4 Séries numériques

ANA 96 (Banque PT 2020 C, (extrait))

Partie 2

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right).$$
3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x) = h\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x).$$
5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$.
7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Partie 3

1. Étudier la convergence de la série de terme général : $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$.
2. On considère la suite $(R_n)_{n\geqslant 2}$, de premier terme $R_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 3$:
$$R_n = R_{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$
   (a) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 4$, et de deux façons différentes :
$$\sum_{k=4}^{n}\{\ln R_k - \ln R_{k-1}\}.$$
   (b) La suite $(\ln R_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

   (c) Justifier l'existence de :
$$R = \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=3}^{N}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$
   On écrira, dans ce qui suit :
$$\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=3}^{N}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right).$$
3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1, i.e. : $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

   (b) En déduire, pour tout t de $]0,1]$, l'expression de : $\frac{1-(1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.

   (c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t$

   Étudier la convergence de l'intégrale I_n.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}\mathrm{d}t$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.

   (b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

   (c) En déduire l'existence de :
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}.$$

ANA 97

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels ou de complexes.

1. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_n est
2. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_n est
3. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_{2n} est
4. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_{2n} est

$(A)\ \sum\limits_{k=0}^{2n} u_k \qquad (B)\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} \qquad (C)\ \sum\limits_{k=0}^{2n} u_{2k} \qquad (D)\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

DÉTERMINER LA NATURE D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 98

Pour chacune des séries déterminer la somme partielle d'indice n et préciser si la série converge

$a)\ \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \qquad b)\ \sum\limits_{n\geqslant 3}(-1)^n \qquad c)\ \sum\limits_{n\geqslant 0} n \qquad d)\ \sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\frac{n}{n+1} \qquad d)\ \sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\frac{n+1}{n}$

ANA 99

Parmi les séries ci-dessous, indiquer celles qui sont grossièrement divergentes

$a)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 \qquad b)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} n.\sin\frac{1}{n} \qquad c)\ \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n^{2050}}{2^n} \qquad d)\ \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n.n^2}{n+4}$

ANA 100

Indiquer la nature précise(CV, DV, ACV, GDV) des séries suivantes:

$$\sum\frac{1}{n^2} \qquad \sum\frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum\frac{1}{n} \qquad \sum\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum\sqrt{n} \qquad \sum\cos n$$

$$\sum\frac{(-2)^n}{n!} \qquad \sum n! \qquad \sum\frac{2^n}{n^2} \qquad \sum(1-10^{-n})^n \qquad \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ANA 101
Soit (u_n) une suite positive et (v_n) une suite négative telles que $\forall n \geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \pi + v_n$.
Justifier que la série de terme général u_n converge et que la suite de terme général v_n converge.

ANA 102 (développement personnel)
Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sin t}{1+t} dt$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

ANA 103
avec un développement limité Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$ où a est un réel donné autre que -1.
Et si a était un complexe?

ANA 104
Soit a un nombre complexe.
Etudier la convergence des séries de terme général $u_n = (a^n)^2$ et $v_n = a^{n^2}$

ANA 105 (fondamental)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

ANA 106
Soit (λ_n) une suite croissante de réels qui tend vers $+\infty$.
Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n . e^{-\lambda_n}$

ANA 107
Nature des séries de terme général :

1. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$ 2. $n^2 \sin \dfrac{\pi}{2^n}$ 3. $\dfrac{2^n . n!}{n^n}$
4. $\operatorname{sh} \dfrac{1}{n} - \sin \dfrac{1}{n}$ 5. $\dfrac{(-1)^n n + 2}{n^3 + 2n^2 + 1}$ 6. $2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{2}$
7. $\dfrac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ 8. $(-1)^n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ 9. $(-1)^n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$
10. $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$ 11. $\dfrac{1.4.7.\ldots.(3n-5)(3n-2)}{3^n . n!}$ 12. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
13. $3 \ln(n^2+1) - 2 \ln(n^3+1)$ 14. $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 15. $\dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{n^n}$
16. $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 17. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$ 18. $\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$
19. $\dfrac{\exp(in)}{n^2 + \cos n}$ 20. $e^{-\sqrt{n}}$ 21. $\dfrac{1}{n^{3+\sin n}}$
22. $\dfrac{1}{(\ln n)^{2024}}$ 23. $\dfrac{(\ln n)^{2028}}{n^{1,000000001}}$ 24. $\sum \dfrac{(\ln n)^{2038}}{n}$
25. e^{-n^2} 26. $e^{-\sqrt{n}}$ 27. $\dfrac{n!}{n^n}$
28. $\sin(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n})$ 29. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{1+2+\cdots+n}\right)$ 30. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n} . \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$
31. $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ 32. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1! + \cdots + n!}{(n+2)!}$ 33. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$

ANA 108
a,b et α étant deux paramètres réels, nature des séries de terme général :

1. $\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$ 2. $\cos \dfrac{1}{n} - a - \dfrac{b}{n}$ 3. $\ln\left(\dfrac{1+n^a}{2+n^b}\right)$
4. $a^n \sin \dfrac{1}{n}$ 5. $\dfrac{1+a^n}{n} b^n$ 6. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
7. $\operatorname{ch}^a n - \operatorname{sh}^a n$ 8. $\arctan n^\alpha$ 9. $\dfrac{1}{n \ln(1+a^n)}$
10. $\dfrac{a^n . 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$ 11. $\tan \pi\sqrt{n^2 + an + b}$ 12. $\arccos \sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}}$
13. $\dfrac{1}{n . \ln^a n}$ 14. $\dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}$ 15. $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$

ANA 109
Soit a un réel strictement positif. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(n!)^2 . a^n}{(2n)!}$

ANA 110 (le contre-exemple classique qui prouve l'importance du signe stable dans la rde)
.
On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$
2. La série de terme général v_n est-elle une série alternée?
3. Donner un équivalent de v_n
4. Calculer un développement limité de v_n avec trois termes
5. En déduire que la série de terme général v_n est divergente

ANA 111 (nature de la série $\sum \cos n\theta$)
Soit θ un réel. On note $u_n = \cos n\theta$

1. Dans quels cas simples, peut-on conclure quant à la nature de $\sum u_n$?
2. On considère maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
   (a) Ecrire une égalité entre u_{n+1} et u_n
   (b) On suppose que $\lim u_n = 0$. Montrer qu'alors la suite $(\sin n\theta)$ converge elle aussi vers 0. En déduire une contradiction.
   (c) Conclure

   On vient de montrer que la série $\sum \cos n\theta$ est toujours grossièrement divergente.

On aurait pu aussi passer en complexe pour déterminer l'expression explicite de la somme partielle d'indice n

ANA 112
On considère la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{3n+1000}{5n-999}\right)^n$.
Montrer que pour n assez grand on a $0 \leqslant u_n \leqslant 0.7^n$ puis conclure.

ANA 113
Dans cet exercice nous allons montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.

1. On pose $u_n = \dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}$. Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
2. En déduire que pour n assez grand $2^{n^2} \geqslant (4n)!$, puis conclure.

ANA 114
Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_n = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ANA 115 (une v.a. qui possède une variance possède une espérance)
Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle tq $\sum p_n.x_n^2$ converge
Montrer que $\sum p_n.x_n$ est une série convergente

ANA 116

1. Soit (u_n) une suite réelle qui vérifie la relation $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.
   Déterminer les suites (u_n) tel que $\sum u_n$ CV
2. Même question pour la relation $3.u_{n+2} - 4.u_{n+1} + u_n = 0$

ANA 117
très formateur sur la recherche d'équivalents

1. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose $u_n = \operatorname{sh} \dfrac{1}{n^\alpha} - \sin \dfrac{1}{n^\beta}$
   Déterminer la nature de $\sum u_n$
2. Soit α un réel. Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = \arctan n^\alpha$.

ANA 118 (démonstation de $x^n = o(n!)$)
.
Soit $x > 1$ un réel fixé. On note $a_n = \dfrac{n!}{x^n}$ et $S_n = \ln a_n$ pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \dfrac{k}{x}$ pour tout entier n.
2. En déduire que $\lim S_n = +\infty$
3. Justifier que $x^n = o(n!)$

ANA 119
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall n \geqslant 0, \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$

1. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est majorée par une suite géométrique que l'on explicitera.
2. A quelle condition sur k est-t-on sûr que la suite (u_n) CV? Que la série de terme général u_n CV?
3. Dans le cas où $k < 1$, déterminer en fonction de k et de u_0 le plus petit entier N pour lequel on est sûr que $|u_N| \leqslant 10^{-5}$

ANA 120
Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}$

1. la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?
2. en écrivant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$

ANA 121
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$

1. Etudier la suite (u_n)
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   Montrer que $\lim v_n = 1$
3. En utilisant le théorème de Césaro (cf.RDM), déterminer un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$

ANA 122
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que (v_n) converge vers 1/3.
3. En utilisant le théorème de Césaro (cf. RDM) à la suite (v_n), montrer que $u_n = \sqrt{\dfrac{3}{n}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$

ANA 123
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
Montrer que les séries suivantes sont convergentes

$$i) \sum \max(u_n, v_n) \qquad ii) \sum \sqrt{u_n v_n}$$

ANA 124
Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.
Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge

ANA 125
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ pour $n \geqslant 1$
Déterminer la nature de la série de terme général u_n
(On pourra montrer par l'absurde que cette série est divergente)

ANA 126
Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.
Montrer que les séries $\sum \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ et $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(a_n) - 1}{a_n}$ convergent

ÉTUDIER LES SOMMES PARTIELLES OU LE RESTE

ANA 127
Déterminer un équivalent des expressions suivantes lorsque $n \to \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{2030} \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-2030} \qquad U_n = \ln(n!) \qquad V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}$$

ANA 128
On souhaite donner une valeur approchée de $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^3}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t^3}$ (on note v_k cette quantité)
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $N > n$, on a $\sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \displaystyle\int_{n}^{N} \dfrac{dt}{t^3}$
3. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < R_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$, et proposer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

ANA 129
Convergence et valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k + 3^k + \cdots + 2026^k}$

ANA 130
Soit a et b deux paramètres réels. On note $u_n = \sqrt{n} + a.\sqrt{n+1} + b.\sqrt{n+2}$

1. Déterminer une cns sur (a,b) pour que $\sum u_n$ converge
2. Sous cette condition, déterminer la somme de la série ainsi qu'un équivalent simple du reste d'ordre n

ANA 131

1. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$.
2. Encadrer la somme partielle S_n en utilisant deux intégrales, puis en déduire un équivalent.

ANA 132
Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $S(a) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n^2+a^2}$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente
2. Encadrer $S(a)$ avec des intégrales lorsque $a > 0$
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \to +\infty$

ANA 133
On pose pour tout $n \geqslant 1, v_n = (-1)^n.\dfrac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est une série convergente
2. On note R_n le reste de cette série numérique.
   (a) Justifier que $\forall n \geqslant 1, |R_n| \leqslant \dfrac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$
   (b) En déduire une valeur approchée de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ à 10^{-2} près

DÉTERMINER LA SOMME D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 134
On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3-n}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Déterminer la somme partielle d'indice n
2. En déduire la convergence et la somme de la série

ANA 135
Soit x un réel tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{2^n} \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$.
Après avoir exprimé $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan x$ de manière simple en fonction de $\tan(2x)$,
justifier que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{x}{2^n}$ converge et donner sa somme

ANA 136
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.
Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$
Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 137
Montrer la convergence et déterminer la somme de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 2$

ANA 138
Nature et somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$ 2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^3}{n!}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n x^{2n+1}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n/2}\cos(n\dfrac{\pi}{4})$ 5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x}{(1+x)^n}$ 6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{n!}$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 8. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-1}{n!}$ 9. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$
10. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ 11. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(1-\dfrac{1}{n^2})$ 12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n+(-1)^n}$
13. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{2^{4n-3}}$ 14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ 15. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\cos(\dfrac{1}{2^n})$
16. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n.\sin^3\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ 17. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$

ANA 139 (D'après un exercice d'oral)
Soit $p \geqslant 0$ un entier. On note pour tout $k \geqslant 0, u_k = \dfrac{1}{\dbinom{k+p}{k}}$

1. Simplifier $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{p-(n+1)u_n}{p-1}$
3. Montrer que la série de terme général u_k diverge pour $p=0$ ou $p=1$
4. Dans le cas où $p=2$, montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{p}{p-1}$

ANA 140
On pose pour tout $n \geqslant 0, R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

1. Montrer que la suite (R_{n+1}) est bien définie, càd que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est bien convergente
2. Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente
3. On souhaite calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n$.
   Pour cela on note S_N la somme partielle d'indice N de cette série.
   (On admettra que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$*)*
   (a) Montrer que $\forall N \geqslant 0, S_N = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \dfrac{(-1)^k}{k} + (N+1).\sum\limits_{k=N+2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$
   (b) Donner un majorant simple de $\left|\sum\limits_{k=N+2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}\right|$
   (c) En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n = -\ln 2$

ANA 141
Nature (et somme éventuelle) des séries de terme général :

$$u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+n+1}) \qquad v_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

(on pourra, pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$, utiliser la formule d'addition (en la démontrant):
$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(\dfrac{a-b}{1+ab})$ *si* $(\arctan(a) - \arctan(b)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*)*

ANA 142
Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes
2. Montrer que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n = -\dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$

ANA 143
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.
Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$
Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 144
On admet dans cet exercice que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

1. convergence et somme de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}$ *(on remarquera* $2k^2+2k+1 = k^2 + (k+1)^2$*)*
2. convergence et somme de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$

   (déterminer les réels a,b,c et d tels que $\dfrac{1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k^2} + \dfrac{d}{(k+1)^2}$*)*

PRODUIT DE CAUCHY

ANA 145
Pour $n \geqslant 0$ on pose $c_n = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{4^k}{k!}$

1. Montrer que la série de terme général c_n converge
2. Déterminer 2 réels a et b tels que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}\right) . \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n\right)$ et en déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$

ANA 146
Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{3^n}$

ANA 147
Soient a et b deux complexes de modules strictement inférieur à un.
Montrer que $\dfrac{1}{1-a} . \dfrac{1}{1-b} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$

PETITS PROBLÈMES

ANA 148
Soit $(t_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $t_1 \in]0,\pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} = \sin t_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < t_n < \pi$
2. Montrer que la suite (t_n) converge vers 0
3. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ diverge
4. En déduire la nature de $\sum t_n^2$ et enfin celle de $\sum t_n$

ANA 149 (série et intégrale)
On considère la série de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.
On note S_N la somme partielle d'indice N

1. Montrer que cette série est convergente
2. Montrer que $S_N = I - J_N$ avec $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^3}$ et $J_N = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3} dt$
3. Trouver 3 réels a,b,c tels que $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2-X+1}$
4. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

   (On trouvera $\dfrac{\sqrt{3}.\pi}{9} + \dfrac{\ln 2}{3}$*)*

ANA 150 (série et intégrale)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n . f(t) dt$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n . a_n$ converge vers $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(t)}{1+t} dt$
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

ANA 151 (série et intégrale)
Soit $a > 0$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$ on a $\left| \dfrac{1}{1+t^a} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k . t^{ak} \right| \leqslant t^{(n+1)a}$
2. En déduire que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{an+1}}$
3. Application pour $a = 2$

ANA 152

1. préliminaire : Montrer que si la série de terme général $x_n > 0$ converge alors la série de terme général x_n^2 converge aussi
2. Dans les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} & \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

   Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle
   (c) En utilisant $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$, montrer que la série de terme général v_n est divergente
4. (a) Montrer que $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n

ANA 153
Nous allons montrer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \text{ avec } n \geqslant 1$$

et en calculer la somme. Pour cela, on pose $\forall n \geqslant 1, v_n = \sqrt{n} u_n$

1. Après avoir justifié que $u_n = v_{n-1} - v_n$ pour $n \geqslant 2$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - v_n$
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $\ln v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
4. En déduire que $\lim \ln v_n = -\infty$. Donner $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

ANA 154
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = H_n - \ln n, \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

3. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(2n-1)} = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{n}$
4. Justifier que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant les questions précédentes

108 .10 *Intéressant surtout pour la recherche d'équivalents*

Pour a et b réels on note $\boxed{u_n = \dfrac{a^n.2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}}$

- Pour $a = 0$ on a $\forall n \geqslant 1, u_n = 0$ et donc la série $\sum u_n$ converge trivialement.
  Dans toute la suite on supposera $a \neq 0$
- Commençons par déterminer un équivalent de u_n: pour cela on va chercher un équivalent du dénominateur.
  Pour tout $n \geqslant 1$ on a $\left|\dfrac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = \dfrac{|b|^n}{2^{\sqrt{n}}} = \exp(n\ln(|b|) - \sqrt{n}.\ln 2)$
  On en déduit que:
  i) si $|b| \leqslant 1$ alors $\lim \left|\dfrac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = 0$
  ii) si $|b| > 1$ alors $\lim \left|\dfrac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right| = +\infty$ d'après le théorème des puissances comparées.

  Conclusion : si $|b| \leqslant 1$ on a $b^n = o(2^{\sqrt{n}})$ et donc $\boxed{b^n + 2^{\sqrt{n}} \sim 2^{\sqrt{n}}}$
  . si $|b| > 1$ on a $2^{\sqrt{n}} = o(b^n)$ et donc $\boxed{b^n + 2^{\sqrt{n}} \sim b^n}$
- $\boxed{\text{Etude du cas } |b| \leqslant 1. \text{ On a alors } u_n \sim a^n}$
  Ici comme a peut être négatif il ne faudrait surtout pas affirmer que les séries de tg u_n et de tg a^n sont de même nature!
  On commence par écrire que $|u_n| \sim |a|^n$.
  Nous allons utiliser cet équivalent de deux manières différentes.
  i) si $|a| < 1$
  On sait que la série géométrique de tg $|a|^n$ est convergente, et l'équivalent précédent nous permet d'affirmer (signe stable!) que la série de tg $|u_n|$ converge.
  On a prouvé que $\boxed{\text{la série de tg } u_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$
  ii) si $|a| \geqslant 1$
  On ne va pas utiliser l'équivalent précédent pour dire que les séries sont de même nature (en effet, on arriverait juste à prouver que $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, ce qui ne permet pas de déterminer la nature de $\sum u_n$)
  On sait que $\lim |a|^n = 1$ si $|a| = 1$ ou $\lim |a|^n = +\infty$ si $|a| > 1$. De par l'équivalent on en déduit que $\lim |u_n|$ est donc égale à 1 ou $+\infty$. Ceci indique que la suite (u_n) ne tend pas vers 0. On a prouvé que $\boxed{\text{la série de tg } u_n \text{ est grossièrement divergente.}}$
- $\boxed{\text{Etude du cas } |b| > 1. \text{ On a alors } u_n \sim \dfrac{a^n.2^{\sqrt{n}}}{b^n}}$
  De même, comme a ou b peuvent être négatifs, on va commencer par écrire que $|u_n| \sim \dfrac{|a|^n.2^{\sqrt{n}}}{|b|^n}$
  Nous allons distinguer deux cas:
  i) si $\dfrac{|a|}{|b|} \geqslant 1$.
  On a alors $\lim \left(\dfrac{|a|}{|b|}\right)^n.2^{\sqrt{n}} = +\infty$.
  On en déduit donc par l'équivalent ci-dessus que $\lim |u_n| = +\infty$. On ne peut donc avoir $\lim u_n = 0$.
  On a prouvé que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est grossièrement divergente.}}$

ii) si $\dfrac{|a|}{|b|} < 1$.

Notons pour tout entier n, $v_n = \dfrac{|a|^n.2^{\sqrt{n}}}{|b|^n}$.

Nous allons déjà montrer que la série de terme général v_n est convergente et nous pourrons affirmer, grâce à l'équivalent de signe stable $|u_n| \sim v_n$, que la série de terme général $|u_n|$ est absolument convergente donc convergente.

Pour montrer que $\sum v_n$ est convergente, nous allons utiliser la règle de D'Alembert.

Pour $n \geqslant 0$ on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{|a|}{|b|}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \longrightarrow \dfrac{|a|}{|b|} < 1$ (en effet $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (penser à la quantité conjuguée! cf TD)

On a bien prouvé que $\sum v_n$ converge et que $\boxed{\sum u_n \text{ converge!}}$

123 i) On a clairement comme les termes sont positifs

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x_n = \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$$

Comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on a $\sum u_n + v_n$ converge.
Et donc par théorème de comparaison, $\sum x_n$ converge

ii) – Première idée:
Comme la fonction $\sqrt{.}$ est une fonction croissante, on peut remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant y_n = \sqrt{u_n.v_n} \leqslant \max(u_n, v_n)$$

En effet, il suffit de considérer le cas $u_n \leqslant v_n$ puis $v_n \leqslant u_n$
Et donc par comparaison, $\sum y_n$ converge

– Seconde idée:
On commence par établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

(Pour la deuxième inégalité, il suffit de développer $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geqslant 0$)
On conclut ensuite avec le même théorème de comparaison !

128 *Dans cet exercice, il ne s'agissait pas d'appliquer* DIRECTEMENT *le théorème de comparaison série-intégrale, mais de redémontrer une partie des résultats.*

1. Soit $k \geqslant 2$.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est décroissante sur $[k-1,k]$, on a donc

$$\forall t \in [k-1,k], f(k) \leqslant f(t)$$

Ainsi par croissante ce l'intégrale

$$\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

ce qui donne l'inégalité demandée

$$u_k = \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

2. Soit $n \geqslant 1$ et $N > n$.
Si $k \geqslant n+1$, on a $k \geqslant 2$, et donc d'après Q1, on a par sommation

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

or par la relation de Chasles, on sait que

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} = \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}$$

ce qui donne bien

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}$$

3. – Comme on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge, la notion de reste R_n a bien un sens.
On a $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$
– Comme $\forall k \geqslant 1, u_k > 0$, on a clairement $R_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$
– Soit $n \geqslant 1$.
On considère un $N > n$.
D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3} = \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_n^N = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on obtient alors

$$R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

– On a donc

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

.
On est donc certain que S_n fournira une valeur approchée de S à 10^{-2} lorsque $\dfrac{1}{2.n^2} \leqslant 10^{-2}$, càd $n^2 \geqslant 50$.
Conclusion: $\boxed{S_8 \text{ est une v.a. de } S \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

133 1. On a

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n.\frac{3n}{n^3} = \frac{3.(-1)^n}{n^2}$$

Comme $\sum \dfrac{3.(-1)^n}{n^2}$ est une série $\boxed{\text{ACV}}$* , par comparaison, on peut affirmer que $\sum v_n$ est ACV
**: ne surtout pas se contenter d'écrire CV, car le signe N'est PAS stable*
autre remarque: pour Q1 il était préférable de répondre ainsi plutôt que d'utiliser le critère spécial...

2. Ici, il fallait penser au critère spécial de convergence des séries alternées!
(a) Notons $f : t \mapsto \dfrac{3t+2}{t^3+3t^2+2t}$

– On a pour tout $n \geqslant 1, v_n = (-1)^n.f(n)$ avec $f(n) > 0$.
Donc $\sum v_n$ est une série alternée!

– La fonction f est bien clairement définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ avec

$$f'(t) = -\frac{6t^3 + 15t^2 + 12t + 4}{(t^3 + 3t^2 + 2t)^2)} < 0$$

Ainsi la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$
ce qui permet d'affirmer que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est décroissante.

– Comme $f(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$ on a $\lim f(n) = 0$

– On a montré que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est une suite décroissante qui tend vers 0, ce qui prouve que $\sum v_n$ vérifie le critère spécial.
On sait alors que

$$|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = \frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$$

(b) Pour déterminer une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ il suffit de déterminer un n tel que

$$|R_n| \leqslant \frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} \leqslant 10^{-2}$$

Pour cela je propose 2 idées:

– **première idée:**
On essaie différente valeur de n et on calcule $\frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$.
On trouve que la première à passer sous les 10^{-2} c'est $n = 15$
Conclusion $S_{15} = \sum_{k=1}^{15} v_k$ est une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ à 10^{-2} près

– **seconde idée:**
On cherche au préalable une majoration de $\frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$
On a clairement par minoration du dénominateur

$$\frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} \leqslant \frac{3n+5}{n^3}$$

et aussi par majoration du numérateur pour $n \geqslant 5$

$$\frac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} \leqslant \frac{3n+5}{n^3} \leqslant \frac{3n+n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$$

Ainsi pour avoir une v.a. à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{4}{n^2} \leqslant 10^{-2}$$

cela donne $n \geqslant 20$
rem: on constate, sans surprise, qu'en ayant fait une majoration intermédiaire, on est obligé de calculer davantage de termes pour être sûr d'obtenir au final la même précision

$\boxed{\textbf{138}}$ **1** – pour la convergence, on peut remarquer que comme $\frac{2}{n(n+3)} \to 0$,
on a $\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) \sim \frac{2}{n(n+3)} \sim \frac{2}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, théorème 5, $\sum u_n$ converge.

– On a:
$\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln($

– Ainsi, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) = \ln(3) + \ln(n+$
$1) - \ln(n+3)$ par procédé télescopique. D'où $\boxed{S_n = \ln(3) + \ln\frac{n+1}{n+3}}$

– Sous cette forme, il est clair que $\lim S_n = \ln(3)$.
On a prouvé que $\boxed{\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln(3)}$

7 – Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

– Une décomposition en éléments simples donne $u_n = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$

– Notons $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. On subodore un procédé télescopique. En effet:
$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1/2}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1/2}{p+2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+2}$
Avec un changement d'indices cela donne: $S_n = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n+2} \frac{1}{p}$
En isolant les termes d'indices 2 et 3 ainsi que ceux d'indices $n+1$ et $n+2$, on a

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p}$$

On obtient donc après simplifications $\boxed{S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}}$, et donc trivialement $\boxed{\lim S_n = \frac{1}{4}}$

– Conclusion: on vient de prouver que $\sum u_n$ est une série convergente et que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =}$

9 On pourra considérer $\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}$

16 On pourra linéariser $\sin^3$

$\boxed{\textbf{144}}$ CORRECTION DE L'EXERCICE SN 84

On note pour tout entier $n, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
D'après le rappel, on sait que la suite (S_n) converge vers $\pi^2/6$

1. – **première idée: on revient aux sommes partielles.**
Pour tout entier n on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 = 2S_n + \frac{1}{(n+1)^2} - 1$
Ensuite, on fait tendre $n \to \infty$ et on obtient la limite finie $\pi^2/3 - 1$. Ceci prouve que la série converge et que sa somme vaut $\pi^2/3 - 1$

– **deuxième idée: on reconnait la somme de deux séries convergentes.** C'est donc une série convergente et l'on a

– la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ converge et l'on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \pi^2/6 - 1$

– $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = (\pi^2/6-1) + \pi^6 = \pi^2/3 - 1$

remarque:
ici on a le choix entre les deux méthodes, et notamment le retour aux sommes partielles n'est pas indispensable... contrairement à la question suivante!

2. On effectue une décomposition en éléments simples. On trouve

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

Soit n un entier naturel fixé, on a:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

On reconnait un procédé télescopique et l'on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 + \frac{2}{n+1} - 2 = 2S_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - 3$$

D'après le rappel, on sait que $\lim S_n = \frac{\pi^2}{6}$. On trouve donc que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \pi^2/3 - 3$.

$\boxed{\text{Conclusion: on a prouvé que } \sum \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3}$

rem: cette fois le retour aux sommes partielles étaient indispensables car la série ne s'écrivait pas comme une somme de séries convergentes (il y en avait deux qui divergeaient!)

148 1. On va faire une démonstration par récurrence.
On note pour $n \geqslant 1, \mathcal{P}_n \ : \ 0 < t_n < \pi$

– **initialisation:**
$\mathcal{P}_1$ est vraie car par hypothèse $t_1 \in]0,\pi[$

– **hérédité:**
On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour $n \geqslant 1$ fixé quelconque.
On a donc

$$0 < t_n < \pi$$

On connait bien la fonction sin et l'on sait d'ailleurs que

$$\sin(]0,\pi[) =]0,1]$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\sin t_n \in]0,1]$$

ce qui prouve a fortiori que

$$0 < t_{n+1} < \pi$$

ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

– **conclusion:** par le principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 1, 0 < t_n < 1}$

2. – Dans la question précédent, on a montré que (t_n) est une suite bornée.
Il est donc naturel de vouloir utiliser le théorème de la limite monotone et ainsi s'intéresser à la monotonie de la suite (t_n)

– Posons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) - x \end{array}}$

– La fonction f est clairement dérivable sur $[0,\pi]$ avec $f'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$.
La fonction f est donc décroissante(strictement même car la dérivée n'est nulle qu'en 0) sur cet intervalle

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$

Ainsi f est négative(strictement même) sur $]0,\pi[$.
Comme $\forall n \geqslant 1$, on a $t_n \in]0,\pi[$, et donc $f(t_n) = t_{n+1} - t_n \leqslant 0$.
On a prouvé que (t_n) est une suite décroissante

– D'après le **théorème de la limite monotone**, on peut affirmer que
$\boxed{\text{la suite } (t_n) \text{ converge vers une limite } l \text{ avec } l \in [0,\pi[}$
Mais attention!! A ce stade, on ne peut affirmer directement la suite tend vers 0

– On sait que $\forall n \geqslant 1, t_{n+1} = \sin t_n$
La fonction sin étant une fonction continue, on peut affirmer par passage à la limite que

$$l = \sin l$$

C'est à dire que

$$f(l) = 0$$

Or l'étude précédente de la fonction f montre que la seule solution à cette équation sur $[0,\pi[$ est $l = 0$

$\boxed{\text{Conclusion: la suite } (t_n) \text{ converge vers } 0}$

3. Notons $u_n = \ln \frac{t_{n+1}}{t_n} = \ln t_{n+1} - \ln t_n$
Notons également S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$
On a donc, avec un procédé télescopique immédiat,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln t_{k+1} - \ln t_k = \sum_{k=1}^{n} \ln t_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \ln t_k = \ln t_{n+1} - \ln t_1$$

Comme $\lim t_n = 0$, on en déduit que $\lim \ln t_{n+1} = -\infty$.
On a montré que $\lim S_n = -\infty$, ce qui prouve que $\sum u_n$ est une série divergente.

remarque: on aurait également pu utiliser **le théorème lien suite-série**.
Par ce théorème, on sait que

$$\text{la série } \sum \ln t_{n+1} - \ln t_n \text{ converge } \textbf{ssi} \text{ la suite } (\ln t_n) \text{ converge}$$

. Comme on a prouvé que $t_n \to 0$, on a la suite $(\ln t_n)$ qui est divergente (vers $-\infty$), et donc la série $\sum \ln t_{n+1} - \ln t_n$ diverge

4. (a) Comme $t_n \to 0$, on peut utiliser le DL de de référence de sin en 0

$$u_n = \frac{\sin t_n}{t_n} = \ln\left(\frac{t_n - t_n^3/6 + o(t_n^3)}{t_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2)\right)$$

Comme $-\frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2) \to 0$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{t_n^2}{6} + o(t_n^2) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{t_n^2}{6}$$

On en déduit que

$$t_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} -6.u_n$$

On applique alors maintenant la Régle des Equivalents (le signe de t_n^2 est bien sûr positif!); on peut affirmer que $\sum t_n^2$ et $\sum -6.u_n$ sont de même nature.
On sait par ailleurs que multiplier une série par un scalaire non nul ne change pas la nature de la série, ce qui permet d'affirmer que $\sum t_n^2$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
$\boxed{\text{Conclusion : } \sum t_n^2 \text{ est une série divergente}}$

(b) – Comme $\lim t_n = 0$ et que $t_n > 0$, on peut affirmer **qu'à partir d'un certain rang**, on a

$$0 < t_n \leqslant 1$$

et donc, comme $t_n > 0$

$$0 < t_n^2 \leqslant t_n$$

Par théorème de comparaison, comme $\sum t_n^2$ diverge, on peut affirmer que $\sum t_n$ diverge

– **autre solution possible: on procède par l'absurde.**
Supposons que $\sum t_n$ soit une série convergente.
Comme $t_n > 0$, cela revient à supposer que $\sum t_n$ est ACV.
D'autre part, comme $t_n \to 0$, on a

$$t_n^2 = o(t_n)$$

(en effet $\lim \frac{t_n^2}{t_n} = \lim t_n = 0$) Le théorème de comparaison avec le o permet alors d'affirmer que $\sum t_n^2$ converge.
Contradiction.

Conclusion: $\boxed{\sum t_n \text{ diverge}}$

149 Notons pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$

1. On reconnait évidemment une série alternée qui vérifie le critère spécial, on a donc $\sum u_n$ convergente.
(Il est immédiat que la suite $(|u_n|) = (\frac{1}{3n+1})$ est une suite décroissante qui tend vers 0)

2. Soit $N \geqslant 0$ fixé.
On va reconnaitre à l'intérieur de l'intégrale la somme partielle d'une série géométrique.

$$\begin{aligned}
I - J_N &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} - \int_0^1 \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{N+1}}{1+t^3}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{N+1}}{1-(-t^3)}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} (-t^3)^k dt \qquad \textit{(somme partielle géométrique)} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_0^1 (-1)^k t^{3k} dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left[(-1)^k . \frac{t^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k . \frac{1}{3k+1} \\
&= S_N
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^3+1} &= \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1} \\
&= \frac{a(X^2-X+1)+(X+1)(bX+c)}{(X+1)(X^2-X+1)} \\
&= \frac{(a+b)X^2+(-a+b+c)X+a+c}{X^3+1}
\end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -a+b+c &= 0 \\ a+c &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/3 \\ b &= -1/3 \\ c &= 2/3 \end{cases}$$

4. – $\boxed{\text{Montrons que } I = \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{\sqrt{3}.\pi}{9}}$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{dt}{t^3+1} \\
&= \frac{1}{3}.\int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}dt \\
&= \frac{1}{3}.\int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}.\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}.\frac{1}{t^2-t+1}dt \\
&= \frac{1}{3}.\left[\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t^2-t+1|\right]_0^1 + \frac{1}{2}.\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}dt}_{=J} \\
&= \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{1}{2}.J
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{4}}.\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable affine (donc C^1) $\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})$

ce qui donne $d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}.\int_{-1\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{d\theta}{\theta^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.[\arctan\theta]_{-1\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6})\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Au final, on trouve que

$$I = \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{\sqrt{3}.\pi}{9}$$

– $\boxed{\text{Montrons que } \lim J_N = 0}$.

Nous allons procéder par encadrement

Soit $N \geqslant 0$.

Par l'inégalité triangulaire intégrale, on a

$$0 \leqslant |J_N| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t}\right| dt = \int_0^1 \frac{(t^3)^{N+1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t}dt$$

On a pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leqslant \frac{t^{3N+3}}{1+t} \leqslant t^{3N+3}$$

on a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t} \leqslant \int_0^1 t^{3N+3}dt = \left[\frac{t^{3N+4}}{3N+4}\right]_0^1 = \frac{1}{3N+4}$$

On a prouvé pour tout N

$$0 \leqslant |J_N| \leqslant \frac{1}{3N+4}$$

Comme $\lim \frac{1}{3N+4} = 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim |J_N| = 0$, càd $\lim J_N = 0$

– $\boxed{\text{Montrons que } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{\sqrt{3}.\pi}{9}}$

En Q2, on a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_N = I - J_N$$

Comme $\lim J_n = 0$, on en déduit que

$$\lim S_N = I$$

Conclusion: on a bien montré que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{3}.\ln 2 + \frac{\sqrt{3}.\pi}{9}}$

$\boxed{\textbf{151}}$ Soit $a > 0$

1. Soit $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$.

   On sait que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak} = \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k = \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)}$$

   donc

$$\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak} = \frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

   On a donc en valeur absolue

$$\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| = \frac{(t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

   et comme $1 + t^a \geqslant 1$, on a bien l'inégalité demandée

$$\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| \leqslant t^{a(n+1)}$$

2. Soit $n \geqslant 1$.

   – Notons S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{ak+1}$.

   On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}$

   – En utilisant l'**inégalité triangulaire intégrale** et la **croissance de l'intégrale**, on obtient

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right) dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| dt \leqslant \int_0^1 t^{a(n+1)}dt = \frac{1}{a(n+1)+1}$$

- Par linéarité de l'intégrale on sait que

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right)dt &= \int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_0^1 t^{ak}dt\\ &= \int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{ak+1}\\ &= \int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-S_n\end{aligned}$$

- Ainsi, on a

$$\forall n\geqslant 1,\ \left|\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-S_n\right|\leqslant\frac{1}{a(n+1)+1}$$

Comme $\lim\dfrac{1}{a(n+1)+1}=0$, on peut affirmer que $\lim S_n=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^a}$

On a bien prouvé que $\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{an+1}\text{ converge et que }\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{an+1}=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^a}}$

Soit $n\geqslant 0$ et $t\geqslant 0$.
Comme $-t^a\leqslant 0$ on a $-t^a\neq 1$, on peut appliquer la formule précédente ce qui donne

$$\sum_{k=0}^n(-t^a)^k=\frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)}$$

Soit encore

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}=\frac{1}{1+t^a}+\frac{(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

D'où

$$\left|\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right|=\left|\frac{-(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}\right|=\frac{t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

De plus, comme $t^a\geqslant 0$ on a $\dfrac{t^{a(n+1)}}{1+t^a}\leqslant t^{a(n+1)}$.
Au final, on a bien montré que

$$\left|\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right|=\left|\frac{-(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}\right|\leqslant t^{a(n+1)}\quad(*)$$

On sait que par théorème on a $\left|\int_I f\right|\leqslant\int_I|f|$ donc ici

$$\left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right)dt\right|\leqslant\int_0^1\left|\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right|dt$$

De plus par croissance de l'intégrale on a d'après $(*)$

$$\int_0^1\left|\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right|dt\leqslant\int_0^1 t^{a(n+1)}dt=\frac{t^{an+a+1}}{an+a+1}=\frac{1}{an+a+1}$$

On vient donc de justifier que

$$\left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right)dt\right|\leqslant\frac{1}{an+a+1}$$

or $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{ak}\right)dt=\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n\int_0^1(-1)^k t^{ak}dt=\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{ak+1}$

On a donc pour tout entier n

$$\left|\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}-\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{ak+1}\right|\leqslant\frac{1}{an+a+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{an+a+1}=0$ on en déduit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{ak+1}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}$$

on a bien prouvé que la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{an+1}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{an+1}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^a}$

Remarque: dans le cas $a=2$, on vient de prouver que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}}$