# 1 Algèbre linéaire







**ALG 1 (pivot)**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On s'intéresse au système linéaire $AX = B$

1. Montrer que la matrice $A$ n'est pas inversible. Qu'en déduit-t-on sur l'ensemble des solutions du système?
2. Montrer que système possède des solutions si et seulement si les coefficients de $B$ sont en progression arithmétique.
3. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

**ALG 2 (puissance de matrice)**
On donne la matrice $3 \times 3$ à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que pour tout entier naturel $n$ il existe un réel $a_n$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$
   et justifier la relation de récurrence $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(a_n)$? Déterminer $a_n$ par la méthode au programme et en déduire l'expression de $A^n$.

**ALG 3 (inverse)**
Pour tout $t$ réel, on pose $U_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $U_s \times U_t$.
2. En déduire que pour tout $t$ réel, $U_t$ est inversible et exprimer $(U_t)^{-1}$
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $D^2$ et $D^3$, puis exprimer $U_t$ comme combinaison linéaire de $D$,$D^2$,$D^3$ et $I$.

**ALG 4**
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer la puissance $n-$ième de $A$

**ALG 5**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 4A^2 + 2A - 3I_n = O$.
$A$ est-elle inversible? si oui, donner son inverse

**ALG 6**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0$ et $A^4 \neq I_n$
$A$ est-elle inversible?

**ALG 7**
Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

1. Déterminer 2 réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $A=\alpha.I_3+\beta.J$.
2. Calculer $J^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
3. En déduire $A^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
4. Soient $(x_n),(y_n)$ et $(z_n)$ trois suites réelles telles que $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ et $\forall n\geqslant 0$, $\begin{cases}x_{n+1}&=y_n+z_n\\y_{n+1}&=x_n+z_n\\z_{n+1}&=x_n+y_n\end{cases}$

   Calculer $x_n,y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$

**ALG 8 (matrice inversible)**
Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB=A+B$.

1. Montrer que $A-I_n$ est inversible et déterminer $(A-I_n)^{-1}$.
2. A-t-on $AB=BA$?

**ALG 9 (inconnue matricielle, inconnue scalaire)**
Soit $A$ et $B\neq 0$ deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'équation $(E):\ M+\mathrm{tr}(M).B=A$ où $M$ est une matrice inconnue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résoudre cette équation!

**ALG 10 (formule du produit matriciel)**
Soit $M=(m_{pq})$ la matrice complexe d'ordre $n$ définie par $m_{pq}=a^{(p-1)(q-1)}$ où $a=\exp(i\frac{2\pi}{n})$
Déterminer $M^2$

**ALG 11 (matrice inversible et rang)**
Soient $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.
Calculer $(AB)^2$ puis montrer que $BA=I_2$

**ALG 12 (inversibilité à droite)**
Soient $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&4\end{pmatrix}$

1. Calculer $A.B$
2. Peut-on alors affirmer que $A$ est inversible et que $A^{-1}=B$?

**ALG 13**
Soit $A$ une matrice carrée pour laquelle $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^n=I_n$
A-t-on pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $A^k$ inversible? et si oui, que vaut $(A^k)^{-1}$

**ALG 14 (calcul de la puissance n-ième d'une matrice)**

1. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Calculer $A^2$, puis en déduire $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}$
2. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Calculer $A^2$ et $A^3$, puis en déduire $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}$

**ALG 15**
On se place dans $E=\mathbb{R}_3[X]$.
On considère les bases $\mathcal{B}=(X^3,X^2,X,1)$ et $\mathcal{B}'=((X+1)^3,(X+1)^2,X+1,1)$.
Ecrire $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$



**ALG 16**
Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. On note $P(X)=X^2-X-2$. Calculer $P(A)$
2. Déterminer les racines du polynôme $P$
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$ pour $n\in\mathbb{N}$ fixé.
4. En déduire que $A^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}A+\dfrac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$ pour $n\in\mathbb{N}$
5. Pourriez-vous proposer une autre méthode de calcul de $A^n$?

**ALG 17 (propriétés conservées par la multiplication avec une matrice inversible)**
On considère les matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\ \text{et}\ C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-5&0&3\end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang et le déterminant des matrices $A,B$ et $C$.
2. Sans calcul: existe-t-il une matrice carrée $X$ telle $XB=A$?
3. Sans calcul: existe-t-il une matrice carrée $Y$ telle que $YA=B$?
4. Existe-t-il une matrice carrée $Z$ telle que $ZC=A$?

**ALG 18 (matrice nilpotente)**
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists k\in\mathbb{N}^*, A^k=0$ (une telle matrice $A$ est dite *nilpotente*.)
Plus précisément, si $A$ est une matrice nilpotente non nulle, on appelle *indice de nilpotence de* $A$ le plus petit entier $p\in\mathbb{N}$ tel que $A^p=0$.

1. Donner une matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3.
   D'une manière générale, donner une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice $n$.
2. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes alors en général $A+B$ n'est pas nilpotente
3. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et qui commutent alors $A+B$ et $AB$ sont également nilpotentes
4. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
5. Montrer que si $A$ est nilpotente alors $I_n-A$ est inversible.(on pourra considérer $\ker(I_n-A)$
6. On va déterminer l'inverse de $I_n-A$ dans un cas particulier. On pose $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$
   (a) Calculer $A^2$ et $A^3$, ainsi que $I_3+A+A^2$
   (b) Déterminer, par la méthode de votre choix, $(I_3-A)^{-1}$
   (c) Que constate-t-on?
7. On retourne au cas général. A partir de l'exemple ci-dessus, quelle formule de $(I_n-A)^{-1}$ peut-on conjecturer? Le vérifier!

**ALG 19 (calcul de la puissance n-ième d'une matrice)**
.
Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ et on note $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $P$ est inversible et donner son inverse.

2. Calculer successivement $P^{-1}.A.P$, $(P^{-1}.A.P)^n$ et $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

**ALG 20 (puissance de matrice)**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$ et $A^3$, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$
2. Montrer que la famille $(A,A^2)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique couple $(a_n,b_n)$ de nombres réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
   (b) En déduire $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1
   (c) Donner l'expression de $A^n$ en fonction de $A$, $A^2$ et $n$ pour tout entier $n \geqslant 1$

**ALG 21**
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $B^n$ en fonction de $B$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   (b) Exprimer $A$ en fonction de $B$ et de $I_3$. En déduire $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$
2. (a) Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et $I_3$. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe 2 réels $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_n.A + b_n.I_3$
   (c) Déterminer $a_n$,$b_n$ puis $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$

## Application trace

**ALG 22**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))\mathbb{K}$ telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(BA)$.
On note $E$ l'ensemble de ces applications $f$.
On souhaite déterminer $E$.

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel
2. (a) A quoi est égal $E_{ij}.E_{kl}$ ? (produit de deux matrices élémentaires)
   (b) En déduire que si $f$ appartient à $E$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}, f = \lambda.\operatorname{tr}$
3. Conclure

**ALG 23**
Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1).P' \end{array}$ dans la base $(1,X,X^2)$.
En déduire $\operatorname{tr}(f)$

**ALG 24**
On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Ecrire la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. En déduire la trace de $f$

**ALG 25**
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donner un supplémentaire de $\ker(\operatorname{tr})$ dans $E$



**ALG 26**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n$. On considère une base $\mathcal{B}$ de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang un

1. Montrer qu'il existe deux matrices unicolonnes $X$ et $Y$ telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = X.Y^T$
2. En déduire que $u^2 = \operatorname{tr}(u).u$

## Familles de vecteurs, combinaisons linéaires

**ALG 27**
Soient $\vec{u} = (1,1,0,0), \vec{v} = (-2,1,3,2)$ et $\vec{w} = (1,0,-1,1)$.
Le vecteur $\vec{t} = (-1,2,2,0)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$?

**ALG 28**
Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $\operatorname{vect}(v,w)$ avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$

**ALG 29 (dans un espace de polynômes)**
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$.
Montrer que $\operatorname{vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_n[X]$

**ALG 30 (dans un espace de fonctions)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nx)$.
Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^4 x$.
Montrer que $g \in \operatorname{vect}(f_0,f_2,f_4)$

**ALG 31 (Familles génératrices)**
Indiquer si les familles suivantes sont génératrices de l'e.v. $E$

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{(1,2,3),(1,0,1)\}$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2+X, X^2+3X-1\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F} = \{1,X\}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{1,X,X^2,X^3\}$
6. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^3-2X,X^2-2X,-2X,1\}$
7. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
8. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{\sin, \cos, \exp\}$

**ALG 32 (Familles libres, rang)**
Indiquer si les famille suivantes sont des familles libres de l'e.v. $E$

1. $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}\}$
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2-2X,2X^2-4X\}$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2-2X,X-2\}$
4. $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^3,X^2-4X,2\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2+2X,X^2+X,X^2-1\}$

6. $E=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\}$
7. $E=\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

**ALG 33**
On note $E=\mathbb{R}^4$ et $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_4=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\a\end{pmatrix}$ et $u_5=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$

1. Déterminer une base et la dimension de $F_1=\text{vect}(u_1,u_2)$
2. A-t-on $u_5\in F_1$ ? Donner le rang de la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_5)$
3. Déterminer $a$ tel que $u_4\in F_1$.
   *A partir de maintenant a prendra cette valeur.*
4. Justifier que $F_2=\text{vect}(u_3,u_4)=F_1$

**ALG 34 (Familles libres)**
1. Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $n\geqslant 1$ un entier
   Pour tout entier $k$ on note $f_k:\begin{array}{rcl}[0,1]&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&t^k\end{array}$.
   Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre
2. Soit $E=C^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et $n\geqslant 1$ un entier
   Pour tout entier $k$ on note $f_k:\begin{array}{rcl}[0,\pi/2]&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&\cos^k t\end{array}$.
   Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre
3. Montrer que la famille $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ où $P_j=\prod_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{i=n}(X-i)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

**ALG 35**
Montrer que l'ensemble de suites qui vérifient la relation $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-u_{n+1}+2.u_n=0$ est un ev de dimension 2

**ALG 36**
On considère $E=\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(\arccos,\arcsin,1)$ est une famille liée.
*rem: ci-dessus le '1' désigne la fonction constante égale à un*

**ALG 37**
On considère les trois suites complexes définies par:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1,\quad v_n=j^n,\quad w_n=\overline{j}^n \qquad \text{où } j=\exp(2i\pi/3)$$

1. Montrer que la famille $((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}},(w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
   On note $F$ le sous espace vectoriel engendré par ces trois suites.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\alpha_n=\cos(2n\pi/3)$ est une suite appartenant à $F$



**ALG 38**
Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ où

$$f_1:x\mapsto\cos x\qquad f_2:x\mapsto\cos^2 x\qquad f_3:x\mapsto\cos(2x)\qquad f_4:x\mapsto\sin^2 x\qquad f_5:x\mapsto 1$$

**ALG 39**
Soit $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n$, et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2=-id$.
1. soit $\vec{a}\neq\vec{0}$. Montrer que $(\vec{a},f(\vec{a}))$ est une famille libre. Que dire dans le cas $n=2$?
2. on suppose $n>2$. Soit $(\vec{a},f(\vec{a}),\vec{b})$ une famille libre , montrer que $(\vec{a},f(\vec{a}),\vec{b},f(\vec{b}))$ est une famille libre.
3. dans le cas $n=4$, en déduire une matrice associée à $f$.
4. que dire dans le cas $n=5$?

**ALG 40 (Famille libre)**
On considère une matrice $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice $p$. *(càd que $N^p=0$ et $N^{p-1}\neq 0$)*
Montrer que $(I_n,N,N^2,\ldots,N^{p-1})$ est une famille libre

**ALG 41**
Soit $n\geqslant 1$. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$
Pour tout $i\in\mathbb{N}$, on note $f_i:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ P&\longmapsto&P(i)\end{array}$
1. Montrer que $f_i$ est une application linéaire
2. Montrer que $(f_0,f_1,\ldots,f_n,f_{n+1})$ est une famille liée.
3. Montrer que $(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ est une famille libre
4. Justifier que $\forall g\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K}),\exists!\,(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}, g=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i.f_i$

**ALG 42 (interpolation et polynômes de Lagrange)**
1. Soit $x_1,x_2$ et $x_3$ trois réels distincts. Donner $g$ polynôme de degré 2 vérifiant $g(x_1)=g(x_2=0$ et $g(x_3)=1$
2. Soient $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $n$ réels distincts, et $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ une famille de $n$ polynômes de degré $n-1$ vérifiant $f_i(x_i)=1$ et $f_i(x_j)=0$ pour $j\neq i$
   (a) Expliciter les $f_i$ et reconnaître $f_1+\cdots+f_n$
   (b) Montrer que $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Soit $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $f$ de degré strictement inférieur à $n$ tel que

   $$f(x_1)=y_1\qquad f(x_2)=y_2\qquad\ldots\qquad f(x_n)=y_n$$

   On écrira $f$ comme combinaison linéaire des $f_i$

## Sous-espaces vectoriels

**ALG 43**
Soit $Q\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul fixé et $n\geqslant 1$
On note $F_Q=\{Q.P\,|\,P\in\mathbb{K}_n[X]\}$.
Montrer que $F_Q$ est un sev de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$ et donner sa dimension

**ALG 44**
On note $F=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,M^T=M+\text{tr}(M).I_2\}$.
Montrer que $F$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en donner une base

**ALG 45**
Soient $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | x+2y-t=0\}$ et $B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | z-t=0\}$.
On considère $C=A\cap B$.

1. Justifier de deux manières différentes que $A$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, et en donner une base.
2. Donner la dimension de $B$ (on admet que c'est un sev)
3. $A$ et $B$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. Donner une base de $C$. A-t-on $A+B=\mathbb{R}^4$?
5. On note $D=\text{vect}((1,1,1,0),(0,1,0,1))$. Définir $D$ à l'aide d'un système d'équations.

**ALG 46**
Soit $Q\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul fixé.
On note $F_Q=\{Q.P\,|\,P\in\mathbb{K}[X]\}$.
Montrer que $F_Q$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$

**ALG 47**
On note $F=\{P\in\mathbb{R}[X], 2.P(X+1)=X.P'\}$

1. Montrer que si $P$ est un polynôme NON nul de $F$ alors $\deg(F)=2$
2. Montrer que $F$ est un sev de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base

**ALG 48**

1. Montrer que $F=\{aX^2+(a+b)X+2b\,|(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
2. Montrer que $F=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\sum_{i=1}^{n} i.a_i=0\}$ est un espace vectoriel
3. Montrer que $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,\begin{cases}x-y=0\\ x+z+t=0\end{cases}\}$ est un espace vectoriel
4. Montrer que $F=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P(1)=0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$
5. Montrer que $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f(1)=\int_0^1 f(t).dt\}$ est un espace vectoriel
6. Montrer que l'ensemble des fonctions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $y''+y=y(0)$ est un espace vectoriel

**ALG 49**
Soit $A=\begin{pmatrix}3&-1\\7&1\end{pmatrix}$ et $F$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$.
Montrer que $F$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension

**ALG 50**
On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Pour tout couple de réels $(\lambda,\mu)$ on note $\boxed{\begin{array}{rcl}f_{\lambda,\mu}:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&\lambda.t+\mu^2\end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl}g_{\lambda,\mu}:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&\lambda.t+\mu\end{array}}$
On note $F=\{f_{\lambda,\mu}\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$ et $G=\{g_{\lambda,\mu}\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que $F$ n'est pas un sev de $E$
2. (a) Montrer que $G$ est un sev de $E$
   (b) On considère $e_1=g_{1,0}$ et $e_2=g_{0,1}$
      i. Justifier que $(e_1,e_2)$ est une base de $G$
      ii. Donner $\dim G$
      iii. Montrer que $G$ est la stable $\circ$



**ALG 51**
Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,|\,AM=MA\}$ *(on l'appelle le commutant de A (HP))*

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel, stable par le produit interne.
   $\mathcal{C}_A$ peut-il être réduit au vecteur nul?
2. Que vaut $\mathcal{C}_{I_n}$?
3. Que peut-on dire de $\mathcal{C}_A$ lorsque $A$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
4. Etude d'un cas particulier.
   Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On note $A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
   Déterminer le commutant de $A$

**ALG 52**
Montrer que les ensembles suivants sont des sev et donner leur dimension

$$F=\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\,|\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}\qquad G=\{\begin{pmatrix}a&a+b&0\\b&a+b&c\\0&a-b&c\end{pmatrix}\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$$

**ALG 53**
Soit $E$ un ev de dimension finie.
On considère $H$ un hyperplan de $E$ et $F$ un sev de $E$ de dimension $p$.
Montrer que $F\cap H$ est un sev de dimension $p-1$ ou $p$

## Somme de sev

**ALG 54**
On note $E$ l'ensemble des matrices $2\times 2$ symétriques à coefficients réels, et $F$ l'ensemble des matrices diagonales.
On considère également $G=\text{vect}(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix})$.
Montrer que $E=F\oplus G$

**ALG 55**
Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $m\in\mathbb{R}$.
On note $F=\{(x,y,z)\in E\,|\,x+y+z=0\}$ et $D_m=\text{vect}((1,m,1))$.
Montrer que si $m\neq -2$ alors $F$ et $D_m$ sont supplémentaires dans $E$.
Que se passe-t-il lorsque $m=-2$?

**ALG 56**
Soit $E=\mathbb{R}_4[X]$ et $F=\{P\in E\,|\,P(0)=P'(0)=P'(1)=0\}$.

1. Montrer que $F$ est un sev de $E$, et déterminer une base de $F$
2. Montrer que $G=\text{vect}(1,X,1+X+X^2)$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$

**ALG 57**
Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$.
On note

- $F_1=\{P\in E,\,|\,P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

1. Déterminer une base de $F_1$ et une base de $F_2$
2. $F_1$ et $F_2$ sont-ils supplémentaires dans $E$?

**ALG 58**
Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$.
On note

- $F_1=\{\P\in E,|\,P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\{P\in E,|\,\exists Q\in\mathbb{R}[X],P=X.Q\}$

1. Déterminer une base de $F_1$ et une base de $F_2$
2. $F_1$ et $F_2$ sont-ils supplémentaires dans $E$?

**ALG 59**
Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\geqslant 2$
On note

- $F_1=\{P\in E,|\,P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

1. Montrer que $\dim F_1=n-1$
2. $F_1$ et $F_2$ sont-ils supplémentaires dans $E$?

**ALG 60**
Soit $E=\mathbb{R}[X]$
On note

- $F_1=\{P\in E,|\,P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

1. Rappeler le théorème de la division euclidienne et en déduire que $E=F_1+F_2$
2. $F_1$ et $F_2$ sont-ils supplémentaires dans $E$?

**ALG 61 (par Analyse-Synthèse)**
Soit $E=\mathbb{R}[X]$
On note

- $F_1=\{P\in E,|\,P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

Montrer par analyse-synthèse que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $E$?

**ALG 62**
Soit $n\geqslant 2$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On note $F=\{P\in E\,|\,P(2)=P(3)=0\}$ et $G=\mathrm{vect}(1,X)$

1. Rappeler la dimension de $E$ et donner celle de $G$
2. Déterminer une base et la dimension de $F$
3. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$

**ALG 63**
Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $F_n=\mathrm{vect}(A^0,A^1,\ldots,A^n)=\mathrm{vect}((A^k)_{0\leqslant k\leqslant n})$

1. Justifier que $\dim F_n\leqslant 4$ pour tout $n$
2. Justifier qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $A^2=a.A+b.I_2$
3. Montrer par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N},A^k\in F_1$
4. En déduire que $\forall n\geqslant 1,F_n=F_1$



**ALG 64**
On considère $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y+z-t=0\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y=0\}$

1. Montrer que $F,G$ et $F\cap G$ sont des sev de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension
2. Trouver deux sev $F_1$ et $G_1$ tels que $\mathbb{R}^4=(F\cap G)\oplus F_1\oplus G_1$

**ALG 65**
On note $F$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et $G=\{f\in C([0,1],\mathbb{R}\,|\,\int_0^1 f(t)dt=0\}$.
Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $C([0,1],\mathbb{R})$

**ALG 66**
On note:

- $E=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $F=\{f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})|f(0)=f'(0)=0\}$
- $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi_1:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&1\end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi_2:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&t\end{array}}$
- $G=\{a.\varphi_1+b.\varphi_2|(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que $G$ est un espace vectoriel et donner sa dimension. $G$ est-il un ensemble stable par la loi de composition $\circ$?
2. En procédant par analyse-synthèse, justifier que $F\oplus G=E$
3. Donner alors la décomposition de sin .

**ALG 67 (somme de $n$ sev)**
Soit $Q$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ et $p\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ on pose $F_k=\mathrm{vect}(X^k.Q)$.
Montrer que $F_1,F_2,\ldots,F_p$ sont en somme directe
Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $E$?

**ALG 68 (somme de $n$ sev)**
Soit $E=\mathbb{K}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
On pose pour tout $k\in[\![O,n]\!]$ on pose $F_k=\mathrm{vect}((X-a)^k)$
Montrer que $F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n=E$

**ALG 69 (somme de $n$ sev)**
Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}1&3&-3\\0&2&-2\\0&4&-4\end{pmatrix}$
On note $F_1=\ker(f-id),F_2=\ker(f+2id)$ et $F_3=\ker f$.

1. Sans déterminer $F_1,F_2$ et $F_3$, montrer qu'ils sont en somme directe.
2. Déterminer $F_1,F_2$ et $F_3$ puis justifier que $F_1\oplus F_2\oplus F_3=\mathbb{R}^3$

**ALG 70**
Soit $E$ un ev de dimension finie $n$, et $H$ un hyperplan de $E$.
Montrer que si $\vec{a}\notin H$ alors $H\oplus\mathrm{vect}(\vec{a})=E$

**ALG 71**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, $H_1$ et $H_2$ deux sous-espaces vectoriels distincts de $E$ de dimension $n-1$.

1. Montrer que $n\geqslant 2$
2. Montrer que $H_1+H_2=E$ et donner $\dim(H_1\cap H_2)$

**ALG 72**
On pose $F=\text{vect}((1,0,0,1)),G=\text{vect}((1,1,1,1))$ et

$$H_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x=z\,,y=t\}\qquad H_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x=-t\,,y=-z\}$$

1. A-t-on $\mathbb{R}^4=F\oplus G\oplus H_1$?
2. A-t-on $\mathbb{R}^4=F\oplus G\oplus H_2$?

**ALG 73**
On considère $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f(0)=f(\pi/2)=0\}$

1. Montrer que $F$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=F\oplus\text{vect}(\cos)\oplus\text{vect}(\sin)$

## Déterminants

**ALG 74 ( matrice antisymétrique et déterminant)**
Soit $A$ une matrice carrée antisymétrique d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Montrer que si $n$ est impair alors $A$ n'est pas inversible.

**ALG 75 (signe en damier)**
Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, b_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}$
Comparer $\det A$ et $\det B$

**ALG 76**
Soient $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u:P\mapsto a.P(X+2)+b.P(X+1)+c.P(X)$.
Montrer que $u$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ssi $a+b+c\neq 0$

**ALG 77 (classique)**
Calculer le déterminant d'ordre $n$ suivant : $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \swarrow & \vdots \\ 0 & \swarrow & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$

**ALG 78 (classique)**
Calculer le déterminant d'ordre $n$ de terme général $\min(i,j)$ et celui de terme général $\max(i,j)$.

**ALG 79 (déterminant de Vandermonde)**
Soit $n\geqslant 2$, et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$

On note $V_n(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$

1. Calculer $V_2(a_1,a_2)$ et $V_3(a_1,a_2,a_3)$ sous forme factorisée
2. On considère dans cette question le polynôme $V_n(a_1,\dots,a_{n-1},X)$
   (a) Que dire du degré de ce polynôme?
   (b) Que vaut le coefficient en facteur de $X^{n-1}$?
   (c) En déduire que $V_n(a_1,\dots,a_n)=V_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}).\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)$
3. Montrer que $V_n(a_1,\dots,a_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$



**ALG 80 (est-ce vraiment un exercice sur les déterminants?)**
Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
Nous allons montrer que $(n\neq p\Rightarrow\det(AB).\det(BA)=0)$.
On suppose que $n<p$

1. A-t-on $\det(AB)=\det(A).\det(B)$?
2. Donner les tailles respectives des matrices $AB$ et $BA$
3. Donner un majorant du rang des matrices $AB$ et $BA$
4. Conclure!

**ALG 81**
Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(X)$ la matrice d'ordre $n$ et de coefficient général $a_{ij}+X$.

1. Montrer que $\det(A(X))\in\mathbb{R}_1[X]$
2. Application:
   On note $A=\begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c\end{pmatrix}_n$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$
   (a) Dans le cas où $a\neq b$, calculer $\det(A(-a))$ et $\det(A(-b))$, puis en déduire $\det(A)$
   (b) Dans le cas où $a=b$, calculer $\det(A)$ par le moyen de votre choix

**ALG 82 (classique)**
Calculer le déterminant d'ordre $2n$ suivant : $D_n=\begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \swarrow & \\ 0 & & & & 0 \\ & \swarrow & & \ddots & \\ b & & 0 & & a\end{vmatrix}$

**ALG 83**
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a\end{vmatrix}$

**ALG 84**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$

1. Montrer que $(e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,\dots,\sum_{k=1}^{n}e_k)$ est une base de $E$
2. Soient $x_1,\dots,x_n$ des réels.
   On note $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$
   Montrer que $(e_1+x,e_2+x,\dots,e_n+x)$ est une base de $E$ ssi $\sum_{k=1}^{n}x_k\neq -1$

**ALG 85**
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre $n$.
Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ on note $D_i=diag(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\dots,\lambda_i^{n-1})$

1. Rappeler une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
2. Déterminer une cns pour que $(D_1,D_2,\dots,D_n)$ soit une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

**ALG 86**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M).A \end{array}$
Calculer $\det(f)$

**ALG 87**
Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $P(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & 1 & 2^2 & 3^2 \\ (x+2)^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ (x+3)^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ (x+4)^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \end{vmatrix}$

1. La fonction $P$ est-elle une fonction polynomiale? si oui, que dire de son degré?
2. Y a t il des racines évidentes de $P$?
3. Déterminer $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

**ALG 88**
Soit $(z_0,z_1,\dots,z_n)$ des complexes deux à deux distincts.
Montrer que $((X+z_k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

**ALG 89**
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $a$ un réel.
On considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = (X^3+X^2+X+1, aX^2+X+1, 2X^2+2X+a, X+1)$
Donner une cns sur $a$ pour que $\mathcal{F}$ soit une base de $E$

**ALG 90 (Polynômes de Bernstein)**
Soit $n \geqslant 1$ fixé.
On note $P_k = \binom{n}{k}.X^k.(1-X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

**ALG 91**
Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle.
On définit les deux endomorphismes $d_A$ et $g_A$ comme suit

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), d_A(M) = AM \quad \text{et} \quad g_A(M) = MA$$

1. Donner une cns sur A pour que $d_A$ et $g_A$ soient des automorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Calculer le déterminant de $d_A - g_A$

**ALG 92 (déterminants tridiagonaux)**
Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}_n$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $D_{n+2} = D_{n+1} + 2D_n$
2. En déduire l'expression de $D_n$ en fonction de $n$





**ALG 93**
Pour chacune des applications suivantes, vérifier qu'elles sont linéaires et déterminer image et noya. Indiquer celles qui sont injectives et/ou surjectives

$$f_1(x,y) = (4x+y, x-y, 2x+3y) \qquad f_2(x,y,z) = (x+y, 0, z, x+2y)$$

**ALG 94**
Soit $(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Justifier que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = e_1 - e_2 \qquad f(e_3) = e_1 + \lambda.e_3$$

définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir $\lambda$ pour que $f$ soit injective? surjective? pour que $f$ soit un automorphisme?

**ALG 95**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
2. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $f$

**ALG 96**
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c & -a \end{pmatrix} \end{array}$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire
2. $f$ peut-elle être bijective? surjective?
3. Déterminer le noyau et l'image de $f$.

**ALG 97**
1. Etude d'un cas particulier.
   Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1),P(2),P(3)) \end{array}$
   (a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme
   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme de $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 4, P(2) = 5$ et $P(3) = 6$
   (c) Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(1) = 1$ et $Q(2) = Q(3) = 0$. Pouvez-vous facilement le calculer?
2. Cas général.
   Soient $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$ $(n+1)$ réels distincts deux à deux. Soit $\boxed{\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_{n+1})) \end{array}}$
   (a) Montrer que $\varphi$ est une application linéaire surjective(!).
   (b) En déduire qu'il existe une famille unique de polynômes $(L_1,\dots,L_{n+1})$ de degré $\leqslant n$ tels que $L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

**ALG 98**

Soit $n \geqslant 1$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Donner le degré de $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$
   (b) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$
3. Soit $P$ un polynôme de degré $n$.
   Montrer que $(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \ldots, \varphi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
4. (a) Soient $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
   Combien existe t-il de polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient $P(X+1) - P(X) = Q(X)$? Combien en existe t-il qui vérifie en plus la condition $P(0) = 0$?
   (b) Déterminer un tel polynôme $P$ pour $Q = X(X+1)(X+2)$ et en déduire un expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$

**ALG 99**

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P) = \int_X^{X+1} P(t)dt$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire
2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ calculer $f(X^k)$. $f$ est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Prouver que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists !\, P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = Q$. A-t-on $\deg P = \deg Q$?
5. On note $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P'$.
   Montrer que $g \circ f = f \circ g$

**ALG 100**

$n$ est un entier supérieur ou égal à un.
Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le degré de $f(X^k)$.
3. En déduire $\ker f$, $\text{Im}\, f$ et $\text{rg}\, f$.

**ALG 101**

Soit $n \geqslant 2$. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On pose pour tout $M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M).I_n$

1. Montrer que $u$ est un automorphisme de $E$
2. Montrer que $u^2 - (n+2)u + (n+1).id_E = 0$
3. En déduire $u^{-1}$ en fonction de $u, id_E$ et $n$

**ALG 102**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = 0$.

1. Etude d'un cas particulier
   On considère l'application $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z-y,0,0) \end{array}$
   (a) Vérifier que $u^2 = 0$
   (b) Trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, u(\vec{x}) = f(\vec{x}).\vec{a}$
2. Etude du cas général
   (a) Montrer que $\dim \text{Im}\, u < 2$.
   (b) Montrer qu'il existe une app. linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, u(\vec{x}) = f(\vec{x}).\vec{a}$



**ALG 103**

Soit $\phi$ l'application suivante : $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & \phi_X \end{array}$ où $\phi_X$ est l'application qui à toute matrice $M$ associe $\text{tr}(MX)$

1. Dans le cas particulier où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donner $\phi_X$ ainsi que son image et son noyau.
2. Montrer que l'application $\phi$ est une application linéaire
3. Montrer l'équivalence $\phi_X = 0 \iff X = 0$
   (On pourra s'intéresser à $\phi_X(X^T)$)
4. Justifier que $\phi$ est un isomorphisme
5. On considère la forme linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + 2b + 3c \end{array}$
   Déterminer l'antécédent de $f$ par $\phi$

**ALG 104**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

On pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \dfrac{1}{k!a^k} X(X-a)\ldots(X-(k-1)a)$

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. On considère $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P(X+a) - P(X) \end{array}$.
   (a) Déterminer $f(P_k)$ pour tout $k$
   (b) Ecrire la matrice de $f$ dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$
   (c) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Im}\, f^k$ et $\ker f^k$

**ALG 105 (interpolation et polynômes de Lagrange)**

1. Soit $x_1, x_2$ et $x_3$ trois réels distincts. Donner $g$ polynôme de degré 2 vérifiant $g(x_1) = g(x_2 = 0$ et $g(x_3) = 1$
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n$ réels distincts, et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de $n$ polynômes de degré $n-1$ vérifiant $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$
   (a) Expliciter les $f_i$ et reconnaître $f_1 + \cdots + f_n$
   (b) Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $f$ de degré strictement inférieur à $n$ tel que
   $$f(x_1) = y_1 \qquad f(x_2) = y_2 \qquad \ldots \qquad f(x_n) = y_n$$
   On écrira $f$ comme combinaison linéaire des $f_i$

**Noyau et Image (abstrait)**

**ALG 106**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.

1. Montrer que $f$ est un automorphisme
2. Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f - 2id_E)$.
3. On suppose que $E$ est de dimension finie. Ecrire une matrice simple associée à $f$.

**ALG 107**
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$.
1. Montrer que $\ker(g\circ f)=\ker(f)\iff \ker(g)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)\iff E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$

**ALG 108**
Soit $f$ et $g$ deux applications linéaires de $E\to G$
1. Comparer $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g)$
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f+g)\leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$

**ALG 109**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3=id_E$
1. Montrer que $\mathrm{Im}(f-id_E)\subset\ker(f^2+f+id_E)$
2. En déduire que $\ker(f-id_E)$ et $\mathrm{Im}(f-id_E)$ sont supplémentaires dans $E$

**ALG 110 (noyaux et images itérés)**
Soit $f$ un endomorphisme de $E$.
1. Montrer que $\ker(f)\subset\ker(f^2)$
2. En déduire que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\ker(f^k)\subset\ker(f^{k+1})$
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2)\subset\mathrm{Im}(f)$
4. En déduire que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1})\subset\mathrm{Im}(f^k)$

**ALG 111 (noyaux et images itérés)**
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$, un espace vectoriel de dimension finie.
1. Prouver une inclusion entre $\ker(g)$ et $\ker(f\circ g)$, ainsi qu'une inclusion entre $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f)$
2. Justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\ker(f^k)\subset\ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1})\subset\mathrm{Im}(f^k)$
3. Justifier qu'il existe un plus petit entier $p$ tel que $\mathrm{rg}(f^p)=\mathrm{rg}(f^{p+1})$
   Dans la suite de l'exercice, $p$ gardera cette définition
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f^p)=\mathrm{Im}(f^{p+1})$. A-t-on $\ker(f^p)=\ker(f^{p+1})$?
5. Montrer par récurrence sur $k$ que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{p+k})=\mathrm{Im}(f^{p+k+1})$
6. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\ker(f^{p+k})=\ker(f^{p+k+1})$
7. Montrer que $\ker(f^p)\oplus\mathrm{Im}(f^p)=E$

**ALG 112**
Soit $E$ une espace vectoriel de dimension $n$.
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f\circ g=0$ et $f+g\in\mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $\mathrm{rg}\, f+\mathrm{rg}\, g=n$

**ALG 113**
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f\circ g=g\circ f$.
Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par $g$
*(c'est à dire que $g(\ker(f))\subset\ker(f)$ et $g(\mathrm{Im}(f))\subset\mathrm{Im}(f)$)*

**ALG 114 (Forme linéaire)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$.
Soit $f$ une *forme* linéaire sur $E$, càd une application linéaire de $E\to\mathbb{K}$
1. Que valent $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ si $f$ est l'application nulle?
2. On suppose que $f$ n'est pas l'application nulle.
   Montrer que $f$ est surjective et que $\ker(f)$ est un hyperplan de $E$



## Application et matrice

**ALG 115**
On définit $\varphi$ sur $\mathbb{C}_1[X]\times\mathbb{C}_1[X]$ à valeurs dans $\mathbb{C}_3[X]$ par $\varphi(P,Q)=(X^2+3).P+(4X-1).Q$
1. Montrer que $\varphi$ est une application linéaire
2. Montrer que $\mathcal{B}=((1,0,(0,1),(X,0),(0,X))$ est une base de $\mathbb{C}_1[X]\times\mathbb{C}_1[X]$
3. Ecrire la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée

**ALG 116 (automorphisme)**
On définit l'application $\phi$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\phi(P)=X(X-1)P'(X)-(2X+1)P(X)$.
1. Prouver que $\phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que $(X^2,X^2-X,X^2-2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner la matrice $D$ de $\phi$ dans cette base.
3. Donner des matrices semblables à $D$

**ALG 117**
Soit $E$ un ev de dimension 4, $F$ un ev de dimension 3, et $u\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de rang 2.
Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de $E$ et $\mathcal{C}$ base de $F$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

**ALG 118**
On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$
1. Donner l'expression de $f(x,y,z)$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et vérifier que $((1,1,-2),(1,-1,0))$ est une base de $\ker(f)$
3. On souhaite montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}=(e_{1,2},e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
   (a) Est-il possible de choisir $e_2=(1,1,-2)$ ou $e_2=(1,-1,0)$?
   (b) On pose $e_2=(1,0,-1)$.
   Déterminer des vecteurs $e_1$ et $e_3$ qui répondent au problème posé.

**ALG 119**
Soit un entier $n\geqslant 3$, et $\Delta$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$
1. Montrer que $P\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Déterminer son image et son noyau
2. Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$P(X+1)-P(X)=Q(X)\qquad\text{et}\qquad P(0)=\lambda$$
3. Soit $P$ de degré $n$. Montrer que $(P,\Delta(P),\ldots,\Delta^2(P),\ldots,\Delta^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_[X]$

**ALG 120**
Soit $\boxed{\begin{array}{rccl}u: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (x,y,z) & \longmapsto & (y+z-x).(1,0,1)\end{array}}$
On note $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'=(\vec{i}+\vec{k},\vec{j}-\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$
1. Ecrire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$
2. Calculer l'image de la base $\mathcal{B}'$ par $u$ et en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$

3. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P$ telle que $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=P^{-1}.\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.P$

   Donner $P$.

**ALG 121**

Dans le $\mathbb{R}$ espace vetoriel $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère la famille $\mathcal{B}=(\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ et $F=\mathrm{vect}\,\mathcal{B}$

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $F$
   (b) Montrer que $F$ est un sev stable par la dérivation
2. (a) On note $f$ l'endomorphisme de $F$ induit par la dérivation et $M$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$
      i. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$
      ii. Montrer que $f$ est un automorphisme de F et calculer la matrice de $f^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$

**ALG 122**

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X]\\ P(X) & \longmapsto & P(-1).X.(X-2)+P(0).(X-2).(X+1)+P(2).X.(X+1)\end{array}}$

1. $f$ est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. On note $A$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$.
   Donner $A$
3. On note $A_1$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1=(3X^2,2X,1)$.
   (a) Donner $A_1$
   (b) Donner la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.
   (c) Quelle relation existe-t-il entre $A$, $A_1$ et $P$?
4. On note $P_1(X)=X^2-2X, P_2(X)=X^2+X$ et $P_3(X)=X^2-X-2$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'=(P_1(X),P_2(X),P_3(X))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   (b) Ecrire la matrice de passage $P'$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
   (c) Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$
   (d) On considère le polynôme $Q(X)=3X^2-6$
      i. Quelles sont les coordonnées de $Q(X)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
      ii. Calculer $f^{2030}((Q(X)))$ !

**ALG 123 (classique - homothétie)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}-$ev et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\forall\vec{x}\in E,(\vec{x},f(\vec{x}))$ est liée.
   (a) Montrer que l'hypothèse revient à supposer que pour tout vecteur $\vec{x}\neq\vec{0}$ il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ (scalaire qui dépend de $\vec{x}$ a priori) tel que $f(\vec{x})=\lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
   (b) Soit $(\vec{x},\vec{y})$ une famille libre. En considérant le vecteur $\vec{x}+\vec{y}$ montrer que $\lambda_{\vec{x}}=\lambda_{\vec{y}}$
   (c) Soit $(\vec{x},\vec{y})$ une famille liée de vecteurs non nuls. Montrer que $\lambda_{\vec{x}}=\lambda_{\vec{y}}$
   (d) Montrer que $f$ est une homothétie
2. On suppose que $E$ est de dimension finie et que $f$ n'est pas une homothétie.

   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}f=\begin{pmatrix}0&?&\dots&?\\1&?&&?\\0&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&?&\dots&?\end{pmatrix}$.



**ALG 124 (représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent d'indice $n-1$)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et, $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.

Nous allons montrer qu' il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\dots&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$.

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies?
   i. pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$, on a $f^n(\vec{x})=\vec{0}$
   ii. pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$, on a $f(\vec{x})=\vec{0}$
   iii. pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$, on a $f^{(n-1)}(\vec{x})\neq\vec{0}$
   iv. il existe un vecteur $\vec{x}_0$ de $E$ tel que $f^{n-1}(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$
2. On va étudier le cas $n=3$.
   On note $\vec{x}_0$ un vecteur tel que $f^2(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$
   (a) Montrer que la famille $(\vec{x}_0,f(\vec{x}_0),f^2(\vec{x}_0))$ est une famille libre de $E$
   (b) Justifier que cette famille est une base de $E$
   (c) Ecrire la matrice de $f$ dans la base $(\vec{x}_0,f(\vec{x}_0),f^2(\vec{x}_0))$. A-t-on le résultat souhaité? Sinon donner une autre base.

**ALG 125 ( endomorphisme nilpotent d'ordre 2)**

Soit $E$ un $\mathbb{K}-$ev de dimension $n$.

1. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $\mathrm{Im}\,f=\ker f$ .
   (a) montrer que $n$ est un entier pair
   (b) déterminer le rang de $f$ en fonction de $n$.
   (c) montrer que pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$ on a $(f\circ f)(\vec{x})=\vec{0}$
2. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $f\circ f=0$ et $n=2\,\mathrm{rg}\,f$
   (a) montrer que $\mathrm{Im}\,f\subset\ker f$
   (b) en déduire que $\ker f=\mathrm{Im}\,f$
   (c) montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}f=\begin{pmatrix}0&0\\I_p&0\end{pmatrix}$ où $p=\dfrac{n}{2}$
   (on pourra commencer par traiter le cas $n=4$)

**ALG 126**

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$

1. Déterminer le rang de $A$ et une base de $\mathrm{Im}(A)$
2. Vérifier que $f(i)\in\ker(A)$ puis déterminer une base de $\ker(A)$ contenant $f(i)$
3. A-t-on $\mathrm{Im}(A)\oplus\ker(A)=\mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est la matrice de $f$ dans une certaine base
5. Calculer $(I+A)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$

**ALG 127**
Soit $E$ un ev de dimension $n$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $E$ et $g \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.
On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} - g(\vec{x}).\vec{u} \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$
2. Ecrire la matrice de $f$ dans une base judicieuse, et en déduire $\mathrm{rg}(f)$

**ALG 128**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $u$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
On appelle dans ce cas INDICE DE NILPOTENCE l'entier $p \geqslant 1$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$

1. Soit $u$ un endomorphisme nilpotent et $p$ son indice de nilpotence
   (a) Montrer que $id_E - u$ est inversible d'inverse $id_E + u + \cdots + u^{p-1}$
   (b) Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$
   (c) Montrer que $(a,u(a),\ldots,u^{p-1}(a))$ est une famille libre
   (d) On note $F$ le sev de $E$ engendré par cette famille. Montrer que $F$ est stable par $u$
   (e) On note $v$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$.
   Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ de $F$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$
   (f) Montrer que $\ker(v) \subset \mathrm{Im}(v)$ et donner $\mathrm{rg}(v)$
2. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.
   On note $F$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $f$.
   On suppose que $\dim E = n$ et que $f$ est nilpotent d'indice $n-1$
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur $a$ tel que $(a,f(a),\ldots,f^{n-1}(a))$ soit une base de $E$
   (b) Montrer que $(id_E,f,\ldots,f^{n-1})$ est une famille libre
   (c) Montrer que $F$ contient $\mathrm{vect}(id_E,f,\ldots,f^{n-1})$
   (d) Soit $g \in F$.
   Montrer qu'il existe $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ tels que $g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.f^k(a)$.
   En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.f^k$
   (e) En déduire que $F$ est un espace vectoriel de dimension $n$

**ALG 129**
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $f_k : x \mapsto e^{kx}$
On considère le $\mathbb{R}-$ev $E_2 = \mathrm{vect}(f_0,f_1,f_2)$

1. Déterminer la dimension de $E_2$
2. On considère l'application linéaire $\varphi : f \mapsto f'$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$
3. On note $A = \mathrm{Mat}_{(f_0,f_1,f_2)}(\varphi)$
   (a) Montrer que $(I_3,A,A^2,A^3)$ est une famille liée et donner une relation entre ces matrices
   (b) En déduire que $\forall f \in E_2, f^{(3)} = 3.f^{(2)} - 2.f'$
   (c) Montrer que $\forall g \in E_2, \exists !\, f \in E_2, f^{(2)} + f' + f = g$





**ALG 130**
Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P = P(X) & \longmapsto & P(-X) \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $f$ est une symétrie et donner ses éléments
2. Déterminer la trace et le déterminant de $f$

**ALG 131**
Soit $n \geqslant 1$ et $Q$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(0).Q \end{array}$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de $\varphi$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $Q$ pour que $\varphi$ soit un projecteur

**ALG 132**
Soit $E = \mathbb{R}^2$
On note $F_1 = \mathrm{vect}((1,-1))$ et $F_2 = \mathrm{vect}((1,0))$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = E$
2. Donner l'expression de la projection sur $F_1$ parallèlement à $F_2$
3. Donner l'expression de la symétrie par rapport à $F_2$ parallèlement à $F_1$

**ALG 133**
Soit $E$ un ev et deux projecteurs $p$ et $q$ de $E$ tels que $p \circ q = 0$.
On définit l'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$

1. Justifier une inclusion entre $\mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p)$
2. Montrer que $r$ est un projecteur
3. Montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$
4. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$
5. Montrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$

**ALG 134**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $F$, $E_1$ et $E_2$ trois de ses sev tels que $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$.
On note $p_1$ [$p_2$] la projection sur $F$ parallèlement à $E_1$ [$E_2$]

1. Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2$
2. On note $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $E_1$ et $(e'_1,\ldots,e'_p)$ une base de $E_2$.
   On note aussi $(f_1,\ldots,f_q)$ une base de $F$
   (a) Que peut-ton dire des familles $(f_1,\ldots,f_q,e_1,\ldots,e_p)$ et $(f_1,\ldots,f_q,e'_1,\ldots,e'_p)$?
   (b) On considère $g$ un application linéaire telle que $\begin{cases} \forall k \in [\![1,q]\!], g(f_k) = f_k \\ \forall k \in [\![1,p]\!], g(e_k) = e'_k \end{cases}$
      i. Justifier l'existence et l'unicité de $g$
      ii. $g$ est-elle bijective?
      iii. Montrer que $p_1 = g^{-1} \circ p_2 \circ g$

**ALG 135**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f+g=id_E$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant n$

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f=\ker g$
2. Qu'en déduit-on sur $g\circ f$ ?
3. Montrer que $g$ et $f$ sont deux projecteurs
4. Que représente pour $f$ le noyau de $g$ ?

**ALG 136**
Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathcal{B}=(X^2,X+1,X-1)$.

On considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A=\dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $f$ est un projecteur et donner son rang
2. Déterminer les éléments de $f$. (on fournira une équation de $\mathrm{Im}\, f$ dans la base $\mathcal{B}$
3. Donner l'expression de $f(aX^2+bX+c)$

**ALG 137**
On considère les trois triplets $e_1=(1,2,1), e_2=(1,0,-1)$ et $e_3=(-2,1,1)$.
On note $E=\mathbb{K}^3,\ F=\mathrm{vect}(e_1)$ et $G=\mathrm{vect}(e_2,e_3)$

1. Montrer que $F\oplus G=\mathbb{K}^3$
   On note dorénavant $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.
2. Déterminer l'expression analytique de $p$. (càd $p((x,y,z))$ pour $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$)
3. On note $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.
   A l'aide d'un dessin, donner sans justification une relation entre $s$ et $p$ ainsi que la matrice de $s$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$
4. On considère un réel $\lambda\in\mathbb{K}$ et on définit l'endomorphisme $u=\lambda.id_E-s$.
   Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'expression de $u^n$ en fonction de $p$ et $id_E$.
   Déterminer les entiers $n$ pour lesquels $u^n$ est une homothétie.

**ALG 138**
Soient $f$ et $g$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à $A=\begin{pmatrix}4&2&4\\0&2&-4\\0&-1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$

On note $h=\dfrac{1}{4}f$

1. Préciser parmi $f,g$ et $h$ s'il y a des projecteurs et des symétries.
2. Donner les éléments géométriques de $g$ et $h$
3. Comment décrire $f$ ?

**ALG 139**
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(i,j,k)$ on considère le plan $P$ d'équation $x+y-z=0$
et la droite $D=\mathrm{vect}(i-j+2k)$
Déterminer la matrice dans la base $(i,j,k)$ de

1. la projection orthogonal sur $D$
2. la projection orthogonal sur $P$
3. la projection sur $P$ parallèlement à $D$



**ALG 140**
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ A & \longmapsto & A^T\end{array}$ avec $n\geqslant 2$

1. Dans le cas $n=2$, justifier que $f$ est une symétrie et donner ses éléments
2. Même question dans le cas général.
3. Donner le déterminant et la trace de $f$

**ALG 141**
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P=P(X) & \longmapsto & P(-X)\end{array}$ avec $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que $f$ est une symétrie et donner ses éléments
2. Déterminer la trace et le déterminant de $f$

**ALG 142**
On note $E=\mathbb{R}_2[X]$.
On note $F=\{P\in E\,|\,\displaystyle\int_0^1 P(t)dt=0\}$ et $G=\mathrm{vect}(X^2+X+1)$

1. Montrer que $F$ est un sev de $E$, et donner une base de $F$
2. Justifier que $F\oplus G=E$
3. On note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.
   Donner l'expression de $p(P)$ en fonction de $P$ et de $\int_0^1 P(t)dt$

-

**ALG 143**
On note $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k.X^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}.X^k\end{array}$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que $\ker(f-id_E)\oplus\ker(f+id_E)=E$
3. Ecrire la matrice de $f$ dans la base canonique de $E$.
4. Donner la trace de $f$, et en déduire la dimension des deux sev ci-dessus

**ALG 144**
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
On considère

- le plan $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=0\}$
- la droite $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,\begin{cases}x-y+z&=0\\x+y+2z&=0\end{cases}\}$

1. Montrer que $P$ et $D$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur $P$ parallèlement à $D$
3. Faire de même avec la symétrie par rapport à $P$ parallèlement à $D$

**ALG 145**
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+\frac{y}{2}+z,\frac{y}{2}-z,-\frac{y}{4}+\frac{z}{2})\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+4y+4z,-x-y-2z,-x-2y\end{array}$

1. Montrer que $f$ est un projecteur et $g$ une symétrie
2. Donner des équations des espaces caractéristiques de $f$ et de $g$

**ALG 146**
Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(I_n) \oplus \ker(\mathrm{tr})$
2. Soit $p$ la projection sur $\mathrm{vect}(I_n)$ parallèlement à $\ker(\mathrm{tr})$.
   Donner pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'expression de $p(M)$
3. Que vaut la projection sur $\ker(\mathrm{tr})$ parallèlement à $\mathrm{vect}(I_n)$?

**ALG 147**
Soit $E$ un ev et $p$ un projecteur de $E$.
On considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathcal{L}(E)$ qui a tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ associe $f \circ p - p \circ f$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$
2. Montrer que si $\varphi(f) = 0$ alors $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par $f$.
   (càd que $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $f(\ker(p)) \subset \ker(p)$)
3. On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par $f$, et l'on souhaite montrer que $\varphi(f) = 0$
   (a) Soit $\vec{x}$ un vecteur de $E$.
      i. Ecrire $\vec{x}$ comme la somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}(p)$ et d'un vecteur de $\ker(p)$
      ii. En déduire que $p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x}))$
   (b) Conclure

**demo de cours**

**ALG 148 (démo du théo 2 sev)**
Montrer l'équivalence entre

i) $F_1$ et $F_2$ sont en somme directe (càd $\forall x \in F_1 + F_2, \exists!\,(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$)
ii) s'il existe $(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, \vec{0} = x_1 + x_2$ alors $x_1 = x_2 = 0$
iii) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

**ALG 149 (démo du théo 6 sev)**
Montrer que si $(x_1, \ldots ,x_k,x_{k+1}, \ldots ,x_n)$ est une famille libre de $E$ alors les sev $\mathrm{vect}(x_1, \ldots ,x_k)$ et $\mathrm{vect}(x_{k+1}, \ldots ,x_n)$ sont en somme directe.

**ALG 150 (démo du théo 8 sev)**
Montrer qu'une sous-famille d'une famille libre est encore libre

**ALG 151 (démo de la rem 9 sev)**
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots ,x_n)$ une famille de vecteurs et $x$ un vecteur.
On suppose que $\mathcal{F}$ est libre et que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est une famille liée.
Montrer que $x \in \mathrm{vect}(\mathcal{F})$

**ALG 152 (démo du théo 19 sev)**
Soient $\mathcal{F}_1 = (x_1, \ldots ,x_k)$ une famille génératrice de $F_1$ et $\mathcal{F}_2 = (y_1, \ldots ,y_p)$ une famille génératrice de $F_2$.
Montrer que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$

**ALG 153 (démo de cours)**
Montrer que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ ssi la décomposition du vecteur nul est unique.

**ALG 154 (démo théo 4 app lin)**
Soit $f$ une application linéaire de $E \to G$

1. Soit $F$ un sev de $E$. Montrer que $f(F)$ est un sev de $G$
2. Soit $H$ un sev de $G$. Montrer que $f^{-1}(H) = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) \in H\}$ est un sev de $E$



**ALG 155 (démo théo 13 app lin)**
On considère $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,G)$ et $F$ un supplémentaire de $\ker(u)$
On note $v$ la restriction de $u$ à $F$, càd $\boxed{\begin{array}{rcl} v : F & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}}$
Montrer que $v$ est un isomorphisme

**ALG 156 (presque une démo de cours!)**
Soit $f$ une application linéaire de $E \to G$ et $\lambda$ un scalaire non nul.

1. Montrer que $\ker(\lambda.f) = \ker(f)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\lambda.f) = \mathrm{Im}(f)$

**ALG 157 (produit de deux matrices élémentaires - démo à savoir)**
Montrer que $E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}.E_{il}$

**ALG 158 (produit de deux matrices triangulaires)**
Soient $A$ et $B$ deux matrices triangulaires supérieures d'ordre $n$. On note $C = AB$
Montrer que $C$ est une matrice triangulaire supérieure et que $\forall i \in [\![1,n]\!], c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

**ALG 159 (théo 14, matrices)**

1. Montrer que si $A$ est inversible alors son inverse est unique
2. Montrer que le produit de 2 matrices inversibles $A$ et $B$ est inversible et que l'on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**ALG 160 (théo 30, matrices)**
Montrer que "être semblable" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**ALG 161 (on redémontre ici un résultat de cours)**
Soit $f$ un endomorphisme et $\lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3$ trois de ses vp distinctes.

1. Montrer que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$
2. Montrer que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3}$

**Matrices semblables**

**ALG 162**
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables

**ALG 163 (matrices semblables)**
Soient les deux matrices d'ordre 3 suivantes: $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A$ et $B$ ont même rang, même déterminant, même trace.
2. Calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$.
3. En déduire que $A$ et $B$ ne sont pas semblables. (si possible, de deux manières différentes)

**ALG 164 (symétrie)**
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_2$ avec $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$. Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**ALG 165**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
Montrer que $A^2 = 0_n$ ssi $A$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$

**ALG 166**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice semblable à une matrice diagonale $D$ qui a pour coefficients diagonaux 0,1 et 4.
Montrer que $A^3 = 5A^2 - 4A$.
Si $f$ est un endomorphisme associé à la matrice $A$, que peut-on dire de $f^3$?

## Polynôme caractéristique

**ALG 167**
Déterminer le polynôme caractéristique de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+6y+2z, 2x+9y+4z, 3z) \end{array}$

**ALG 168**
Déterminer le polynôme caractéristique de $\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Une remarque?

**ALG 169**
Soit $n \geqslant 2$.
On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{ij} = i$.
Déterminer $\chi_A(X)$. *(On verra plus tard un moyen moins calculatoire d'obtenir le résultat!)*

**ALG 170**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \geqslant 2$

1. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 1$ alors $\chi_f(X)$ est de la forme $X^n + a_{n-1}.X^{n-1}$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2$ alors $\chi_f(X)$ est de la forme $X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + a_{n-2}.X^{n-2}$.

**ALG 171**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\chi_A$
2. Vérifier que $\chi_A(A) = 0$
3. En déduire $A^n$ pour tout $n \geqslant 0$

**ALG 172**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + 3u + 4id = 0$.

1. Montrer que $u$ ne possède pas de valeurs propres (réelles).
2. On suppose que $E$ est de dimension finie. Montrer que $\dim E$ est un nombre pair.

**ALG 173**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note $g = f - id_E$ et $h = 2id_E - 3f$
Déterminer $\chi_g$ en fonction de $\chi_f$, et montrer que $\chi_h(X) = 3^n.\chi_f\left(\frac{X-2}{3}\right)$

## Eléments propres

**ALG 174**
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on considère $\boxed{s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}}$ ainsi que $\boxed{p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + M^T) \end{array}}$

Déterminer les éléments propres de $s$ et $p$



**ALG 175**
Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x) \end{array} \qquad g_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{kx} \end{array} \qquad h_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array}$$

1. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre.
2. (a) Montrer que la famille de fonctions $(g_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre.
   (b) On considère $\varphi : \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$
      i. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}, \varphi(g_k)$
      ii. Retrouver le résultat de la question a) ci-dessus
3. Montrer que la famille de fonctions $(h_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre.
4. A-ton le même résultat si dans la définition de $h_k$ on remplace cos par sin?

**ALG 176**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $f$.
   *(on pourra commencer par déterminer le degré des vecteurs propres)*

**ALG 177**
Soit $u$ un endomorphisme de $E$.

1. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $u$ alors $\lambda^2$ est une valeur propre de $u^2$.
   A-t-on $\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda^k$ valeur propre de $u^k$?
2. Montrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de $u$ alors $\vec{x}$ est aussi un vecteur propre de $u^2$.
   La réciproque est-elle vraie?

**ALG 178**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$ev de dimension finie, et $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$.

1. Montrer que si 0 est vp de $f \circ g$ alors 0 est aussi vp de $g \circ f$
2. On suppose que $\lambda \neq 0$ est vp de $f \circ g$ associé au vecteur propre $\vec{x}$.
   Montrer que $\lambda$ est aussi vp de $g \circ f$
3. En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

**ALG 179**
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A$ une matrice non nulle de $E$.
On considère $\boxed{f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A).M \end{array}}$ et $\boxed{g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M).A \end{array}}$.
Déterminer les éléments propres de $f$ et $g$

**ALG 180**
Soit $0 < q \leqslant p \leqslant n$, et $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad q \quad & \quad n-q \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ \\ \\ n-p \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Déterminer les éléments propres de $A$.

**ALG 181**
Soit $f$ un endomorphisme de $E$.
Soit $\vec{x}$ un $\vec{v}.p$ de $f$ associé à une valeur propre $\lambda$.

1. (a) Monter que si $\lambda \neq 0$ alors $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$
   (b) Montrer que si $\lambda = 0$ alors $\vec{x} \in \ker(f)$
2. On note $g = 2.f$.
   Montrer que $\vec{x}$ est $\vec{v}.p$ de $g$. Quelle est la vp associé?
3. On suppose que de plus $f$ est bijective (càd $f$ est un automorphisme de $E$)
   (a) Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\vec{x}$ est $\vec{v}.p$ de $f^{-1}$. Quelle est la valeur propre associée?
   (b) Justifier que $E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$

**ALG 182 (sev stables)**
Soit $E$ un espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$.
On rappelle que le sev $F$ est dit stable par $f$ lorsque $f(F) \subset F$

1. Des résultats généraux
   (a) Montrer que la droite vectorielle $D = \mathrm{vect}\,\vec{u}$ est stable par $f$ ssi $\vec{u}$ est un vecteur propre de $f$
   (b) Soit $P = \mathrm{vect}(\vec{u},\vec{v})$.
   A-t-on l'équivalence
   $$P \text{ sev stable par } f \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ vecteurs propres de } f$$
   (c) Montrer que la somme de deux droites vectorielles stables est un sev stable.
2. Etude d'un cas particulier:
   On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer des sev stables par $f$

**ALG 183**
Soit $E$ un ev, $f$ un endomorphisme. On note $g = f - id_E$
Comparer les spectres et les sous-espaces propres de $f$ et $g$

**ALG 184**
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A$ une matrice non nulle de $E$.
On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A).M \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g : E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M).A \end{array}}$.
Déterminer les éléments propres de $f$ et $g$

**ALG 185**
Soit $n \geqslant 1$.
Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(1)X + P(4) \end{array}$
(On pourra commencer par $n = 2$)

**ALG 186**
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la valeur de $a$ pour que 2 soit valeur propre de $f$



**ALG 187**
Trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres

**ALG 188**
Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
On considère l'endomorphisme $\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{array}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \begin{cases} O & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}.\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{sinon} \end{cases}$
Déterminer les éléments propres de $T$.
*On devra trouver $sp(T) = ]0,1[$ et que les sep sont des droites vectorielles*

**ALG 189**
On considère les 3 fonctions
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x.e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2.e^x \end{array}$$

1. Montrer que ces 3 fonctions forment une famille libre.
   On note $E = \mathrm{vect}(f,g,h)$ et $\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$
2. • Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$
   • Déterminer les éléments propres de $\varphi$.

## Réduction

**ALG 190**
Soit la matrice $A = (\frac{i}{j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
$A$ est-elle diagonalisable?

**ALG 191**
Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{3}(-7x+2y, -2x-11y) \end{array}}$

1. Montrer que $f$ est trigonalisable (dans $\mathbb{R}$)
2. Donner une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire supérieure
3. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

**ALG 192**
L'ensemble des matrices diagonalisables d'ordre $n$ est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

**ALG 193**
Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont méme rang, méme trace, méme déterminant, méme valeur propre, méme dimension du sep et pourtant ne sont pas semblables (calculer leurs carrés!)!

**ALG 194**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha-4 & \alpha+1 \\ -\alpha-1 & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$
Réduire la matrice $A_\alpha$

**ALG 195**
Soit $E=\mathbb{R}^3$.
On définit $f\in\mathcal{L}(E)$ par $f(x,y,z)=(2x+8y,-x+8y-z,2x-4y+4z)$ .
Les calculs donnent

- $\chi_f(X)=(X-6)^2(X-2)$
- $E_2=\operatorname{vect} e_1$ avec $e_1=(-1,0,1)$
- $E_6=\operatorname{vect} e_2$ avec $e_2=(2,1,0)$

1. $f$ est-elle diagonalisable? triangularisable?
2. Justifier qu'il existe un vecteur $e_3$ tel que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$
3. Justifier que $T=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f=\begin{pmatrix} . & . & b\\ . & . & a\\ . & . & .\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
4. En considérant $\dim\ker(f-6id_E)$, montrer que $a\neq 0$
5. Montrer qu'il existe un vecteur $e_3$ tel que $a=1$ et $b=0$

**ALG 196 (puissances d'une matrice triangulaire nilpotente(classique))**
Soit $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
On veut montrer que $T^n=0$.
Pour cela on considère $f$ l'endo.cano. asso. à $T$, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$
On note pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $F_k=\operatorname{vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_k)$ et $F_0=\{\vec{0}\}$

1. Montrer que $f(F_1)=F_0$
2. Montrer que $\forall k\in[\![1,n]\!], f(F_k)=\operatorname{vect}(f(\vec{e}_1),f(\vec{e}_2),\dots,f(\vec{e}_k))$
3. Montrer $\forall k\in[\![1,n]\!], f(F_k)\subset F_{k-1}$
4. En déduire $f^n(F_n)$, puis que $T^n=0$
5. Dans le cas $n=3$, en effectuant un calcul matriciel, retrouver que $T^3=0$

**ALG 197**
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

On souhaite montrer que $f$ se trigonalise sous la forme $T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

Les calculs donnent $P_f(X)=(X-2)^3$ et $E_2$ est le plan d'équation $x+y+z=0$

*On sait que la question revient à déterminer une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que* $\begin{cases} f(\vec{e}_1) &= 2\vec{e}_1\\ f(\vec{e}_2) &= 2\vec{e}_2\\ f(\vec{e}_3) &= \vec{e}_2+2\vec{e}_3\end{cases}$

1. A quels espaces $\vec{e}_2$ doit-il nécessairement appartenir?
   Déterminer alors un vecteur $\vec{e}_2$ possible
2. Déterminez un vecteur $\vec{e}_3$ possible ainsi qu'un vecteur $\vec{e}_1$
3. Vérifiez que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est bien une base.
4. Conclure, et écrire une égalité liant les matrices $A$ et $T$

**ALG 198**
Soit $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\boxed{f\in\mathcal{L}(E) \text{ définie par } f(P)=P+P'+P''+\cdots+P^{(n)}}$
Montrer que $f$ est trigonalisable, mais n'est pas diagonalisable.



**ALG 199**
Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&-2\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A$ est trigonalisable et trigonaliser la matrice $A$
2. Montrer que les matrices $A$ et $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ sont semblables

**ALG 200**
Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}4&-1&1&7\\9&-2&-7&1\\0&0&5&8\\0&0&-2&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables.
3. $A$ et $C$ sont-elles semblables?

**ALG 201**
Réduire les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-4&-6&0\\3&5&0\\3&6&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&8&0\\-1&8&-1\\2&-4&4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}11&-9&3\\3&-1&3\\0&0&8\end{pmatrix}$$

**ALG 202 ($\dim E=3$ et $f$ possède une vp simple et une double)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$ev de dimension 3, et $f$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que $f$ n'est pas diagonalisable, et que $f$ posséde deux valeurs propres distinctes.

1. Expliquer pourquoi il existe $\lambda\neq\mu$ tel que $P_f(X)=(X-\lambda)(X-\mu)^2$
2. Donner la dimension de chaque sep
3. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de $f$ est du type $\begin{pmatrix}\lambda&0&a\\0&\mu&b\\0&0&\mu\end{pmatrix}$
4. Justifier que $b\neq 0$ (on pourra considérer $\dim\ker(f-\mu id_E)$ et $\operatorname{rg}(f-\mu id_E)$
5. En posant $\vec{\varepsilon}_3=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$,

   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ pour laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&1\\0&0&\mu\end{pmatrix}$
6. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix}\mu&1&0\\0&\mu&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix}\mu&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix}\mu&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$?

**ALG 203**
Soit $k\in\mathbb{R}$.
On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}4k-1&1-2k\\6k-2&2-3k\end{pmatrix}$

1. Etudier la diagonalisabilité de $A$
2. On se place dans le cas où $A$ est diagonalisable
   (a) Donner les matrices $P$ et $D$ telles que $A=P.D.P^{-1}$
   (b) Déterminer $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}$

**ALG 204**
Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&3&0\\8&2&4\end{pmatrix}$

1. Justifier que $A$ est diagonalisable
2. On note $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\-6&-2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.
   Justifier que $A=P.D.P^{-1}$
3. On souhaite déterminer toutes les matrices $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2=A$.
   (a) A l'aide de la décomposition ci-dessus, donner 8 matrices $X$ qui vérifient $X^2=A$
   (b) Montrer que si $X^2=A$ alors forcément $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale.
   (on pourra remarquer que si $X^2=A$ alors $AX=XA$)
   (c) En déduire toutes les matrices $X$ telles que $X^2=A$

**ALG 205**
Soit $n\geqslant 1$ et $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\P(X)&\longmapsto&(2X+1).P(0)\end{array}$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Calculer $f\circ f$.
3. $f$ est-il diagonalisable? Donner ses éléments propres

**ALG 206**
Déterminer les éléments propres et indiquer si les matrices suivantes sont diagonalisables

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

**ALG 207**
Soit $u$ et $v$ deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que si $u$ est diagonalisable alors $u^2$ est diagonalisable.
   *(On fera une démonstration avec matrice et une sans matrice)*
2. Montrer que si $v$ est diagonalisable alors il existe au moins un endomorphisme $u$ diagonalisable tel que $u^2=v$.
3. Soit $\mu$ une valeur propre non nulle de $u^2$ et $\lambda$ un complexe tel que $\lambda^2=\mu$
   Montrer que : $\ker(u^2-\mu.id)=\ker(u-\lambda.id)\oplus\ker(u+\lambda.id)$.

**ALG 208**
Soit $n>0$
On considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)=nXP-(X^2-1)P'$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que la famille $(1,X-1,\dots,(X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de $\varphi$ dans cette base.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de $\varphi$
4. L'application $\varphi$ est-elle diagonalisable?



**ALG 209**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2-3f+2id_E=0$.

1. Montrer que $E=\ker(f-id_E)\oplus\ker(f-2id_E)$.
2. On suppose que $E$ est de dimension finie.
   $f$ est-il diagonalisable? Montrer que $0\leqslant\dfrac{\ln(\det(f))}{\ln 2}\leqslant\dim E$

**ALG 210**
Soit $n>0$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P\in E$, on pose $f(P)=X.(1-X).P'+n.X.P$

1. Montrer que $P$ est un endomorphisme de $E$
2. Déterminer le spectre de $f$.
3. On souhaite déterminer maintenant les sous-espaces propres
   (a) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX-\lambda}{X.(1-X)}$
   (b) En vous aidant d'une équation différentielle, déterminer les sep de $f$
4. $f$ est-elle diagonalisable?

**ALG 211**
On note $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3\\1/3&0&1\end{pmatrix}$ et on définit $E=\{aI_3+bA+cA^2|(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$

1. Montrer que $E$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3\in E$
   Montrer que $\mathcal{B}=(I_3,A,A^2)$ est une base de $E$
2. Quelle équation vérifie les valeurs propres de $A$?
3. Déterminer, sans calculer ses val. propres, si $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Même question dans $\mathbb{C}$.
4. On définit sur $E$ l'application $f$ en posant $\forall M\in E, f(M)=AM$
   Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
   $f$ est-il diagonalisable?

**ALG 212**
Soit $n\geqslant 2$ et $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\P&\longmapsto&(X^2+X)P(1)+(X^2-X)P(-1)\end{array}$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$
3. Déterminer les éléments propres de $f$. $f$ est-il diagonalisable? Que dire de $g=\dfrac{1}{2}f$?

**ALG 213**
Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\M&\longmapsto&AM\end{array}$

1. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. $f$ est-il diagonalisable? Si oui, diagonaliser $f$!
3. Chercher un endomorphisme $g$ tel que $g^2=f$

**ALG 214**
Justifier que les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&\pi\\0&0&0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\2&2&0&0\\1&2&3&0\\e&\pi&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$ sont semblables.

**ALG 215**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (y, -2x+2y+z, -x+y+z)$.

1. Montrer que $f$ est trigonalisable. Que peut-on dire d'une matrice triangulaire associée?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

**ALG 216**

Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+25z, -5x-4y-25z, -4z)\end{array}$

1. Montrer que $f$ est diagonalisable
2. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $f$

**ALG 217**

Soit $m \in \mathbb{R}$.

On considère l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (m.x+(3-m).y+(3-m).z, x+y-z, -x+2y+4z)\end{array}$$

1. Etudier, suivant les valeurs de $m$, la diagonalisabilité de $f$.
2. Dans le cas où $f$ est diagonalisable, donner une base de $\mathbb{R}^3$ composée de $\vec{v}.p$ de $f$
3. Dans le cas où $m=2$, justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix}2&0&a\\0&3&b\\0&0&2\end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

**ALG 218**

Soit $\boxed{f: \begin{array}{ccc}\mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (-y,x)\end{array}}$

Montrer que $f$ est diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**ALG 219**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}11&-9&3\\3&-1&3\\0&0&8\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A$ est une matrice diagonalisable, et donner les matrices $P$ et $D$
2. Déterminer $A^k$ pour $k \in \mathbb{N}$

**ALG 220**

Pour $k \in \mathbb{C}$, on considére $A_k = \begin{pmatrix}k-3 & -5+k & 4-k\\ -k+3 & 5-k & k-3\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$

Déterminer les éléments propres de $A_k$. $A_k$ est-elle diagonalisable?

**ALG 221 (A retenir)**

Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un ev $E$

1. On suppose que $f$ et $g$ sont diagonalisables. A-t-on $f+g$ diagonalisable?
2. On suppose que $f$ posséde une unique valeur propre.
   Montrer l'équivalence : $f$ est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $f$ est une homothétie



**ALG 222**

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède $n$ valeurs propres distinctes alors $A$ et $A^T$ sont semblables

**ALG 223**

1. Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto & X(P'+P''+\cdots+P^{(n)})\end{array}$.
   Montrer que $f$ est diagonalisable.
2. L'endomorphisme $f$ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = X^2P^{(2)}$ est-il un endomorphisme diagonalisable?

**ALG 224**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ diagonalisable de spectre $\{0,1,2\}$. (on a $\dim E < \infty$)

1. En utilisant les matrices, montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$
2. Sans utiliser les matrices, montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$
3. Déterminer $f^{2020}$

**ALG 225**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3$.

1. Montrer que les valeurs propres de $A$ sont toutes réelles
2. On suppose que $n = 3$ et que $\{-1,+1\} \subset sp(A)$.
   Montrer que $A$ est diagonalisable

**ALG 226**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix}6&-4&-4\\4&-2&-4\\4&-4&-2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que

$P^{-1}AP$ soit diagonale et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix}*&1&0\\0&*&0\\0&0&*\end{pmatrix}$

*On donne* $E_{-2}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}), E_2(A) = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, | x-y-z=0\}$

*et* $E_1(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}), E_2(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$

**ALG 227**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(X) = -X + (\operatorname{tr} X).I_n$

1. Déterminer les éléments propres de $f$
2. $f$ est-il diagonalisable?
3. Trouver un polynôme du second degré qui annule $f$, c'est à dire telle que $P(f) = 0$
4. Montrer que $f$ est bijective et donner $f^{-1}(X)$ explicitement.

**ALG 228**

Soit $a$ un réel. On considére $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & ((a+2)x+ay, (a-2)x+ay)\end{array}$

1. Montrer que $f$ est toujours trigonalisable
2. $f$ est-elle toujours diagonalisable?

**ALG 229**
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 5$ et $\operatorname{tr}(A^2) = 4i + 5$.
Montrer que $A$ est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale semblable à $A$.

**ALG 230**
Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

On note $F = \{M(a,b,c) | (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$ . On considère également $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $F$ est un espace-vectoriel. Déterminer une base de $F$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que $T$ est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
   Donner une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D$ tel que $T = P.D.P^{-1}$.
3. Calculer $T^2$, puis justifier que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $M(a,b,c)$ est toujours une matrice diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).
   Indiquer les valeurs propres de $M(a,b,c)$

**ALG 231**
La matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle diagonalisable?
Si oui, trouver $P$ et $D$

**ALG 232**
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 3 \\ 15 & -10 & 3 \\ 15 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A, B$ et $C$ sont 3 matrices diagonalisables
2. Montrer que s'il existe une matrice inversible $P$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}CP$ sont diagonales alors $AC = CA$. $A$ et $C$ sont-elles diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage?
3. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P$ telle que
   $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

*On donne* $E_4(A) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | -3x + 2y + z = 0\}, E_8(A) = \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

*et* $E_8(B) = \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_{-4}(B) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | 5x - 2y + z = 0\}$

**ALG 233**
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable, puis que $A$ et $B$ sont semblables.

**ALG 234**
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère $f$ l'endomorphisme canoniqement associé à $A = \begin{pmatrix} m & 3-m & 3-m \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Etudier, en fonction de $m$, la diagonalisabilité de $f$



**ALG 235**
Soit $E$ un $\mathbb{R}-$ev de dimensions 3 et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$\det(f) = 0 \qquad \operatorname{tr}(f) = 1 \qquad \text{et} \qquad \ker f \subset \operatorname{Im} f$$

1. Déterminer les dimensions de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$
2. Montrer que $f$ est trigonalisable
3. Déterminer les valeurs propres de $f$ et indiquer si $f$ est diagonalisable

**ALG 236**
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & X^3.P(1/X) \end{array}$
$f$ est-il diagonalisable? Donner ses éléments propres

**ALG 237**
Soit $n \geqslant 1$ et $Q$ un polynôme de degré $n$ à coefficients réels.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $f(P) = (P.Q)^{(n)}$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que $f$ est diagonalisable

**ALG 238**
Soit $a \in \mathbb{R}$.

Donner une cns sur $a$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1+a & -a & -1-a \\ -a & a & 1+a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

**ALG 239 (Calcul de la vp de plus grand module)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
On note les vp de $A$ comptées avec leur multiplicité $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et on suppose qu'elles vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$

1. Justifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T$ triangulaire supérieure telles que $P^{-1}.A.P = T$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P.T^k.P^{-1}$
3. Montrer que $\lambda_1 = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)}$

**ALG 240**
On considère les matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour $a - b \neq 1$ la matrice $M(a,b)$ est diagonalisable
2. Montrer que pour $a - b = 1$ et $a \neq 1$ la matrice $M(a,b)$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Dans le cas où $a - b \neq 1$, calculer $M(a,b)^n$.
   En déduire une CNS portant sur $(a,b)$ pour que la suite $(M(a,b)^n)_n$ converge

**ALG 241**
Soit $\dim E = n$ et $f,g$ deux endomorphismes de $E$ qui commutent.
On suppose $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associées aux $\vec{v}.p$ respectifs $e_1, \dots, e_n$

1. Que peut-on dire de $f$ et de la dimension de chacun de ses sep?
2. Justifier que chaque $e_i$ est aussi vecteur propre de $g$.
3. $g$ est-il diagonalisable? les valeurs propres de $g$ sont-elles toutes distinctes?

**ALG 242**
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
On pose $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto ((\alpha X + \beta)P)'$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer les éléments propres de $f$
3. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $f$
4. Ecrire la matrice $A$ de l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, dans la base canonique
5. Diagonaliser $A$

**ALG 243**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $D = P^{-1}.A.P$
2. Montrer que si une matrice $\Delta$ commute avec $D$ alors $\Delta$ est une matrice diagonale
3. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + M = A$ alors $P^{-1}.M.P$ commute avec $D$ , et en déduire que $P^{-1}.M.P$ est diagonale
4. Résoudre l'équation matricielle $M^2 + M = A$

**ALG 244**
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = a.I_3 + b.A + c.A^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les éléments propres de $A$
2. En déduire ceux de $B$

**ALG 245**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$
2. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $f$ alors $\lambda^3 + \lambda = 0$. Déterminer si $f$ est diagonalisable
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id)$ et que, si $f \neq 0$, il existe une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**ALG 246**
Soit $n \geqslant 2$ et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (2X-1)P' + (X^2 - X - 2)P''$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Ecrire la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Déterminer les valeurs propres de $f$ et en déduire que $A$ est diagonalisable
4. On note $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $f$ rangées par ordre croissant.
   Montrer que si $P$ est un polynôme propre (=vecteur propre) associé à $\lambda_k$ alors $\deg P = k$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que, pour tout $k$, $P_k$ soit un polynôme unitaire de degré $k$ et un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda_k$
6. Dans le cas $n = 3$, donner $(P_0,P_1,P_2,P_3)$



**ALG 247**
Dans cet exercice, on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ on considère $f_{a,b} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a.z + b.\overline{z} \end{array}$

1. rappeler une base et la dimension de $\mathbb{C}$
2. Montrer que $\{f_{a,b} \,|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \mathcal{L}(\mathbb{C})$
   (on pourra considérer l'image d'une base)
3. Donner la trace et le déterminant de $f_{a,b}$ en fonction de $a$ et $b$
4. Donner une cns pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable
5. Donner en fonction de $a$ et $b$ le déterminant et la trace de $f_{a,b}$

**ALG 248**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dim finie, $\mathcal{B}$ sa base et $f$ un endomorphisme de $E$ telle que

$$\forall x \in E, \exists\, p_x \in \mathbb{N}^*, f^{p_x}(x) = x$$

1. Pour tout $e \in \mathcal{B}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^p(e) = e$
   En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^m = id_E$
2. On suppose que $f$ est diagonalisable. Montrer de $f^2 = id_E$