PT* 25/26 - DM 1
à rendre le vendredi 3 octobre

Exercice 1

1. préliminaire : Montrer que si la série de terme général $x_n > 0$ converge alors la série de terme général x_n^2 converge aussi
2. Dans les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} & \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

   Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle
   (c) En utilisant $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$, montrer que la série de terme général v_n est divergente
4. (a) Montrer que $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n

Exercice 2: une démonstration pour les sommes de Riemann

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.

On note pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k.\dfrac{b-a}{n}$

1. Justifier que $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ existe
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx$
3. Justifier que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M.(x - x_k).dx = \frac{M.(b-a)^2}{2.n^2}$
4. En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{M.(b-a)^2}{2n}$
5. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + O(\frac{1}{n})$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$

Exercice 3: facultatif, pour le fun!

On pose pour tout $n \geqslant 0, R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

1. Montrer que la suite (R_n) est bien définie, càd que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est bien convergente
2. Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente
3. On souhaite calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.
   Pour cela on note S_N la somme partielle d'indice N de cette série.
   (On admettra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$*)*
   (a) Montrer que $\forall N \geqslant 0, S_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + (N+1). \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$
   (b) Donner un majorant simple de $\left| \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right|$
   (c) En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\ln 2$

corrigé de l'exercice 1

1. On suppose que $\sum x_n$ converge

   Je propose deux solutions pour montrer que $\sum x_n^2$ converge

   i) **première solution:**
   Comme la série $\sum x_n$ converge, on sait que nécessairement son terme général tend vers 0, on a donc $\lim x_n = 0$. On peut donc en déduire qu'à partir d'un certain rang on a $x_n \in [-1, +1]$.

   De plus comme, on nous dit que $x_n > 0$, on peut donc affirmer qu'à partir d'un certain rang, on a $0 < x_n \leqslant 1$. Cette encadrement nous permet de dire

   $$\text{pour } n \text{ assez grand,} \qquad 0 < x_n^2 \leqslant x_n$$

   Comme $\sum x_n$ converge, on peut affirmer par comparaison que $\sum x_n^2$ converge.

   ii) **seconde solution:**
   Comme la série $\sum x_n$ converge, on sait que nécessairement son terme général tend vers 0, on a donc $\lim x_n = 0$.
   On a donc

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

   ce qui prouve que $x_n^2 = O(x_n)$.
   (Nous allons utiliser le théorème de comparaison avec $O(\ldots)$ pour lequel on doit utiliser des séries ACV).
   Comme $x_n > 0$, on a $|x_n| = x_n$ et on peut donc affirmer que $\sum x_n$ est ACV.
   Par comparaison, on peut aller affirmer que $\boxed{\sum x_n^2 \text{ est ACV}}$

   iii) *remarque:*
   On notera que la contraposée de la proposition démontrée est:
   si $\sum x_n^2$ diverge et $x_n > 0$ alors $\sum x_n$ diverge.

2. - On montre aisément par récurrence que u_n est défini et que $u_n > 0$
     (c'était important de faire cette remarque dès le début de cette question)
   - On a pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} < 1$. (car $u_n > 0$).
     On peut donc affirmer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   - La suite (u_n) est minorée et décroissante, on peut donc affirmer qu'elle converge.
     Notons l sa limite.
   - Comme la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que l vérifie l'égalité $l = \dfrac{l}{\operatorname{ch} l}$.
     Résolvons cette équation!
     On a $l.(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch} l}) = 0$. Ce produit est nul ssi l'un des facteurs est nul, c'est à dire $l = 0$ ou $\operatorname{ch} l = 1$, bref lorsque $l = 0$.
     $\boxed{\text{Conclusion: la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$

3. (a) On a $v_n = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1$. Or $u_n > 0$ donc $\operatorname{ch} u_n > 1$. On a donc directement $\boxed{v_n < 0}$

(b) D'après l'égalité ci-dessus, comme $\lim u_n = 0$, par composition de limite, on a directement $\lim v_n = \frac{1}{1} - 1 = 0$

(c) • On a par procédé télescopique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n)$$

• Comme $u_n \to 0$, on a $\ln(u_n) \to -\infty$.

• Or $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$ est la somme partielle d'indice $n-1$ de la série $\sum \ln(1+v_k)$: on a donc prouvé que $\boxed{\text{la série } \sum \ln(1+v_n) \text{ diverge}}$

• Comme $v_n \to 0$, on a donc $\ln(1+v_n) \sim v_n < 0$. En appliquant la **règle des équivalents**, on peut affirmer que les deux séries sont de même nature, donc $\boxed{\sum v_n \text{ diverge}}$

4. (a) On a $v_n = \dfrac{1 - \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{ch} u_n}$. Le dénominateur est équivalent à un. Pour le numérateur, on effectue un DL: $1 - \operatorname{ch} u_n = 1 - (1 + u_n^2/2 + o(u_n^2)) = -u_n^2/2 + o(u_n^2) \sim -u_n^2/2$.
Au final, on a bien $\boxed{v_n \sim -u_n^2/2}$, soit encore $\boxed{u_n^2 \sim -2v_n > 0}$

(b) On sait que $\sum v_n$ diverge, donc $\sum -2v_n$ converge également (car multiplier le terme général d'une série par un scalaire non nul ne modifie pas sa nature). A l'aide de l'équivalent précédent, d'après **la règle des équivalents**, on peut affirmer que $\sum u_n^2$ et $\sum -2v_n$ sont de même nature, d'où $\boxed{\sum u_n^2 \text{ diverge.}}$

(c) On a $u_n > 0$ et la série $\sum u_n^2$ est divergente, d'après Q1, on peut affirmer que $\boxed{\sum u_n \text{ diverge forcément.}}$

corrigé de l'exercice 2

1. La fonction f est C^1 sur $[a,b]$, ce qui signifie que la fonction f' est **continue sur le segment** $[a,b]$. D'après **le théorème des bornes atteintes**, on peut dire que f' est bornée, ce qui revient à dire que $|f'|$ est majoré, et donc $\boxed{M = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \text{ existe.}}$

2. Nous allons partir du second membre de l'égalité à prouver .
Par **linéarité de l'intégrale**, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx$$

et par **linéarité du signe** $\sum$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx$$

Or, d'une part, par **la relation de Chasles**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

et d'autre part, comme $f(x_k)$ est une constante

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx = f(x_k).(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n}.f(x_k)$$

En combinant ces résultats, on obtient bien

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx$$

3. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ fixé
   - **L'inégalité triangulaire intégrale** donne

     $$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|dx$$

   - D'après **l'inégalité des accroissements finis**, on a

     $$\forall x \in [x_k,x_{k+1}], |f(x) - f(x_k)| \leqslant M.|x - x_k| = M.(x - x_k) \ \textit{car } x \geqslant x_k$$

     On a ensuite par **croissance de l'intégrale**

     $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|dx \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M.(x - x_k)dx$$

   - On a déjà prouvé que

     $$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M.(x - x_k)dx$$

   - Reste à calculer cette dernière intégrale

     $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} M.(x - x_k)dx = \left[M.\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M.\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = \frac{M.(b-a)^2}{2.n^2}$$

4. En utilisant **l'inégalité triangulaire** dans l'égalité Q2 on obtient

   $$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx\right|$$

   En utilisant maintenant la majoration de la question précédente

   $$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M.(b-a)^2}{2.n^2} = \frac{M.(b-a)^2}{2.n}$$

5. - Notons $l = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et pour tout $n \geqslant 1, u_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$
   - La question précédente indique que

     $$\forall n \geqslant 1, |l - u_n| \leqslant \frac{M.(b-a)^2}{2.n}$$

     et ainsi que

     $$\forall n \geqslant 1, |n.(l - u_n)| \leqslant \frac{M.(b-a)^2}{2}$$

     La suite $(n.(l - u_n))$ est donc une suite bornée ce qui permet d'écrire

     $$n.(l - u_n) = O(1) \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{l - u_n = O(\frac{1}{n})}$$

- Comme $\lim_{n\to+\infty} O(\frac{1}{n}) = 0$ on en déduit bien que $\lim u_n = l$, càd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$$

- *rem: On rappelle que*
  - $o(1)$ *désigne une suite qui tend vers* 0
  - $O(1)$ *désigne une suite bornée*

corrigé de l'exercice 3

1. Notons $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
   La série de terme général u_n est clairement absolument convergente,
   car $\sum \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente.*
2. - La série $\sum u_n$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées. *(car en effet, la suite* $(|u_n|) = (\frac{1}{n^2})$ *est clairement décroissante et de limite nulle.*
   - Ce même théorème nous permet alors d'affirmer que

   $$\forall n \geqslant 0, |R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

   - La série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ étant une série convergente (car $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$), on peut affirmer par comparaison que $\sum |R_n|$ converge.
   On a montré que $\boxed{\sum R_n \text{ est absolument convergente}}$
3. (a) On peut par exemple procéder par récurrence.
   Notons $\mathcal{P}_N \ : \ S_N = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \dfrac{(-1)^k}{k} + (N+1).\sum\limits_{k=N+2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$
   On rappelle que $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} R_k$
   - **Initialisation** : $\mathcal{P}_0$ est vraie
     En effet: $\sum\limits_{k=1}^{0+1} \dfrac{(-1)^k}{k} + (0+1).\sum\limits_{k=0+2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} = R_0 = S_0$
   - **Hérédité** : On suppose $\mathcal{P}_N$ vraie pour un $N \geqslant 0$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \sum_{k=0}^{N+1} R_k \\ &= \sum_{k=0}^{N} R_k + R_{N+1} \\ &= S_N + R_{N+1} \end{aligned}$$

et on utilise l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
S_{N+1} &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + (N+1). \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + (N+2). \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + (N+2). \left[\frac{(-1)^{N+2}}{(N+2)^2} + \sum_{k=N+3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{N+2}}{N+2} + (N+2) \sum_{k=N+3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{N+2} \frac{(-1)^k}{k} + (N+2) \sum_{k=N+3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{N+1}$ est vrai

- **conclusion: par le principe de récurrence, on a montré que** $\forall N \geqslant 0, \mathcal{P}_N$ **est vrai**

(b) C'est encore le théorème des séries alternées qui permet de dire que

$$\left| \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \leqslant \frac{1}{(N+2)^2}$$

(c) Regardons maintenant chaque terme de la somme 3(a)

- $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$ d'après le rappel *("On admettra que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$*")*
- Soit $N \geqslant 0$. 0n a

$$\left| (N+1). \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = (N+1). \left| \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \leqslant (N+1). \frac{1}{(N+2)^2}$$

et comme $\lim\limits_{N\to\infty} (N+1). \frac{1}{(N+2)^2} = 0$, on peut affirmer que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0$$

- Ainsi

$$\lim S_N = \ln 2 + 0$$

On a bien prouvé que $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n = -\ln 2}$