PT* : DS N°0 du 11/09/2025

exercice 1

On considère la fonction $f : t \mapsto \cos^4(t)$

1. Montrer que f est une fonction de période π
2. On note $I = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt$.
   Justifier l'existence de I
3. Montrer que $I = 2.\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)dt$
4. Linéariser $\cos^4(t)$
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt$

exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+8}$

1. Justifier que f possède des primitives sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer une primitive de f

exercice 3

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+2nk+n^2}$

exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}}.t^n.dt$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite minorée, et déterminer son sens de variation.
   Qu'en déduit-on ?
2. Déterminer un encadrement de u_n , puis justifier que $\lim u_n = 0$

exercice 5

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable en 0
3. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?
4. Justifier que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner sa dérivée.
   On précisera notamment $G'(0)$
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$

correction exercice 1

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t+\pi) = \cos^4(t+\pi) = (-\cos t)^4 = \cos^4 t = f(t)$$

$\boxed{f \text{ est bien } \pi\text{-périodique}}$

2. La fonction f est **continue** sur le **segment** $[\pi{,}2\pi]$ donc l'intégrale I existe

3.
   - La fonction f étant π-périodique et l'intervalle $[\pi{,}2\pi]$ étant de longueur π, on a $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)dt$.
   - La fonction f étant de plus paire, on a $I = 2.\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)dt$

4. Pour cela on utilise la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton.

$$\cos^4 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it} + 4.e^{3it}.e^{-it} + 6.e^{2it}.e^{-2it} + 4.e^{it}.e^{-3it} + e^{-4it}\right)$$

ce que l'on réordonne:

$$\cos^4 t = \frac{1}{16}\left[e^{4it} + e^{-4it} + 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6\right] = \frac{1}{16}\left(2\cos(4t) + 4\cos(2t) + 6\right)$$

On trouve donc que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}}$

remarque: les coefficients 1 4 6 4 1 sont retrouvés avec le triangle de Pascal

5.

$$\begin{aligned} I = 2.\int_0^{\pi/2} f(t)dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\cos(4t) + \cos(2t) + \frac{3}{4}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{16}\sin(4t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{3}{4}t\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

correction exercice 2

1. $\Delta = 4^2 - 4.8 = -16 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues le dénominateur ne s'annulant pas.
On peut donc affirmer que $\boxed{f \text{ possède des primitives sur } \mathbb{R}}$
2. Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int^x \frac{dt}{(t+2)^2+4} = \frac{1}{4}\int^x \frac{dt}{\left(\frac{t+2}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int^{\frac{x+2}{2}} \frac{d\theta}{\theta^2+1} = \frac{1}{2}.\arctan\frac{x+2}{2} + Cste$$

On a réalisé le changement de variable C^1 : $\theta = \dfrac{t+2}{2}$ et donc $d\theta = \dfrac{dt}{2}$

correction exercice 3

- Posons pour tout $n \geqslant 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + nk + n^2}$

- Pour $n \geqslant 1$ on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\frac{k}{n} + 1}$$

- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^2 + 2t + 1} \end{array}}$

  Notons $a = 0$ et $b = 1$

  Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
  on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt \qquad \text{quand } n \to \infty$$

- Or

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 2nk + n^2} = \frac{1}{2}}$$

correction exercice 4

1. - Soit $n \in \mathbb{N}$.
     On a

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant e^{\sqrt{t}}.t^n$$

   par **croissance de l'intégrale**, on a donc

$$0 = \int_0^1 0.dt \leqslant \int_0^1 e^{\sqrt{t}}.t^n.dt = u_n$$

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minorée par } 0}$

   autre possibilité de rédaction:
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction $f_n : t \mapsto e^{\sqrt{t}}.t^n$ est positive sur $[0,1]$,
   *donc **par positivité de l'intégrale** $u_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ est positif.*

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On a
  $$\forall t \in [0,1], t^{n+1} \leqslant t^n$$
  en multipliant par $e^{\sqrt{t}} > 0$ on obtient
  $$\forall t \in [0,1], e^{\sqrt{t}}.t^{n+1} \leqslant e^{\sqrt{t}}.t^n$$
  Par croissance de l'intégrale,
  $$u_{n+1} = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}.t^{n+1}.dt \leqslant \int_0^1 e^{\sqrt{t}}.t^n.dt = u_n$$
  On a montré que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$
- La suite (u_n) est minorée et décroissante, par théorème on sait qu'elle converge.

2. - Soit $n \in \mathbb{N}$
     On a
     $$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant e^{\sqrt{t}}.t^n \leqslant e^{\sqrt{1}}.t^n = e.t^n$$
     Par croissance de l'intégrale, on obtient
     $$0 = \int_0^1 0.dt \leqslant \int_0^1 e^{\sqrt{t}}.t^n.dt \leqslant \int_0^1 e.t^n.dt = \left[e.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$
     On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}}$
   - Comme $\lim \frac{e}{n+1} = 0$ on en déduit par encadrement que $\boxed{\lim u_n = 0}$

correction exercice 5

1. - **La fonction f est continue sur** $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
   - **Montrons que f est continue en** 0
     Pour $x \neq 0$, on a
     $$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} = 1 + o(1) \to 1$$
     On a montré que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, càd que f est continue en 0
   - Conclusion: $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$
2. Soit $x \neq 0$
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x)}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$
   Ceci prouve que $\lim_{x \to 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ (limite finie)
   Conclusion $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{2}}$

3. • On peut déjà dire que f est C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux, et que l'on a
$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2}$$

• Etudions la continuité de f' en 0
Pour $x \neq 0$ on a
$$f'(x) = \frac{x.e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{x.(1 + x + o(x)) - (1 + x + x^2/2 + o(x^2) + 1}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$
Ceci prouve que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$, et donc que $\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$

• Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

4. • Notons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après **le théorème fondamental de l'analyse**, on peut affirmer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On a donc $\boxed{F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } F' = f.}$

remarque: comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a F qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = F(2x) - F(x)$
La fonction G est donc de dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables.
Et l'on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 2.F'(2x) - F'(x) = 2.f(2x) - f(x)$$

• Pour $x = 0$, on a donc $G'(0) = 2.f(0) - f(0) = f(0) = 1$

• Pour $x \neq 0$, on a $G'(x) = 2.\frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{x}$

5. Soit $x > 0$.
On a
$$\forall t \in [x,2x], f(t) = \frac{e^t - 1}{t} \geqslant \frac{e^x - 1}{2x}$$
et donc par **croissance de l'intégrale**
$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt \geqslant \int_x^{2x} \frac{e^x - 1}{2x}dt = \frac{e^x - 1}{2x}.x = \frac{e^x - 1}{2} \qquad (*)$$
Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{2} = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty}$

rem(*) : les autres minorations possibles étaient $\frac{e^x - 1}{2t}$ *et* $\frac{e^t - 1}{2x}$