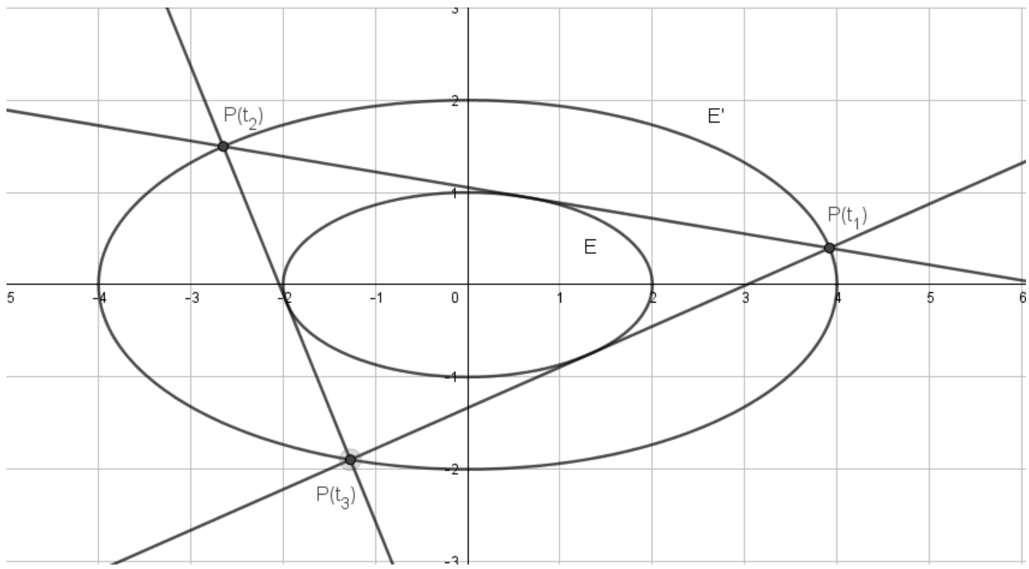
$$2\cos^2(t' - t) - \cos(t' - t) - 1 = 0$$

iii.
- Notons $X = \cos(t' - t)$
  L'équation ci-dessus s'écrit $2.T^2 - T - 1 = 0$
  Les solutions de cette équation sont $X = 1$ et $X = \frac{-1}{2}$
- On a $\cos(t' - t) = 1 \iff t - t' \equiv 0[2\pi]$
  Ce qui est exclu car les points $P(t)$ et $P(t')$ sont distincts par hypothèse
- On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} (P(t)P(t')) \text{ est tangente à } E &\iff \cos(t' - t) = \frac{-1}{2} \\ &\iff t' - t \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{aligned}$$

(c) Soient $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 2\pi$ trois réels.

- Comme $(P(t_1)P(t_2))$ est tangente à E on sait que $t_2 - t_1 \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
  Comme $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ on a donc $t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$
- Pour les mêmes raisons on a donc $t_3 - t_2 = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$
- On en déduit que $t_3 - t_1 = \frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{6\pi}{3}$ ou $\frac{8\pi}{3}$
  Or $0 < t_3 - t_1 < 2\pi$ donc on a forcément $t_3 - t_1 = \frac{4\pi}{3}$
  Comme $\frac{4\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3}\ [2\pi]$, on peut affirmer d'après Q3(b)iii) que la droite $(P(t_1)P(t_3))$ est tangente à E !
  (c'est pas beau ça ?)



Corrigé de l'exercice 3

1. On a $\begin{cases} x_2'(t) &= e^t(\cos t - \sin t) \\ y_2'(t) &= e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}$ et ainsi $\sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2} = \dots = \sqrt{2}.e^t$

$$l = \int_{-\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2}dt = \sqrt{2}\int_{-\ln 3}^{3\ln 2} e^t dt = \sqrt{2}.\left[e^t\right]_{-\ln 3}^{3\ln 2} = \sqrt{2}(e^{3\ln 2} - e^{-\ln 3}) = \sqrt{2}(8 - \frac{1}{3}) = \frac{23\sqrt{2}}{3}$$

2. Soit $t_1 < t_2$.
La longueur prise sur la courbe entre les point $M(t_1)$ et $M(t_2)$ est

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2}.e^t.dt = \sqrt{2}(e^{t_2} - e^{t_1})$$

En faisant tendre $t_1 \to -\infty$ et $t_2 \to +\infty$, on a $\sqrt{2}(e^{t_2} - e^{t_1}) \to +\infty$, ce qui permet d'affirmer que $\boxed{\text{la courbe est de longueur infinie.}}$

3.
   - Il y a une tangente verticale en $M_2(t_0)$ ssi le premier vecteur dérivée en t_0 est colinéaire à $\vec{j} = (0,1)$
   - Commençons par remarquer que $\boxed{\text{la courbe est régulière.}}$
   En effet, on a $\forall t \in \mathbb{R}, ||\overrightarrow{M_2'(t)}||\sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2} = \sqrt{2}.e^t \neq 0$ ce qui prouve que $\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{M_2'(t)} \neq \vec{0}$
   - On en déduit qu'il y a $\boxed{\text{une tangente verticale en } M_2(t_0) \text{ ssi } x_2'(t_0) = 0 \text{ ssi } \cos t_0 = \sin t_0}$
   rem: ceci donne $t_0 \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ mais on n'avait pas besoin de ceci ; l'énoncé ne nous demandait pas les coordonnées de ces points mais la droite sur laquelle ils étaient situées.
   - Ainsi les points de Λ_2 en lesquels la tangente est verticale sont les points $M_2(t_0)$ pour lesquels $\cos t_0 = \sin t_0$, ce qui donne

$$M_2(t_0) = \begin{pmatrix} e^{t_0}\cos t_0 \\ e^{t_0}\sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t_0}\cos t_0 \\ e^{t_0}\cos t_0 \end{pmatrix}$$

   On remarque que ces points sont sur la droite Δ d'équation $y = x$.
   Il s'agit de la "première bissectrice":
   $\boxed{\text{c'est la droite qui passe par le point } O \text{ et de vecteur directeur } \vec{i} + \vec{j}}$

4. • Les calculs classiques donnent:

   –
$$\frac{ds}{dt} = ||\overrightarrow{M_2'(t)}|| = \sqrt{2}.e^t$$
$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{M_2'(t)}}{||\overrightarrow{M_2'(t)}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos t - \sin t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}$$
$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\cos t - \sin t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix}$$

• On cherche le paramètre angulaire α tel que

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sin t\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}.\cos t - \sin\frac{\pi}{4}.\sin t\\ \sin\frac{\pi}{4}.\cos t + \cos\frac{\pi}{4}.\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{4}+t)\\ \sin(\frac{\pi}{4}+t)\end{pmatrix}$$

Ainsi
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + t$$

• On en déduit que
$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}.\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = 1.\frac{1}{\sqrt{2}e^t} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}$$

• et ainsi
$$C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma}.\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}-\cos t - \sin t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^t.\sin t\\ e^t.\cos t\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Gamma \text{ a pour représentation paramétrique } t \mapsto \begin{pmatrix}-e^t.\sin t\\ e^t.\cos t\end{pmatrix}}$$

5. On a
$$Aff(M(t)) = z_{M(t)} = e^t.\cos t + i.e^t.\sin t = e^t.(\cos t + i\sin t) = e^t.e^{it}$$
et
$$Aff(C(t)) = z_{C(t)} = e^t.(-\sin t + i.\cos t) = i.e^t.(\cos t + i\sin t) = i.e^t.e^{it}$$
On constate que
$$\forall t \in \mathbb{R}, z_C(t) = i.z_{M(t)} = e^{i\pi/2}.z_{M(t)}$$
ce qui prouve que $C(t)$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion: $\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ est l'image de } \Lambda_2 \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}}$