

# 1 Géométrie plane

## GEO 1 (Banque PT 2025 B, extrait)

Dans cet exercice, l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la conique  $\mathcal{C}$  d'équation

$$2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3$$

1. Écrire la matrice  $Q$  associée à l'équation de la conique  $\mathcal{C}$ .
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $Q$ .
3. Donner une équation réduite de  $\mathcal{C}$  ainsi qu'un repère orthonormé direct  $R'$  dans lequel cette équation est obtenue.
4. Donner la nature de  $\mathcal{C}$ .
5. Déterminer les principaux éléments caractéristiques de  $\mathcal{C}$  (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles). Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère  $R'$  puis dans le repère  $\mathcal{R}$ .
6. Tracer  $\mathcal{C}$  dans le repère  $\mathcal{R}$  sur la feuille de papier millimétrée fournie.

On mettra en évidence le repère  $R'$  ainsi que les éléments déterminés dans la question 5.

Unité : 2cm.

## GEO 2 (Banque PT 2019 B, extrait)

Dans cette partie, l'espace  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'équation cartésienne

$$(t^2 - 1)x - 2ty = 2t(t - 1).$$

1. **Question préliminaire.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b) \neq (0, 0)$ . On considère alors la droite  $D$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  ainsi que le point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

(a) Démontrer que les coordonnées du projeté orthogonal  $H_0$  de  $M_0$  sur la droite  $D$  sont :

$$\left( x_0 - a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right).$$

- (b) En déduire la distance  $d(M_0, D)$  du point  $M_0$  à la droite  $D$ .
2. (a) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des droites  $D_{-1}$ ,  $D_0$  et  $D_1$ .  
(b) En déduire qu'il existe un unique point, dont on précisera les coordonnées, équidistant de toutes les droites  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
3. (a) Soit  $t$  un réel fixé. Donner un point, un vecteur directeur puis une représentation paramétrique de la droite  $D_t$ .  
(b) Démontrer qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe  $\Gamma$  de la famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est :

$$\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. On considère maintenant la courbe  $\Gamma'$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos(\theta) \\ y = 1 + \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

On note  $M(\theta)$  le point de  $\Gamma'$  de paramètre  $\theta$ ,  $(\vec{T}(\theta), \vec{N}(\theta))$  la base de Frénet et  $\gamma(\theta)$  la courbure de  $\Gamma'$  au point  $M(\theta)$ . Enfin,  $s$  désigne l'abscisse curviligne de  $\Gamma'$  qui s'annule en 0.

- (a) Reconnaître la courbe  $\Gamma'$ . On sera le plus précis possible.
- (b) Démontrer que  $\Gamma \subset \Gamma'$ . Sont-elles égales ?
- (c) Les deux courbes sont-elles parcourues dans le même sens ?
5. *Des questions de cours... pour préparer la suite*
  - (a) Donner les deux définitions (ou caractérisations) de la développée d'une courbe régulière.
  - (b) Donner la définition (pas la méthode de calcul) de l'enveloppe d'une famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .
  - (c) Donner les deux formules de Frénet.
6. On considère un réel  $k$  et pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on note  $P_k(\theta)$  le point défini par

$$\overrightarrow{M(\theta)P_k(\theta)} = (k - s(\theta)) \vec{T}(\theta)$$

et  $\Lambda_k$  l'ensemble des points  $P_k(\theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Calculer les vecteurs  $\vec{T}(\theta)$  et  $\vec{N}(\theta)$ , ainsi que  $s(\theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Quelle est l'origine du repère de Frénet ?
- (b) Déterminer une représentation paramétrique de  $\Lambda_k$ .
- (c) Déterminer les points non réguliers de  $\Lambda_k$ . Où sont-ils situés ?
- (d) Déterminer la développée de  $\Lambda_k$  éventuellement privée de ses points non réguliers.

7. Dans la suite de cette partie, nous allons vérifier que toute courbe  $\Lambda$  dont la développée est incluse dans  $\Gamma'$  est une courbe  $\Lambda_k$ .

Soit  $\theta \mapsto P(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  un paramétrage de  $\Lambda$ . On suppose que ce paramétrage est de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et que la courbe  $\Lambda$  est birégulière.

On note  $(\vec{T}_P(\theta), \vec{N}_P(\theta))$ ,  $s_P(\theta)$  et  $\gamma_P(\theta)$  la base de Frénet, une abscisse curviligne et la courbure de  $\Lambda$  au point  $P(\theta)$ . Enfin, on considère que  $M(\theta)$  est le centre de courbure de  $\Lambda$  au point  $P(\theta)$ .

- (a) Sur la copie, faire une figure illustrant la situation : placer les points  $M(\theta)$ ,  $P(\theta)$ , les vecteurs  $\vec{T}(\theta)$ ,  $\vec{N}(\theta)$ ,  $\vec{T}_P(\theta)$ ,  $\vec{N}_P(\theta)$  ainsi qu'une allure possible pour les courbes  $\Gamma'$  et  $\Lambda$  au voisinage des points  $M(\theta)$  et  $P(\theta)$ .
- (b) Justifier qu'il existe une fonction  $\lambda$ , dont on admettra qu'elle est de classe  $C^1$  sur  $[0, 2\pi]$  telle que :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta) \vec{T}(\theta).$$

- (c) En déduire que :

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} \vec{T} + \lambda \frac{d\vec{T}}{d\theta}$$

puis que :

$$\frac{ds_P}{d\theta} \vec{T}_P = \frac{ds}{d\theta} \vec{T} + \frac{d\lambda}{d\theta} \vec{T} + \lambda \gamma \frac{ds}{d\theta} \vec{N}.$$

- (d) Justifier que :

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} = 0$$

et en déduire  $\lambda$ .

- (e) Conclure.

Sauf précision, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dans tous les exos

**fonctions vectorielles**

**GEO 3**

Calculer, si elle existe, la limite en 0 de  $f : t \mapsto \left( \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}, \frac{\sin t - \tan t}{t^3} \right)$

**GEO 4**

On considère  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{cases} \left( \frac{\sin^2 t}{e^{t^2} - 1}, t \cdot \sin \left( \frac{1}{t} \right) \right) & \text{si } t \neq 0 \\ (1,0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

**GEO 5**

On note  $f : t \in I \mapsto (t^2 \cdot \ln(1+t), e^t \cdot \cos t)$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $I$  de cette fonction
2. Justifier que  $f$  est  $C^\infty$  sur  $I$
3. Déterminer  $f^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}$

**GEO 6**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On considère la courbe paramétrée

$$\boxed{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \begin{cases} (\sin t, e^t - 1 - \lambda t) & \text{si } t \geq 0 \\ (t, t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0
2. Etudier l'existence de la dérivée à droite et à gauche en 0.

**GEO 7**

Déterminer les DL suivants

1.  $DL_2(0)$  de  $f : t \mapsto (2^t - 1, e^{\sqrt{1+t}})$
2.  $DL_2(1)$  de  $f : t \mapsto \left( \frac{1}{t}, \frac{t^3 \cdot \ln t}{t^2 - 1} \right)$

**GEO 8**

Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction dérivable sur  $I$  telle que  $\forall t \in I, f(t) \neq 0$ .

On pose  $\forall t \in I, g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$

1. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $I$ , et calculer  $g'(t)$
2. Que dire du vecteur  $g(t)$ ? En déduire la dérivée de la fonction  $h : t \mapsto \|g(t)\|$ .

**GEO 9**

Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction dérivable telle que  $\forall t \in I, (f(t), f'(t))$  soit une famille liée.

On pose  $\varphi : t \in I \rightarrow f(t) \wedge f'(t)$ .

Montrer que  $\varphi$  est une fonction constante.

**GEO 10**

On considère une particule dont la trajectoire est donnée par la fonction vectorielle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$

1. On note  $g : t \mapsto \|f'(t)\|^2$ .

Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner  $g'$

2. En déduire que la particule accélère [décélère] lorsque l'angle entre  $f'(t)$  et  $f''(t)$  est inférieur [supérieur] à  $\frac{\pi}{2}$

**norme**

**GEO 11**

A l'aide de l'inégalité triangulaire  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , montrer que  $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$

**courbe définie par équation cartésienne**

**GEO 12**

Montrer que la ligne de niveau de  $f : (x,y) \mapsto 2x^2y + 2x^2 + y^2$  passant par  $A(1,1)$  admet une tangente en ce point. En donner une équation.

**GEO 13**

On considère la courbe  $\Gamma$  d'équation cartésienne  $2x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$

1. Montrer que  $\Gamma$  est une courbe régulière et donner l'équation cartésienne de la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ .
2. Combien y-a-t-il de tangentes à  $\Gamma$  qui passent par  $O$ ? par  $A(1,1)$ ?

**GEO 14**

Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

On considère la courbe  $\Gamma_k$  d'équation cartésienne  $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x = k$

1. Déterminer les points singuliers de  $\Gamma_k$
2. Ecrire l'équation cartésienne de la tangente au point  $A = (0,2)$  à  $\Gamma_8$
3. Déterminer les points de  $\Gamma_k$  en lesquels la tangente est horizontale

**GEO 15**

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère la fonction  $\boxed{f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} x & \mapsto \lambda \cdot x^3 - 3x^2 \end{cases}}$

On note  $\mathcal{C}_\lambda$  la représentation graphique de  $f_\lambda$ .

1. Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes  $\mathcal{C}_\lambda$
2. Déterminer les points du plan par lesquels ne passe qu'une courbe  $\mathcal{C}_\lambda$ .
3. Montrer que les fonctions  $f_\lambda$  vérifient toutes une même équation différentielle linéaire du premier ordre.
4. Donner l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_\lambda$  au point d'abscisse  $x_0$ .  
On note  $T_{\lambda, x_0}$  cette droite
5. Que dire des droites  $T_{\lambda, x_0}$  lorsque  $x_0 = 0$ ?
6. On se place dans le cas où  $x_0 \neq 0$ 
  - (a) Justifier que les droites  $T_{\lambda, x_0}$  sont toutes concourantes en un même point  $P_{x_0}$  dont on donnera les coordonnées
  - (b) Quelle courbe est décrite par  $P_{x_0}$  lorsque  $x_0$  décrit  $\mathbb{R}^*$ ?
7. Etude du cas particulier  $x_0 = 1$ 
  - (a) Montrer que les tangentes  $T_{\lambda, 1}$  et  $T_{\lambda_1, 1}$  sont perpendiculaires ssi  $9\lambda_1 \cdot \lambda - 18(\lambda_1 + \lambda) + 37 = 0$
  - (b) En déduire que les droites  $T_{\lambda, 1}$ , sauf une, sont deux à deux perpendiculaires.

## GEO 16

On note  $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$  et  $\Gamma$  la courbe d'équation cartésienne  $f(x,y) = 0$

1. Déterminer les points réguliers de  $\Gamma$
2. Représenter  $\Gamma$

## GEO 17

On considère:

- le point  $A(1,0)$
- la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y^2 + x = 1$
- l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation  $x^2 + 2y^2 = 1$
- Pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $\mathcal{D}_m$  la droite d'équation  $y = m(1 - x)$

1. Montrer que la droite  $\mathcal{D}_m$  coupe la parabole en un point  $M_m \neq A$
2. Montrer que la droite  $\mathcal{D}_m$  coupe l'ellipse en un point  $N_m \neq A$
3. Déterminer une équation de la tangente en  $M_m$  à la parabole  $\mathcal{P}$  et une équation de la tangente en  $N_m$  à l'ellipse  $\mathcal{E}$
4. Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux tangentes lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}^*$

**utilisation des nombres complexes**

## GEO 18

On considère  $M_1, M_2$  et  $M_3$  des points d'affixe  $z_1, z_2$  et  $z_3$  tels que  $(i-1).z_1 + z_2 - iz_3 = 0$ .  
Démontrer que  $M_1M_2M_3$  est un triangle isocèle rectangle en  $M_1$

## GEO 19

Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre  $A(1,2)$  et d'angle  $\theta$

## GEO 20 (droite d'Euler)

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points d'affixes respectives  $a, b, c$ .

On suppose que  $ABC$  est un triangle NON aplati et que le centre de son cercle circonscrit est l'origine  $O$  du repère.

1. Comment se traduit sur  $a, b, c$  la condition "le centre de son cercle circonscrit est l'origine  $O$  du repère"?
2. Concurrence des hauteurs.

On note  $H$  le point d'affixe  $a + b + c$

- (a) Montrer que les droites  $(CH)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires
- (b) En déduire que les hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes en  $H$

3. Concurrence des médianes.

On note  $G$  le barycentre des points  $A, B, C$ .

On note  $I, J, K$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$

- (a) Donner l'affixe des points  $G, I, J, K$
- (b) Montrer que les points  $C, G, I$  sont alignés. Que vient-ton de montrer?
- (c) En déduire que les médianes du triangle  $ABC$  sont concourantes en  $G$

4. Concurrence des médiatrices.

Justifier que les médiatrices sont concourantes au point  $O$

5. Montrer que  $O, G, H$  sont alignés.  
(cette droite est appelée la "droite d'Euler")

## GEO 21

On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ .

On note  $j = \exp(2i\pi/3)$

1. Montrer que le triangle est équilatéral direct si et seulement si  $a + bj + cj^2 = 0$  (on pourra considérer une rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/3$ )
2. En déduire que  $ABC$  est un triangle équilatéral si et seulement si  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

## GEO 22

Soit  $a$  un complexe de module un.

1. Montrer que  $(z = -\bar{a} \text{ ou } z^3 = a) \iff (z\bar{z} = 1 \text{ et } z^2 - \bar{z}^2 = a\bar{z} - \bar{a}z)$
2. En déduire que les racines cubiques de  $a$  se déduisent graphiquement par l'intersection d'un cercle (dont on précisera le centre et le rayon) et d'une hyperbole (dont on précisera le centre et les asymptotes).

Application avec  $a = e^{i\pi/4}$

**droites, cercles du plan**

## GEO 23 (démonstration)

Soit  $(D)$  la droite d'équation cartésienne  $ux + vy + w = 0$

Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan.

Montrer que  $d(M_0, (D)) = \frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

## GEO 24 (démonstration)

Soit  $(D)$  la droite passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan

Montrer que  $d(M_0, (D)) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$

## GEO 25

Soient:

- les points  $A(1,2), B(3,1)$  et  $C(-1,1)$
- la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 2x - 2$

Donner les équations paramétriques et cartésiennes des droites suivantes

1. droite  $(AB)$
2. droite parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$
3. droite perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $C$
4. droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $-2$
5. droite normale à  $\mathcal{C}_f$  au point  $B$
6. droite tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $B$

## GEO 26

Soit  $C$  la courbe d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$

1. Montrer que  $C$  est un cercle. En donner le centre, le rayon et un paramétrage.
2. Déterminer les équations cartésiennes des tangents à  $C$  parallèles à  $D$  d'équation  $2x + y - 7 = 0$
3. Déterminer les équations cartésiennes des tangents à  $C$  passant par  $A(-1,5)$

## GEO 27

On considère les droites  $D_1 \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$  et  $D_2 \begin{cases} x = 5 + 6t \\ t = -2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Justifier que  $D_1 = D_2$

**GEO 28**

Soit  $D$  la droite d'équation  $3x - 2y - 2 = 0$

Soit  $D_1$  la droite passant par les points  $A(1,4)$  et  $B(-2,3)$

Soit  $D_2$  la droite passant par  $C(6,2)$  et de coefficient directeur  $\alpha$

1. Donner une équation cartésienne de  $D_1$
2. Donner un vecteur directeur de  $D_2$  puis une équation cartésienne de  $D_2$
3. Donner la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $D_2$  et  $D$  sont parallèles.
4. Donner la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $D_2$  et  $D$  sont perpendiculaires.
5. Donner une cns sur  $\alpha$  pour que ces trois droites soient concourantes

**GEO 29**

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction exponentielle, et  $D$  la droite d'équation  $y = 2x + 3$ .

Soit  $M_0(x_0, y_0) \in C$ .

1. Déterminer la droite normale à  $C$  en  $M_0$
2. Déterminer le point d'intersection entre la droite précédente et la droite  $D$

**GEO 30**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et les points  $A(\lambda, 0)$  et  $B(0, 2 - \lambda)$ .

On note  $C$  le point tel que  $OACB$  soit un rectangle. On note  $D_\lambda$  la perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par  $C$ .

Montrer que la droite  $D_\lambda$  passe par un point fixe à déterminer lorsque  $\lambda$  varie.

**GEO 31**

Soient

- $k$  un réel
- $(D)$  la droite d'équation cartésienne  $2x + k \cdot y + 1 = 0$
- $(\Delta)$  la droite d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$

1. Les droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont-elles parallèles?
2. Les droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont-elles perpendiculaires?
3. Lorsque  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont sécantes, quel angle forme ces droites?

**GEO 32**

Déterminer l'intersection des droites  $D_1 \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$  et  $D_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$

**GEO 33**

Soit  $\lambda$  un réel. On considère la droite  $(D_\lambda) : (\lambda^2 - 1)x + \lambda y - 2\lambda^2 + 2 + \lambda = 0$ .

1. Montrer que toutes ces droites passent par un même point, dont on déterminera les coordonnées
2. Montrer qu'il existe deux droites  $(D_{\lambda_1})$  et  $(D_{\lambda_2})$  passant par O. Quel angle forme ces deux droites?

**GEO 34**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On considère

- $\mathcal{C}_\lambda$  le cercle de centre  $(\lambda, 0)$  tangent en O à l'axe  $(Oy)$
- $\Gamma_\lambda$  le cercle de centre  $(\lambda, \lambda)$  tangent à l'axe  $(Ox)$

Déterminer le lieu des points d'intersection de  $\mathcal{C}_\lambda$  et  $\Gamma_\lambda$  lorsque  $\lambda$  varie

**GEO 35**

Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les trois points suivants  $A(1,1)$ ,  $B(3, -1)$  et  $C(-1, -2)$ .

**GEO 36**

On considère le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma^2 = 0$ , et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $ux + vy + w = 0$ . Montrer que :

$$(\Delta) \text{ est tangente au cercle} \iff (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2) = (u\alpha + v\beta + w)^2$$

**GEO 37**

Soit  $(D_1) : ux + vy + w_1 = 0$  et  $(D_2) : ux + vy + w_2 = 0$  deux droites parallèles.

Déterminer la distance entre ces deux droites

**GEO 38**

Soit  $C$  le cercle de centre  $\Omega(2,3)$  et de rayon 2.

Déterminer, par équation cartésienne, les droites tangentes à  $C$  passant par  $A(6, -2)$

**GEO 39**

Soit  $(ABCD)$  un carré. On construit  $P \in (AB)$  et  $Q \in (BC)$  tels que  $BP = BQ$ .

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(PC)$ . Montrer que  $(QH)$  et  $(HD)$  sont perpendiculaires.  
(indic. On pourra se placer dans le repère  $(B, \vec{BC}, \vec{BA})$  et noter  $\lambda = BP \dots$ )

**GEO 40**

Soit  $a$  un réel.

On considère les points  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(0,1)$ ,  $P(0,a)$ ,  $Q(-a,a)$ ,  $R(-a,0)$ .

On note  $M$  le point d'intersection des droites  $(AP)$  et  $(BQ)$

1. Faire une figure
2. Donner les équations cartésiennes des droites  $(AP)$  et  $(BQ)$ , puis les coordonnées du point  $M$
3. Montrer que  $M, C$  et  $R$  sont alignés.

**GEO 41**

On considère les points  $B(0,1)$ ,  $C(1,1)$ ,  $D(1,0)$  et  $\Omega = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Une droite  $\Delta$  passant par O et de coefficient directeur  $\alpha \neq 0$  coupe  $(BC)$  et  $(CD)$  en  $E$  et  $F$  respectivement. On note  $I$  le milieu de  $[BE]$ , et  $M$  l'intersection de  $(DE)$  et  $(FI)$

1. Faire une figure
2. Donner centre et rayon du cercle inscrit dans le carré  $ODCB$ , puis du cercle circonscrit à ce même carré.
3. Montrer que la droite  $(FI)$  est tangente au cercle inscrit précédent.
4. Montrer que  $M$  est sur le cercle circonscrit précédent

**GEO 42**

Soient  $A, B, C$  trois points non alignés et  $\Delta$  une droite. On désigne par  $A', B', C'$  les projets orthogonaux de ces points sur  $\Delta$ . Montrer que les perpendiculaires à  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  issues de  $A', B'$  et  $C'$  respectivement sont concourantes.

(indic. On se placera dans un repère orthonormé d'origine  $A'$  et d'axe des abscisses  $\Delta \dots$ )

**GEO 43**

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$  et  $C(0,2)$ .

Pour  $m \in \mathbb{R}$ , on considère la droite  $(D) : y = mx$  et  $(D') : y = -mx$ .

Ainsi que, lorsqu'ils existent,  $M \in (D) \cap (AB)$  et  $M' \in (D') \cap (AC)$

Montrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe (càd indép. de  $m$ )

**GEO 44**

Soient  $(C_1)$  et  $(C_2)$  deux cercles d'équations respectives  $x^2 + y^2 = 100$  et  $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$   
Montrer que ces deux cercles sont tangents et donner une équation de la tangente commune au point commun.

**GEO 45**

Former l'équation du cercle qui passe par les points  $A(0, -2)$  et  $B(4,0)$  et a son centre appartenant à la droite  $(D)$  d'équation  $x + 2y = 0$

**Réduction de l'intervalle d'étude****GEO 46**

On considère l'arc paramétré  $f : t \mapsto (t + \sin(t), \cos(t))$

Comparer pour tout  $t$  réel  $f(t + 2\pi)$  et  $f(t)$ .

Qu'en déduit-on sur la réduction de l'intervalle d'étude?

**GEO 47**

Réduction de l'intervalle de l'étude des arcs paramétrés suivants

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (\cos^4 t, \sin^4 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (\cos(3t), \sin(4t)) \end{cases}$$

**GEO 48**

On considère la courbe paramétrée  $(\mathbb{R}, f)$  avec  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} t \longmapsto (2t^2 - 2t + 1, (3t^2 - 3t + 1)^2) \end{cases}$$

- Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que pour tout  $t$  réel on a  $x(t) = x(2a - t)$ .
- Calculer  $y(2a - t)$ , et en déduire l'intervalle d'étude de  $f$  ainsi qu'une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe.

**GEO 49**

On considère la courbe paramétrée  $(x(t), y(t)) = (t \ln t, \frac{\ln t}{t})$  avec  $t \in I = ]0, +\infty[$ .

- Déterminer  $M(1/t)$
- En déduire une symétrie qui laisse invariante la courbe, et la réduction de l'intervalle d'étude.

**Etude à la limite de l'ensemble de définition****GEO 50**

- Montrer que  $\frac{1}{\sin h} =_0 \frac{1}{h} + \frac{h}{6} + \frac{7h^3}{360} + o(h^3)$

- Etudier l'asymptote en  $t = \pi/2$  et la position relative pour la courbe  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = \frac{1}{\sin(2t)} \end{cases}$

**GEO 51**

On considère l'arc paramétré  $(I, f)$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} t \longmapsto \left( \frac{t+1}{t^2}, \frac{t^2+1}{(t+1)^2} \right) \end{cases}$$

On souhaite étudier la courbe lorsque  $t \rightarrow +\infty$

- Montrer que la courbe admet un point limite.
- Etudier la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

**GEO 52**

étude du point limite de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} f : ]-\infty, 0[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \left( \frac{e^t}{t}, t \cdot e^t \right) \end{cases}$$

**GEO 53**

Etudier les bornes de l'ensemble de définition de la courbe paramétrée  $t \mapsto \left( \frac{t}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right)$ .

On pourra aussi étudier la position de la courbe par rapport aux droites asymptotes éventuelles.

**GEO 54**

Etude des éventuelles asymptotes (+position si courage) dans les cas suivants

- en  $0^+$  avec  $f : t \mapsto \left( \frac{t^3 + t + 2 \cos(1/t)}{t^2}, \frac{1}{\sin \frac{1}{t}} \right)$

- en  $0^+$  avec  $f : t \mapsto \left( t \cdot \sin \frac{1}{t}, \ln t \right)$

- en  $\pi/2$  avec  $f : t \mapsto \left( \frac{1}{\cos(3t)}, \frac{1}{\sin(2t)} \right)$

**Etude de points particuliers, de tangente,...****GEO 55 (un détour par les équations du type  $y = f(x)$ )**

On note  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

Dans chacun des cas suivants, donner une allure de la courbe au voisinage du point considéré

- $y = -1 + o_1(1)$

- $y = -1 + 3(x-1) + o_1(x-1)$

- $y = -1 + 3(x-1) + (x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$

- $y = -1 + 3(x-1) + 2(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$

**GEO 56**

Dessiner la courbe au voisinage du point  $M(0)$  dans les cas suivants

- $M(t) = (1 + t^2 + t^3, t^2 \cdot \sin(t))$

- $M(t) = (1 + t + 2t^2 + o(t^3), -1 + t + 2t^2 + t^3 + o(t^3))$  (DL au voisinage de 0)

**GEO 57**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

On considère l'arc paramétré  $\begin{cases} x(t) = 4 + a + (4 + 2a)t + (a + 3)t^2 + t^3 \\ y(t) = 6 + 7t + t^2 - t^3 \end{cases}$

Dessiner la courbe au voisinage du point  $M(-1)$

**GEO 58**

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux réels fixés, étudier au voisinage de  $t = 0$  l'arc paramétré

$$t \mapsto (\alpha \cos t - t^3, \beta \sin t - \frac{t}{6} + t^2)$$

**GEO 59**

On considère la courbe paramétrée  $(\mathbb{R}, f)$  avec 
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t^2, |t^4 - t^2|) \end{cases}$$

On souhaite étudier la courbe au voisinage du point  $M(t=1)$

1. Montrer l'existence d'une demi-tangente à droite au point  $M(1)$ .

Donner son équation, et étudier, localement, la position de la courbe par rapport à cette demi-tangente.

2. Même question à gauche.

3. Faire un dessin qui représente la courbe au voisinage du point  $M(1)$

**GEO 60**

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 2.

On considère les points  $A(-1,0)$ ,  $A'(1,0)$  et  $M \in \mathcal{C}$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , orthocentre du triangle  $AMA'$

2. Etudier la courbe décrite par  $H$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$

**GEO 61**

Montrer que la courbe  $\Gamma$  paramétrée par 
$$\begin{cases} x(t) = (t+1)e^t \\ y(t) = t^2e^t \end{cases}$$
 admet un unique point singulier (et tracer l'allure de  $\Gamma$  au voisinage de ce point.)

**GEO 62**

Etudier la courbe  $t \mapsto (\cos(\pi \cdot t), (t-1)^2)$  au voisinage du point  $t=1$

**GEO 63**

On considère la famille de courbes  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  avec 
$$\begin{cases} x = \cos^3 t + \lambda \sin t \\ y = \sin^3 t + \lambda \cos t \end{cases}$$

1. Déterminer les  $\lambda$  pour lesquels  $\Gamma_\lambda$  est régulier

2. Donner une représentation paramétrique de l'ensemble des points singuliers des courbes  $\Gamma_\lambda$

**GEO 64 (Etude d'une famille de courbes)**

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on considère la courbe  $(\mathcal{C}_{a,b})$  : 
$$\begin{cases} x = t^2 - at \\ y = t^3 - bt \end{cases}$$

1. Donner une CNS sur  $a$  et  $b$  pour que  $(\mathcal{C}_{a,b})$  ait un point stationnaire, noté  $R_a$ .

- (a) Quelle est la nature de ce point?

- (b) Déterminer le lieu  $\mathcal{R}$  du point  $R_a$  lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ .

2. Donner une CNS sur  $a$  et  $b$  pour que  $(\mathcal{C}_{a,b})$  ait un point double, noté  $\Omega_{a,b}$

- (a) Donner les coordonnées de ce point. (on trouvera  $(b-a^2, a(b-a^2))$ )

- (b) Donner une CNS pour que les tangentes en  $\Omega_{a,b}$  soient perpendiculaires, et donner dans ce cas les coordonnées du point double, noté  $\Omega_a$  (on trouvera  $\Omega_a(2a^2+1, a(2a^2+1))$ )

**Etude complète**

**GEO 65**

Etudier l'arc paramétré  $\gamma = ([-1,2], f)$  avec  $f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} t \longmapsto (t^3, (t-1)^2) \end{cases}$$
**GEO 66**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points  $A(1; 1)$ ,  $B(-1; -1)$  et la droite  $D$  d'équation  $y = -x$ .

Pour un point  $N$  de  $D$  de coordonnées  $(t; -t)$ , on considère la droite  $(BN)$ , la droite  $(AN)$  et la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à la droite  $(AN)$ .

Le point  $M$  est l'intersection, si elle existe, de la droite  $(BN)$  et de la droite  $\Delta$ .

1. En fonction de  $t$ , donner une équation cartésienne de la droite  $(BN)$ .
2. En fonction de  $t$ , donner les composantes du vecteur  $\vec{AN}$ .
3. En fonction de  $t$ , donner une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(AN)$ .
4. Pour quelles valeurs de  $t$  les droites  $(BN)$  et  $\Delta$  sont-elles parallèles? On trouvera deux valeurs notées dans la suite  $t_1$  et  $t_2$ .
5. Calculer en fonction de  $t$  les coordonnées du point  $M$  en résolvant un système formé par les équations des droites  $(BN)$  et  $\Delta$  pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$ .

On appelle désormais  $G$  la courbe décrite par  $M$  quand  $N$  parcourt la droite  $D$ .

6. On note  $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  les fonctions telles que :

$$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$

- (a) Préciser les domaines de définition de  $u$  et  $v$ .
- (b) Calculer les dérivées de  $u$  et  $v$  et préciser les sens de variation de  $u$  et  $v$  sur chaque intervalle où elles sont définies.
- (c) Donner un tableau de variations conjointes de  $u$  et  $v$  en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.  
(On ne demande pas de représentation de  $u$  et  $v$ .)
7. (a) Le point  $A$  appartient-il à  $G$ ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de  $t$  qui lui est associée?  
(b) Le point  $B$  appartient-il à  $G$ ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de  $t$  qui lui est associée?
8. (a) Calculer  $u(t)v(t)$ . Que remarque-t-on?  
(b) On appelle  $H$  la courbe d'équation cartésienne  $y = \frac{1}{x}$ .  
Peut-on déduire de ce qui précède que  $G$  est la courbe  $H$  dont on a retiré un ou plusieurs points? Quel(s) point(s) retirer à  $H$  pour obtenir  $G$ ?

**GEO 67**

Un cercle est paramétré par les équations  $x(t) = \cos(t)$  et  $y(t) = \sin(t)$  avec  $t$  in réel.

1. On note  $T(t)$  la tangente au cercle au point  $M(t) = (x(t), y(t))$ 
  - (a) Déterminer un vecteur directeur de  $T(t)$
  - (b) Déterminer une équation cartésienne de  $T(t)$
2. (a) Soit  $B(t)$  le point d'intersection de  $T(t)$  avec  $(Ox)$  et  $A(t)$  avec  $(Oy)$   
Déterminer les coordonnées de  $A(t)$  et  $B(t)$   
(b) Déterminer les coordonnées de  $I(t)$  milieu de  $[A(t), B(t)]$   
(c) Déterminer une équation cartésienne de la courbe décrite par  $I(t)$
3. Etudier la courbe  $\Gamma : x(t) = \frac{1}{2\cos(t)}$  et  $y(t) = \frac{1}{2\sin(t)}$   
Tracer  $\Gamma$  après avoir réduit le domaine d'étude à  $]0, \pi/4]$

**GEO 68**

Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$$

1. Etudier et représenter  $\Gamma$
2. Soit  $A(t)$  le point d'intersection de la tangente à  $\Gamma$  en  $M(t)$  et de l'axe ( $Ox$ ). Montrer que l'on a toujours  $AM = 1$

**GEO 69**

Soit  $E$  un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j})$ . ( $\Gamma$ ) est l'arc paramétré défini par l'application :  $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$

$$t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) = \left( \frac{1}{2}(t^2 - 2t), \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right)$$

1. Quelles sont les valeurs de  $t$  pour lesquels le point  $M(t)$  est singulier?
2. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Déterminer la tangente au point  $M(t)$
3. Décrire la position de ( $\Gamma$ ) par rapport à la tangente aux points suivants :
  - (a) au point  $O$  correspondant à la valeur  $t = 0$  du paramètre.
  - (b) au point  $A$  correspondant à la valeur  $t = 1$  du paramètre.
4. Représenter la courbe ( $\Gamma$ )
5. On considère deux points de ( $\Gamma$ ),  $M$  de paramètre  $t$  et  $M_1$  de paramètre  $t_1$ 
  - (a) Montrer que, pour que les tangentes à ( $\Gamma$ ) en  $M$  et  $M_1$  soient perpendiculaires, il faut et il suffit que  $1 + t \cdot t_1 = 0$
  - (b) Soit  $P$  le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsqu'elles sont perpendiculaires. Démontrer que les coordonnées  $(x_P(t), y_P(t))$  du point  $P$ , en fonction de  $t \in \mathbb{R}^*$  sont :

$$\begin{cases} x_P(t) &= \frac{t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 1}{6t^2} \\ y_P(t) &= \frac{-t^2 + 3t + 1}{6t} \end{cases}$$

6. (a) Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à ( $\Gamma$ ) est une parabole ( $\Gamma_1$ ) dont une équation est  $6y^2 - 3y - x + \frac{1}{6} = 0$
- (b) Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de cette parabole.

**GEO 70**

Soit  $\Gamma$  l'arc de paramétrisation  $\gamma : t \mapsto (\sin^2 t, (1 + \cos t) \cdot \sin t)$  et  $M(t) = \gamma(t)$

1. Etudier et tracer  $\Gamma$ .  
(On fera l'étude des points particuliers)
2. On note  $M_1 = M(t)$  et  $M_2 = M(t + \pi)$ , ainsi que  $I = \text{Mil}[M_1, M_2]$ 
  - (a) Montrer que  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  sont orthogonaux
  - (b) Donner une représentation paramétrique de la courbe  $\mathcal{C}$  décrite par  $I$
  - (c) Montrer que  $\mathcal{C}$  est incluse dans le cercle de centre  $(1/2, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$

**GEO 71 (cardioïde)**

Soit  $a > 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega(a, 0)$  et de rayon  $a$ .

On appelle *podaire de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $O$* , le lieu  $\Gamma$  des projections orthogonales de  $O$  sur les tangentes à  $\mathcal{C}$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= a \cdot (1 + \cos t) \cdot \cos t \\ y(t) &= a \cdot (1 + \cos t) \cdot \sin t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Etudier  $\Gamma$  dans le cas où  $a = 1$

**GEO 72**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ). Soit  $a > 0$  une constante réelle et  $u$  un paramètre décrivant  $\mathbb{R}$ . On considère un point variable  $M$  défini par ses coordonnées  $(a \cos u, a \sin u)$  et par  $C$  le cercle décrit par le point  $M$ .

1. (a) On désigne par  $P$  et  $Q$  les projections orthogonales de  $M$  sur les axes et par  $H$  le projeté orthogonal de l'origine sur la droite  $(PQ)$ . Déterminer, en fonction de  $u$ , les coordonnées du point  $H$ .
- (b) La tangente en  $M$  au cercle  $C$  coupe, en général, les axes en  $U$  et  $V$ . Soit alors  $W$  le point se projetant orthogonalement en  $U$  et  $V$  sur les axes. Déterminer, en fonction de  $u$ , les coordonnées du point  $W$ . Que peut-on dire de la position relative des points  $O, H, W$ ?
2. Soit  $R$  la courbe décrite par  $W$  (que l'on ne demande pas de construire). On mène par  $O$  la perpendiculaire à la tangente à  $R$  en  $W$ , cette droite coupant la droite  $(PQ)$  en  $I$ .
  - (a) Déterminer, en fonction de  $u$ , les coordonnées du point  $I$ .
  - (b) Montrer que les droites  $(PQ)$  et  $(IM)$  sont perpendiculaires.

**GEO 73**

On considère la courbe paramétrée  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t^2 \\ y(t) &= 2t \end{cases}$$

1. Donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et la tracer
2. Donner une équation cartésienne de la tangente  $T$  à  $\Gamma$  en son point  $M(t)$
3. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de  $F(1/2, 0)$  sur les tangentes à  $\Gamma$
4. Déterminer et tracer le lieu des projections orthogonales de  $O(0, 0)$  sur les tangentes à  $\Gamma$

**GEO 74**

Soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y^2 = 2px$ .

On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des centres des cercles tangents à  $\mathcal{P}$  et passant par le foyer  $F(p/2, 0)$ .

Soit  $A(a, b)$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$  la normale en ce point. On note  $I$  le centre du cercle passant par  $F$  et tangent à  $\mathcal{P}$  en  $A$

1. Montrer que tout point  $\mathcal{N}$  a des coordonnées de la forme  $(a - \lambda \cdot p, b(1 + \lambda))$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Déterminer les coordonnées de  $I$
3. Etudier la courbe paramétrée, lieu des points  $I$ , dans le cas où  $p = 1$

**Représentation paramétrique et équation cartésienne**
**GEO 75**

1. Montrer que la courbe  $\Gamma : x \cdot \ln(x + y) - y = 0$  admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{e^t}{t+1} \\ y(t) &= \frac{t \cdot e^t}{t+1} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. Montrer que  $M(t = 1)$  est un point d'inflexion
3. Dresser le tableau de variations conjoint
4. Etudier les branches infinies de  $\Gamma$
5. Tracer l'allure de  $\Gamma$

**GEO 76**

On note  $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = x^3 + y^3 - xy = 0\}$  et  $\mathcal{C}' = \{M(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}) \mid t \in \mathbb{R} - \{-1\}\}$

1. Déterminer les points réguliers de  $\mathcal{C}$
2. Déterminer les points réguliers de  $\mathcal{C}'$
3. Montrer que  $A = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \in \mathcal{C}$  et déterminer la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$
4. Montrer que  $A = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \in \mathcal{C}'$  et déterminer la tangente à  $\mathcal{C}'$  en  $A$
5. Montrer que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$

**GEO 77**

On considère la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (3 \cos t + \sin t, \sin t)$ .

Montrer que  $\Gamma$  a pour équation cartésienne  $(x - y)^2 + 9y^2 = 9$

**Changement de repère****GEO 78**

Dans le repère orthonormé direct  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère

- la courbe  $(C)$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = -1 + t - 2\sqrt{3}t^2 \\ y = -\sqrt{3} + \sqrt{3}t + 2t^2 \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$
- les vecteurs  $\vec{I} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$  et  $\vec{J} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

1. Donner une représentation paramétrique de  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$
2. On note  $\Gamma$  le support de  $(C)$ , et  $\Gamma_1 = \{(X, Y) \mid Y = X^2 + 4X + 4\}$ 
  - (a) Montrer que  $\Gamma = \Gamma_1$
  - (b) Tracer  $(C)$

**GEO 79**

Dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère  $\Gamma$  la courbe d'équation

$$4x - 3y + \sin\left(\frac{3x + 4y}{5}\right) = 0$$

On note  $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ .

On note  $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ .

On considère le repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , et on note  $(X, Y)$  les coordonnées dans ce repère

1. Que vaut  $\vec{v}$ ?
2. Donner les relations liant  $x, y, X$  et  $Y$
3. Donner l'équation de  $\Gamma$  dans le nouveau repère, et dessiner  $\Gamma$  dans le repère initial

**Coniques sans terme en  $xy$** **GEO 80 (conique dégénérée)**

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}_\lambda$  l'ensemble des points  $M(x,y)$  tels que  $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2y + 2 = 0$ .

On considère également la droite  $(D)$  d'équation  $x + y + 1 = 0$ .

1. Donner la nature de  $\mathcal{C}_\lambda$
2. Déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}_\lambda$  et de  $(D)$

**GEO 81**

Soit  $t \in \mathbb{R}$

Donner la nature et faire des dessins pour la courbe  $\Gamma_t$  d'équation

$$t^2x^2 + y^2 + 4t^2x - 2ty + 5t^2 + 4t + 3 = 0$$

**GEO 82**

Soit  $(E)$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

La tangente et la normale en un point  $M$  de  $(E)$  (non situé sur ses axes) coupent l'axe  $(Ox)$  en  $T$  et  $N$ .

1. Calculer l'équation de la droite tangente à  $(E)$  en un point  $M_0(x_0, y_0)$
2. Calculer l'équation de la droite normale à  $(E)$  en un point  $M_0(x_0, y_0)$
3. Calculer  $\overline{OT} \cdot \overline{ON}$  (on trouvera  $a^2 - b^2$ )

**GEO 83**

On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + 2x + 3y^2 - 4y + 1 = 0$

1. Justifier que  $\mathcal{C}$  est une ellipse
2. Déterminer la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $M_0(x_0, y_0)$
3. Déterminer les tangentes à  $\mathcal{C}$  qui passent par le point  $(1, 0)$

**GEO 84**

Déterminer les équations des tangentes à l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  parallèles à la droite d'équation  $2x + y = 2084$

**GEO 85 (projeté sur une droite)**

On considère l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

1. Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{E}$
2. Donner l'équation cartésienne de la tangente à  $\mathcal{E}$  au point  $M(t)$
3. Déterminer le lieu de  $P$ , le projeté de  $O$  sur la tangente au point  $M(t)$

**GEO 86**

On note  $\Gamma$  le support de la courbe paramétrée  $\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^* = I$ .

Justifier que  $\Gamma$  est inclus dans une parabole dont on donnera l'équation cartésienne. Etudier la réciproque.

**GEO 87**

Nature et dessin de la courbe d'équation  $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 = 0$

On précisera l'excentricité, le foyer et la droite directrice

**GEO 88**

1. Déterminer la nature de la courbe  $\Gamma_m$  d'équation  $9x^2 + my^2 - 18x + 16y - 11 = 0$  avec  $m \in \mathbb{R}$ .
2. Même question avec  $\Gamma_m : mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$

**GEO 89**

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$  on note  $C_\alpha$  la conique d'équation cartésienne  $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1$ .

1. Donner la nature de  $C_\alpha$  en fonction de  $\alpha$
2. Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan NON situé sur les axes.
3. Montrer que passent par  $M_0$  deux coniques  $C_{\alpha_1}$  et  $C_{\alpha_2}$  de natures différentes.  
(indication: on pourra déterminer  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \cdot \alpha_2$  puis  $(\alpha_1 - 1) \cdot (\alpha_2 - 1)$ )
4. Montrer que les tangentes en  $M_0$  à  $C_{\alpha_1}$  et  $C_{\alpha_2}$  sont perpendiculaires.

**GEO 90**

Dessiner la courbe d'équation cartésienne  $x.|x| + 4.y.|y| = 4$

**GEO 91**

On considère  $F(\sqrt{2},0)$  et  $D$  la droite d'équation  $x + y + 1 = 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  la conique de foyer  $F$ , de directrice  $D$  et d'excentricité  $e > 0$

1. Donner l'équation de  $\mathcal{C}$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(On ne développera pas l'expression trouvée)

2. Former l'équation de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  où  $\begin{cases} \vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \\ \vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \end{cases}$

3. Lorsque  $e \neq 1$ , on note  $\Omega$  le centre de la conique  $\mathcal{C}$ .

Donner le lieu de  $\Omega$  lorsque  $e$  décrit  $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

**GEO 92**

On note  $\vec{I} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$  et  $\vec{J} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

Dans le repère repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$ , on considère la conique d'équation  $2X^2 + \lambda.Y^2 - 4X + Y = 0$

1. Déterminer sa nature suivant les valeurs de  $\lambda$
2. Représenter la courbe pour  $\lambda = 0, \lambda = -8$  et  $\lambda = 8$

**GEO 93**

On considère l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , et ses sommets  $A(2,0)$  et  $B(0,3)$

1. Déterminer  $\mathcal{C}$  le lieu des centres de gravité des triangles  $ABM$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{E}$
2. Représenter  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{E}$  sur une même figure

**GEO 94**

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plans, et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

On souhaite déterminer le lieu des points  $M$  tels que  $IM^2 = AM \times BM$

1. Proposer un repère orthonormé a priori bien adapté à ce problème
2. Montrer que le lieu de  $M$  est une hyperbole

**Longueur, repère de Frenet, développée**
**GEO 95**

On considère l'arc paramétré  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (t, \ln t)$

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine  $t_0 = 2$ .

(On sera amené à poser  $u = \sqrt{t^2 + 1}$

2. Déterminer la longueur de la courbe entre  $M(\sqrt{3})$  et  $M(\sqrt{8})$

**GEO 96**

Soit la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin(t). \cos(t) \end{cases}$  avec  $t \in ]0, \pi[$

1. Montrer que  $\Gamma$  admet 2 points de rebroussements.

2. Calculer la longueur de  $\Gamma$  entre ces 2 points de rebroussement

**GEO 97**

Déterminer la longueur de la courbe paramétrée suivante  $f : t \mapsto (3 \cos(t) + \cos(3t), 3 \sin(t) + \sin(3t))$  avec  $t \in [0, 2\pi]$

**GEO 98**

Soit l'arc paramétré  $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$  avec  $t \in [0, 2\pi]$

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine  $t_0 = 0$
2. Quelle est la longueur de la courbe?

**GEO 99**

On considère l'arc paramétré  $(\mathbb{R}, f)$  avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (\frac{t^2}{2}, t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)$

1. La courbe est-elle régulière?
2. Déterminer le repère de Frenet là où il peut être défini.
3. Expliquer pourquoi la courbe possède une tangente en  $M(t = 0)$  et donner cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine  $t = 0$

**GEO 100**

On considère l'arc paramétré  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (t, e^t)$

1. Déterminer la développée de  $\gamma = (\mathbb{R}, f)$
2. En quel point de  $\gamma$  la courbure est-elle extrémale?
3. Donner une équation cartésienne de  $\gamma$

**GEO 101**

1. Montrer qu'en tout point birégulier la courbure est non nulle.

2. Montrer qu'en tout point d'une droite la courbure est nulle.

3. Montrer que si la courbure est constante et non nulle alors la courbe est un arc de cercle

**GEO 102**

Déterminer la développée de  $t \mapsto (t - \tan t, 1 - \ln(\cos t))$  avec  $t \in ]-\pi/2, +\pi/2[$

**GEO 103**

On considère l'arc  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 3 \cos t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$

1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant  $\sin p + \sin q$  et  $\cos p - \cos q$
2. On se place sur l'intervalle  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$ 
  - (a) Déterminer le repère de Frenet, le paramètre angulaire, ainsi que le rayon de courbure
  - (b) Déterminer le centre de courbure
3. On se place sur l'intervalle  $I = ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ .
  - Déterminer le centre de courbure
4. On considère l'arc  $\Gamma_1$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 6 \cos t - 2 \cos 3t \\ y = 6 \sin t + 2 \sin 3t \end{cases}$ 
  - (a) Déterminer l'expression de  $\Gamma'$ , image de  $\Gamma$  par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
 On note  $P(t)$  le point générique de  $\Gamma'$  et  $N(t)$  celui de  $\Gamma_1$
  - (b) Comparer  $P(t)$  et  $N(t + \pi/4)$
  - (c) En déduire une transformation géométrique permettant de passer de  $\Gamma$  à  $\Gamma_1$

## GEO 104

Déterminer la développée de l'arc paramétré:  $x(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ ,  $y(t) = th(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$

## GEO 105

Soit  $p > 0$  fixé.

On considère l'arc paramétré  $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Représenter cette arc (pour  $p = 1$ )
2. Déterminer sa développée
3. Représenter sur un même dessin sa développée

## GEO 106

Soit  $M$  un point de  $\Gamma$ ,  $s$  une abscisse curviligne sur  $\Gamma$  et  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  le repère de Frenet associé.

1. Montrer que  $M(s+h) = M(s) + h\vec{T} + \frac{h^2}{2}\gamma\vec{N} + o(h^2)$
2. On note  $(X, Y)$  les coordonnées du point  $M(s+h)$  dans le repère  $(M(s), \vec{T}, \vec{N})$ .  
Donner un équivalent de  $X$ , de  $Y$  puis de  $\frac{2Y}{X^2}$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . En déduire que  $\gamma = \lim \frac{2Y}{X^2}$
3. application: dans le cas d'une courbe définie par la relation  $y = h(x)$  telle  $h(0) = 0$  avec une tangente horizontale, montrer que  $\gamma = h''(0)$ .

## GEO 107

Soit  $\lambda > 0$  avec  $\lambda \neq 1$ .

On considère la courbe paramétrée  $\begin{cases} x(t) = \lambda^t \cdot \cos t \\ y(t) = \lambda^t \cdot \sin t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0
2. Déterminer le repère de Frenet
3. Calculer la courbure
4. Déterminer la développée. Interprétation?

## GEO 108 (La cycloïde, très classique)

Soit l'arc paramétré  $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on du point  $M(t)$  au point  $M(t+2\pi)$ ?
2. Etudier l'arc paramétré sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  puis représenter la courbe sur l'intervalle  $[-2\pi, 4\pi]$
3. Déterminer sa développée sur  $I = ]0, 2\pi[$
4. Montrer que  $\forall t \in I, C(t+\pi) = M(t) + (\pi, -2)$   
En déduire une transformation géométrique simple pour passer de  $\Gamma$  à sa développée.
5. Dessiner  $\Gamma$  et sa développée sur un même dessin.

## GEO 109

On considère l'hyperbole  $(H)$  d'équation  $xy = 1$  et on note  $M$  un point de l'hyperbole.

La normale à  $(H)$  au point  $M$  recoupe l'hyperbole en un second point que l'on note  $N$ .

Montrer, en notant  $C$  le centre de courbure au point  $M$ , que  $\vec{NM} = 2\vec{MC}$

indications:

1. Donner une représentation paramétrique de  $(H)$
2. Déterminer les coordonnées du point  $N$
3. Continuer comme des grands!

## GEO 110 ( cercle osculateur pour aider à tracer une courbe)

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ . Soit  $(C)$  la courbe d'équation cartésienne:  $y = \operatorname{ch} x - 1$ ; orientée dans le sens des x croissants.

1. Calculer la longueur de l'arc  $OA$ ;  $A$  étant le point de  $(C)$  d'abscisse  $x = 1$  et  $O$  l'origine du repère.
2. Calculer en un point  $M$  de  $(C)$  le vecteur tangent unitaire orienté  $\vec{T}$ , le vecteur normal unitaire orienté  $\vec{N}$  et le rayon de courbure  $R$ . Préciser les résultats obtenus en  $O$ .
3. On se propose de préciser les positions relatives en  $O$  de la courbe  $(C)$  d'équation:  $y = \operatorname{ch} x - 1$ , de la parabole d'équation  $y = \frac{1}{2}x^2$  et du cercle osculateur en  $O$  à  $(C)$ . Pour cela, on réalisera les développements limités au voisinage de zéro de l'ordonnée  $y$  d'un point  $P$  du cercle osculateur dont on écrira l'équation ( choisir la valeur de  $y$  la plus proche de zéro ) et de la fonction  $\operatorname{ch} x - 1$ . Faire un schéma.  
(on rappelle que le cercle osculateur est le cercle de centre le centre de courbure et de rayon le rayon de courbure)

## GEO 111

Soit  $C$  le centre de courbure en  $M$  d'une parabole de foyer  $F$ . Soit  $P$  le projeté de  $C$  sur  $(FM)$ .

1. Montrer que  $F$  est le milieu de  $[MP]$
2. En déduire le lieu de  $P$

(on pourra paramétriser  $M(t^2/(2p), t)$ ) et dans ce cas  $F(p/2, 0)$

## GEO 112

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la courbe paramétrée  $\mathcal{C}$  décrite par le point  $M(t)$  de

coordonnées  $\begin{cases} x(t) = 3 \cos t + 3 \cos(2t) + \cos(3t) \\ y(t) = 3 \sin t + 3 \sin(2t) + \sin(3t) \end{cases}$  avec  $t \in [-\pi, +\pi]$

1. (a) Réduire l'intervalle d'étude.  
(b) On pose  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Montrer que  $z'(t) = 12 \cdot \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \exp(i(2t + \frac{\pi}{2}))$   
(c) Etudier et représenter graphiquement  $\mathcal{C}$ . (en particulier, étude du point  $M(\pi)$ )
2. (a) Déterminer une abscisse curviligne de  $\mathcal{C}$ . En déduire la longueur de  $\mathcal{C}$   
(b) Déterminer  $\vec{T}, \vec{N}$  et  $R$  en fonction de  $t$ , ainsi que le centre de courbure  $I(t)$   
(c) Montrer que  $I(t)$  a pour coordonnées  $\begin{cases} X(t) = \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos(3t) \\ Y(t) = \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin(3t) \end{cases}$  pour  $t \in ]-\pi, +\pi[$   
(d) Etude et construction de  $\Gamma$  la développée de  $\mathcal{C}$ .  
(on remarquera que l'on peut restreindre l'étude à  $[0, \pi/2]$ )
3. Déterminer la développée  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  (on pourra se restreindre à  $[0, \pi/2]$ ), et indiquer une transformation géométrique simple qui permet de passer de  $\Gamma$  à  $\Gamma'$ .

## GEO 113

Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré. Comme d'habitude, on note  $s$  une abscisse curviligne et  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  le repère de Frenet en tout point  $M$  de  $\Gamma$ .

A chaque point  $M$  de  $\Gamma$  on associe le point  $P$  tel que  $P = M + s \cdot \vec{N}$

1. Déterminer, par ses composantes dans le repère de Frenet associé au point  $M$ , un vecteur tangent à la courbe décrite par  $P$  lorsque  $M$  varie.
2. A quelle condition cette tangente est-elle la droite  $(MP)$ ?
3. On suppose que  $1 - \gamma s = 0$ . Déterminer  $\alpha$  en fonction de  $s$ , puis  $x$  et  $y$  en fonction de  $s$ .  
Reconnaitre  $\Gamma$ !

**GEO 114**

On considère la courbe paramétrée suivante  $f : t \mapsto (3 \cos(t) + \cos(3t), 3 \sin(t) + \sin(3t))$  avec  $t \in [0, 2\pi]$

1. Déterminer la longueur de cette courbe
2. Déterminer la développée de cette courbe

**GEO 115**

Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée  $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( \begin{array}{l} t + \sin(t) - 4 \sin(t/2) \\ 3 + \cos(t) - 4 \cos(t/2) \end{array} \right)$

1. Etudier et construire  $\Gamma$
2. Expliciter une abscisse curviligne de  $\Gamma$  et calculer sa longueur entre  $M(0)$  et  $M(4\pi)$
3. Pour  $t \in ]0, 4\pi[$ , déterminer le repère de Frenet et le rayon de courbure au point  $M(t)$
4. Déterminer et construire la développée de  $\Gamma$

**GEO 116**

Soit la courbe  $\Gamma$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t^2} + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$

1. Justifier que la normale à  $\Gamma$  en  $M_t$  est paramétrée par  $\begin{cases} x_t(u) = t^2 + \frac{2}{t} + u \\ y_t(u) = \frac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases}$ ,  $u \in \mathbb{R}$

2. En déduire une représentation paramétrique de la développée de  $\Gamma$

3. Utiliser ce résultats pour donner le centre et le rayon de courbure au point  $M_{-1}$

**Enveloppe de droites, développée**
**GEO 117**

Pour  $\mu \in \mathbb{R}^*$ , on considère la courbe paramétrée de support  $\Gamma_\mu$  définie par  $\begin{cases} x(t) = \frac{\mu}{t} + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = \frac{1}{t} + \frac{\mu}{t-1} \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

1. Montrer que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}^*$ ,  $\Gamma_\mu$  admet une droite asymptote  $D_\mu$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , et donner une équation cartésienne de cette droite
2. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites  $(D_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}^*}$

**GEO 118**

Déterminer l'enveloppe de la famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$  dans les 3 cas suivants

$$1) (1-t^2)x + 2ty - (1+t^2) = 0 \quad 2) (t-2)x + (3t-2t^2)y + t^3 = 0 \quad 3) t^3(x-1) + 3tx - 2y = 0$$

**GEO 119**

Soit  $\lambda$  un réel. On considère la droite  $(D_\lambda) : \lambda x + (\lambda^2 - 1)y + 3\lambda^2 + 1 - \lambda = 0$ .

1. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passe au moins une droite  $(D_\lambda)$ .  
Plus précisément, on déterminera l'ensemble des points par lesquels passe exactement une droite du type  $(D_\lambda)$ , et l'ensemble des points par lesquels passent deux droites distinctes du type  $(D_\lambda)$ .
2. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux droites du type  $(D_\lambda)$  perpendiculaires.

**GEO 120**

On considère la famille de droites  $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'équation cartésienne  $(1-t^2)x + 2t.y - 4t - 2 = 0$ .

Montrer que toutes ces droites sont tangentes à un même cercle à déterminer

**GEO 121**

Déterminer la développée de l'ellipse paramétrée par  $f : t \mapsto (2 \cos t, \sin t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$

**GEO 122**

Déterminer la développée de la courbe paramétrée  $f : t \mapsto (2 \cosh t, 3 \sinh t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$

**GEO 123**

Déterminer la développée de la courbe paramétrée  $f : t \mapsto (t - \sinh t, \cosh t, 2 \sinh t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$

**GEO 124**

On considère  $H$  l'hyperbole d'équation  $xy = 1$ .

Une tangente  $T$  à  $H$  coupe l'axe des ordonnées en un point  $P$ .

Déterminer l'enveloppe des perpendiculaires à  $T$  en  $P$ .

**GEO 125**

Soit  $p > 0$  fixé. On considère la parabole  $P$  d'équation  $y^2 = 2px$ .

Soit  $A$  un point de  $P$ . La normale  $\Delta$  à  $P$  au point  $A$  coupe l'axe des abscisses en  $I$

Déterminer l'enveloppe des droites perpendiculaires à  $\Delta$  en  $I$

**GEO 126**

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a > 0$ .

On appelle "Caustique au soleil par réflexion de  $\mathcal{C}$ " l'enveloppe  $\Gamma$  des rayons réfléchis par  $\mathcal{C}$  et issu d'une source lumineuse qui se trouve à une distance si lointaine que l'on peut considérer les rayons comme parallèles, à l'axe des abscisses. (Source situé vers  $-\infty$ ).

1. Faire un dessin et y placer le point  $A(a \cos t, a \sin t)$
2. Un rayon se réfléchi au point  $A$  et recoupe le cercle au point  $B$ .  
En faisant un raisonnement sur les angles, montrer que  $B(-a \cos(3t), -a \sin(3t))$
3. Déterminer une représentation paramétrique de  $\Gamma$ , l'enveloppe des droites  $(AB)$
4. Etudier et tracer  $\Gamma$

**Divers**
**GEO 127**

Soit  $P = A_1 A_2 \dots A_n$  un polygone à  $n$  sommets. On lui associe le polygone  $P' = A'_1 A'_2 \dots A'_n$  où  $A'_i$  est l'isobarycentre de tous les sommets sauf  $A_i$ .

On définit alors une suite de polygones par récurrence :  $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)' \end{cases}$

1. Montrer que l'isobarycentre de tous les  $P_k$  est le même, on le note  $G$
2. Montrer que chaque sommet de  $P_k$  converge vers le centre de gravité de  $P_0$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. (on pourra considérer les affixes de chaque point, écrire à l'aide d'une matrice les relations existantes entre ces affixes, et ...)

**GEO 128**

Soit  $a$  un réel.

On considère les points  $A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1), P(0, a), Q(-a, a), R(-a, 0)$ .

On note  $M$  le point d'intersection des droites  $(AP)$  et  $(BQ)$

1. Faire une figure
2. Donner les équations cartésiennes des droites  $(AP)$  et  $(BQ)$ , puis les coordonnées du point  $M$
3. Montrer que  $M, C$  et  $R$  sont alignés.

**GEO 129**

Soient  $M_i(x_i, y_i)$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$  trois points du plan affine.

Montrer que ces points sont alignés si et seulement si  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

**GEO 130**

On considère l'arc paramétré  $\Gamma = (\mathbb{R}, f)$  donné par  $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cos t \end{cases}$

1. Etudier les éventuelles symétries de  $\Gamma$
2. Etudier les éventuels points singuliers de  $\Gamma$ , et indiquer leur nature.
3. (a) On pose  $\psi(t) = \|f(t)\|$ . Calculer  $\psi(t)$ , puis en déduire que les points doubles de  $\Gamma$ , s'ils existent, sont situés sur l'axe des abscisses.  
(b) Réciproquement, montrer que les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses, sauf  $f(0)$ , sont des points doubles.
4. (a) Déterminer une équation de la normale à  $\Gamma$  au point  $M_t$ , pour  $t \neq 0$ .  
(b) Démontrer que toute normale ainsi définie est tangente à un cercle fixe
5. (a) Etudier  $f$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et représenter  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .  
(b) Indiquer une construction géométrique du point  $f(t + 2\pi)$  à partir du point  $f(t)$ , pour  $t \in \mathbb{R}$   
(c) En déduire l'allure de  $\Gamma$

**GEO 131**

Trouver les droites à la fois normales et tangentes à l'arc paramétré  $\Gamma$  :  $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$

**GEO 132**

Déterminer une équation cartésienne de la courbe paramétrée  $([0, 2\pi], f)$  avec  $f : t \mapsto (\cos t, \cos t + \sin t)$

**GEO 133 (courbure)**

Soit une courbe  $\Gamma$  de classe  $C^2$ , régulière, d'abscisse curviligne  $s$ , et  $\vec{T}(s)$  le vecteur unitaire tangent. On pose :

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OM}(s) + \lambda(s)\vec{T}(s) \quad \overrightarrow{OQ}(s) = \overrightarrow{OM}(s) - \lambda(s)\vec{T}(s)$$

$\lambda$  étant une fonction de classe  $C^1$ , et  $M$  parcourant  $\Gamma$ .

On note  $\Gamma_1$  [respectivement  $\Gamma_2$ ] le lieu de  $P$  [de  $Q$ ].

1. Faire un dessin
2. Déterminer  $A$ , l'intersection de la normale en  $P$  à  $\Gamma_1$  et la normale en  $M$  à  $\Gamma$
3. Déterminer  $B$ , l'intersection de la normale en  $Q$  à  $\Gamma_2$  et la normale en  $M$  à  $\Gamma$
4. Montrer le milieu de  $[A, B]$  est le centre de courbure en  $M$  à  $\Gamma$

**GEO 134**

On considère l'arc  $\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$

1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant  $\sin p + \sin q$  et  $\cos p - \cos q$

2. On se place sur l'intervalle  $I = ]0, \frac{2\pi}{3}[$

- (a) Déterminer le repère de Frenet et le paramètre angulaire.

Montrer que la rayon de courbure vaut  $-8 \sin \frac{3t}{2}$

(b) Déterminer le centre de courbure (*on devra trouver*  $\begin{cases} x = 6 \cos t - 3 \cos 2t \\ y = 6 \sin t + 3 \sin 2t \end{cases}$ )

3. On se place sur l'intervalle  $I = ]-\frac{2\pi}{3}, 0[$ .  
Déterminer le centre de courbure

4. Soit  $t \in \mathbb{R}$ .  
Calculer  $C(t + \pi)$ , puis indiquer par quelle transformation géométrique, on passe du point  $M(t)$  au point  $C(t + \pi)$
5. En déduire une transformation géométrique simple pour passer de l'arc à sa développée.

**Réduction avec terme en  $xy$** 
**GEO 135**

Réduire les coniques suivantes ( $\lambda$  paramètre réel)

1.  $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + \lambda = 0$
2.  $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$
3.  $x^2 + xy + y^2 + 4x - y - \lambda = 0$
4.  $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$
5.  $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 5y = 0$
6.  $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 2\sqrt{2} = 0$
7.  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y = 0$
8.  $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 1 = 0$
9.  $x^2 + y^2 + 2\lambda xy = 1$
10.  $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y = 0$

**GEO 136**

Soient les points  $A(3, 0)$  et  $B(0, 2)$ .

On considère pour  $m \in \mathbb{R}$  la conique  $C_m$  d'équation

$$4x^2 + 9y^2 + 2(m-6)xy - 24x - 36y + 36 = 0$$

1. Montrer que  $C_6$  est une ellipse et  $C_{12}$  une droite. Les tracer
2. Montrer que les coniques  $C_m$  passent par les points  $A$  et  $B$ , et que ce sont leurs seuls points communs
3. A quelle cns portant sur  $m$  la conique  $C_m$  est-elle du type ellipse? Dans ce cas  $C_m$  peut-elle être dégénérée? Un cercle?
4. A quelle cns portant sur  $m$  la conique  $C_m$  est-elle du type hyperbole? du type parabole?

**GEO 137**

Dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(1, 0)$  et  $B(0, 1)$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle  $OAB$  est égale à  $1/3$

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est une ellipse
2. Montrer que l'ellipse  $\mathcal{C}$  est tangente aux droites  $(OA)$  et  $(OB)$
3. Déterminer une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$