3 Suites numériques

ANA 51 (Exercice d'oral Maths II)
Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ les deux suites réelles définies par $a_n = \cos(2^n x)$ et $b_n = \cos(2^n y)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
On suppose que pour tout entier n, $a_n > b_n$

1. Donner a_{n+1} en fonction de a_n ainsi que b_{n+1} en fonction de b_n. Factoriser $a_{n+1} - b_{n+1}$, puis en déduire que pour tout entier n on a $a_n > |b_n|$
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) est convergente, et déterminer sa limite
4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$

AUTOUR DES PREMIÈRES DÉFINITIONS

ANA 52 (bornée à partir d'un certain rang...)
Soit une suite réelle (u_n) pour laquelle on sait que $\exists\, \varepsilon > 0, \forall n \geqslant 3, |u_n - 4| \leqslant \varepsilon$

i) Peut-on dire que la suite (u_n) est convergente?
ii) Peut-on dire que la suite (u_n) est bornée? Si oui, donner un majorant et un minorant.

ANA 53
Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall B \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \geqslant B$.

1. A-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier
2. Si l'on suppose de plus que (u_n) est croissante, a-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier

ANA 54
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers 4.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant 4.3$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $8 - \varepsilon \leqslant u_n + u_{n+1} \leqslant 8 + \varepsilon$
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $4 - \varepsilon \leqslant \frac{1}{1000}.\sum\limits_{k=n}^{n+999} u_k \leqslant 4 + \varepsilon$

ANA 55
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim u_n = l > 0$.
Montrer qu'il existe $k > 0$ et $n_0 \geqslant 0$ tels que $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant k$

SUITES EXTRAITES

ANA 56
Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites $((u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2}) convergente vers une même limite l

1. Rappeler la définition de la convergence de ces 3 suites à l'aide de ε.
   (On introduira des rangs notés N_0, N_1 et N_2)
2. $\varepsilon > 0$ étant un réel fixé.
   Justifier qu'il existe $N_4 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N_4, |u_k - l| \leqslant \varepsilon$
3. Que vient-on de justifier?

ANA 57 (Généralise un résultat de cours)

1. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}),(u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Nous allons montrer qu'alors (u_n) converge aussi. On note $l_1 = \lim u_{2n+1}, l_2 = \lim u_{2n}$ et $l_3 = \lim u_{3n}$
   (a) Rappeler les résultats de cours que vous connaissez relatifs aux suites extraites.
   (b) En considérant la suite (u_{6n}), montrer que $l_2 = l_3$
   (c) Montrer que $l_1 = l_3$
   (d) Conclure
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que (u_{2n}),(u_{2n+1}) et (u_{4n}) convergent?

ANA 58
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\forall n \geqslant 1, \forall p \geqslant 1, 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \dfrac{n+p}{np}$
Etudier la convergence de la suite (u_n)

ANA 59
Soit $u = (u_n)$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{\infty} u_{2n} = l \in \mathbb{R}$.

1. La suite (u_n) est-elle forcément convergente? Justifier.
2. On suppose de plus que (u_n) est croissante.
   Montrer que $\lim u_n = l$

SUITES DÉFINIES DE MANIÈRE EXPLICITE

ANA 60
Soient a et b deux réels. On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|}$

1. Le raisonnement suivant est-il correct? "Lorque n tend vers l'infini, on a $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|}$ qui tend vers l'infini. Or la fonction cos ne possède pas de limite en l'infini, donc la suite (u_n) ne possède pas de limite en l'infini!"
2. Justifier que $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|} = 2\pi n + \frac{a}{4\pi} + o(1)$ lorsque n tend vers l'infini
3. Qu'en conclure quant à la convergence de la suite (u_n)?

ANA 61
On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$.
On considère la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\dfrac{x\pi}{5}\right)$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction f
3. La fonction f est-elle bornée? monotone?
4. Justifier que la suite (u_n) ne converge pas

SUITES DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

ANA 62
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,dt$

1. (a) Calculer I_0 et I_1
   (b) Calculer pour tout entier n, $I_n + I_{n+2}$
   (c) En déduire l'expression de I_n en fonction de n
2. (a) Prouver que $\lim\limits_{\infty} I_n = 0$
   (b) En déduire que : $\ln 2 = \lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et $\dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$

ANA 63
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$

1. Montrer que (u_n) est monotone, convergente et déterminer la valeur de la limite
2. Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que $(n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n$
3. Déterminer un équivalent (simple) de u_n

ANA 64
On pose pour tout entier $n \geqslant 0, u_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^n}.dt$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite monotone
2. Etablir que pour tout t de [0,1], on a les inégalités $1 - t^n \leqslant \sqrt{1-t^n} \leqslant 1 - \dfrac{t^n}{2}$
3. En déduire que la suite $(n(u_n - 1))$ est bornée.

ANA 65
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2
2. (a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente
3. (a) Justifier que $\ln(2) - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}dt$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)

ANA 66
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $v_n = u_n - \ln 2$

1. Calculer pour tout $x \in [0,1]$ la quantité $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$
2. En intégrant f_n, montrer que $v_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$
4. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ et en déduire $\lim S_n$. Que vient-on de prouver?

ANA 67
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^t(1-t)^n dt$

1. Calculer U_1
2. Trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation entre U_n et U_{n-1}
3. En déduire que : $U_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
4. Démontrer que $0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ pour prouver que : $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$

ANA 68
Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q dt$

1. Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$
2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles

ANA 69
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $p \in \mathbb{N}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0
2. Déterminer un développement asymptotique de I_n à la précision $o(\frac{1}{n})$, puis à la précision $o(\frac{1}{n^2})$

ANA 70
On pose pour $n \geqslant 1, u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{x^n}dx$

1. Calculer u_1. Montrer que la suite u_n est convergente.
2. Montrer que $\forall y \in [0,1], 1 + y \leqslant e^y \leqslant 1 + (e-1)y$. En déduire $l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha.(u_n - l) = 0$?

ANA 71
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_{n,k}(x) = \dbinom{n}{k} x^k.(1(-x)^{n-k}$ et $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 f_{n,k}(t)dt$.
On note $m_{n,k}$ le maximum de $f_{n,k}$ sur [0,1]

1. Etudier les variations de $f_{n,k}$ sur [0,1]
2. Montrer que la courbe représentative de $f_{n,k}$ sur [0,1] admet un axe de symétrie lorsque $n = 2k$
3. Déterminer un équivalent de $m_{n,k}$ lorsque $n \to +\infty$
4. Déterminer une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$, et en déduire la valeur de $I_{n,k}$

SUITES DÉFINIES PAR UNE SOMME

ANA 72
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2$

ANA 73
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

ANA 74
On pose $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ pour tout $n \geqslant 1$

1. (a) Montrer que la suite (α_n) est minorée.
   (b) Etudier le sens de variation de cette suite et en déduire qu'elle converge. On notera γ sa limite.
2. Donner la limite et un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ avec $q \in \mathbb{R}^{*+}$ fixé.
   (indic. on pourra écrire que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$)

ANA 75
Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}-\ln n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)-\ln n$

ANA 76
Démontrer que la suite définie par $u_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\right)-\frac{1}{2}(\ln n)^2$ est convergente.

(On pourra introduire la fonction $f:x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ et vérifier qu'elle est décroissante sur $[3,+\infty[$.)

ANA 77
On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ en posant $u(t)=t+1-\frac{1}{\operatorname{ch} t}$

1. Justifier que $\forall t\in\mathbb{R},-1<\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}<1$
2. Etudier le signe de $u(t)$.
3. En déduire que pour $x>-1,\ln(1+x)\leqslant\operatorname{sh} x$
4. En déduire que pour $x<1,-\ln(1-x)\geqslant\operatorname{sh} x$
5. Justifier que pour tout $n\geqslant 2$ on a $\ln(2n+1)-\ln(n+1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right)\leqslant\ln 2$
6. En déduire la limite, quand $n\to\infty$, de $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

ANA 78

1. Vérifier que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x-\ln x=n$ possède, dans l'intervalle $]0,1]$, une et une seule solution, que l'on notera u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite de terme général u_n, puis justifier que $\lim u_n=0$
3. Donner un équivalent *simple* de u_n, quand n tend vers l'infini, ainsi que de $v_n=e^n u_n-1$.

ANA 79
Soit $f:x\in[1,+\infty[\mapsto\frac{x.\ln x}{1+x}$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n\geqslant 1$ tel que $f(a_n)=n$
2. Etudier les variations de (a_n), et montrer que (a_n) n'est pas bornée
3. Donner un équivalent de a_n puis de a_n-e^n

ANA 80
Soit $P_n(X)=X^n+X^{n-1}+\cdots+X-1$ pour $n\geqslant 1$

1. Montrer qu'il existe une unique racine, notée a_n, de P_n sur $]0,+\infty[$
2. En considérant par exemple $P_n(a_{n-1})$, montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Justifier que pour tout $n\geqslant 1$ on a $a_n^{n+1}-2a_n+1=0$ puis déterminer $\lim a_n$.

ANA 81
Soit $f:x\mapsto\frac{x^3}{9}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$.
On définit la suite (x_n) en fixant $x_0\in]0,1/2[$ et la relation $\forall n\in\mathbb{N},x_{n+1}=f(x_n)$

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1/2[$
2. En déduire la monotonie de la suite (x_n), sa convergence et sa limite
3. Montrer qu'il existe $k\in]0,1[$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},|x_n-\alpha|\leqslant\frac{k^n}{2}$

ANA 82
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$ on pose $f_n(x)=\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k^2}$ et $g_n(x)=\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{4}-k^2}$

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n\in]0,1[$ tel que $f_n(u_n)=0$
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{4}-k^2}=-\frac{4n}{2n+1}$
3. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$ en fonction de $x\in]0,1[$
4. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{n}$. En déduire la limite de u_n

SUITES RÉCURRENTES

ANA 83
Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0=0,u_1=1+4i \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}=(3-2i)u_{n+1}-(5-5i)u_n$$

ANA 84 (on devra trouver des expressions simples!)
Soit $\theta\in]0,\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0=u_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},u_{n+2}-2\cos\theta.u_{n+1}+u_n=0$$

ANA 85
On considère la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=-u_n^2+u_n$

1. Justifier que la suite (u_n) possède une limite. Préciser ensuite quelles sont les limites possibles.
2. Dans le cas où $u_0\leqslant 0$ donner $\lim u_n$
3. Donner le tableau de variation de la fonction $x\mapsto -x^2+x$
4. Donner alors $\lim u_n$ lorsque $u_0>0$

ANA 86
On souhaite déterminer les suites à valeurs complexes qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},2u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n+(-1)^n \quad (1)$$

1. Déterminer une suite (x_n) qui vérifie la condition (1).
(on pourra chercher x_n sous la forme $\lambda.(-1)^n$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$)
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n\geqslant 0,v_n=u_n-x_n$.
Montrer l'équivalence entre les propositions
   i) (u_n) vérifie la condition (1)
   ii) (v_n) vérifie la condition (2) $\forall n\geqslant 2v_{n+2}-3v_{n+1}+v_n=0$
3. En déduire toutes les suites qui vérifient la condition (1)

ANA 87
On définit la suite (u_n) par $u_0\in[0,1]$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},u_n\in[0,1]$
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha+1}=\alpha$ et que $\alpha\in[0,1]$
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{e}{4}.|u_n-\alpha|$
4. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{e}{4}\right)^n$, puis que la suite (u_n) converge vers α
5. Trouver un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

ANA 88
On considère l'équation $(E) : x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$

1. prouver que (E) a exactement une solution réelle α. Etablir de plus que $\alpha \in [-\frac{1}{3},0] = I$
   Pour déterminer une valeur approchée de α on considère la suite définie par $u_0 = -\frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 1}{u_n^2 + 3}$
2. vérifier que si la suite converge ce ne peut être que vers α
3. on pose $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$
   (a) prouver que $f(I)$ est inclus dans I. Qu'en déduit-on quant aux termes de la suite (u_n)?
   (b) démontrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant \dfrac{8}{27}$
   (c) prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^n |u_0 - \alpha|$
   (d) en déduire que la suite (u_n) converge vers α. Puis déterminer un entier n à partir duquel on est sûr que u_n approche α à 10^{-9} près.
   (e) existe-t-il un réel β pour lequel la série $\sum(u_n - \beta)$ converge? Justifier.

ANA 89
On s'intéresse à la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$.
On note $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$
On s'intéresse à la suite (u_n) de deux manières différentes.

Justifier tout d'abord que $\sqrt{1 + \Phi} = \Phi$

1. Premièrement
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, 1 \leqslant u_n \leqslant \Phi$
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
   (c) Justifier que (u_n) est une suite convergente, et donner sa limite.
2. Secondement.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, |u_{n+1} - f(\phi)| \leqslant \dfrac{1}{2}.|u_n - \phi|$
   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1, |u_n - \Phi| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   (c) En déduire une méthode pour déterminer une valeur approchée de Φ à 10^{-4} près

ANA 90
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{1}{1 + u_{n-1}}$
On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x}$ et $g = f \circ f$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, u_n \in [\frac{1}{2},1] = I$
2. Quel est le sens de variation de f sur I?
3. Calculer u_0, u_1 et u_2
4. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés
5. Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Conclure

ANA 91
On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ possède une unique solution α, et que $\alpha \in [0,1]$
2. Montrer que $\forall (a,b) \in [0,1]^2, |\cos a - \cos b| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}.|a - b|$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$ et que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n
4. Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-k} près?

ANA 92 (une suite complexe)
Soit $a \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$.
On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + \dfrac{1}{z_n}\right)$

1. On pose $f : z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$
   (a) Montrer que $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$
   (b) En déduire que la suite (z_n) est bien définie.
2. On suppose de plus $a \neq -1$. On pose alors pour tout n, $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$.
   Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. (a) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $Re(a) > 0$
   (b) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $Re(a) < 0$
   (c) Justifier que le cas $Re(a) = 0$ n'est pas à envisager

ANA 93
On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3.4^n + 5$.
Montrer qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique en donnant la relation de récurrence suivie.

SUITES ADJACENTES

ANA 94
Dans chacun des 2 cas, montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k + n}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$
2. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

ANA 95 (preuve de l'irrationnalité de e)
On considère les suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Montrer que cette limite n'est pas rationnel (on raisonnera par l'absurde)

Quelques corrigés

51 1. Nous allons utiliser la formule de trigonométrie $\cos(2X) = 2\cos^2(X) - 1$.

On a donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0, a_{n+1} = 2a_n^2 - 1 \text{ et } b_{n+1} = 2b_n^2 - 1}$

Pour $n \geqslant 0$, on a

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n^2 - 2b_n^2 = 2(a_n - b_n)(a_n + b_n)$$

Comme on a supposé que pour tout entier n on a $a_n > b_n$, on peut écrire

$$a_n + b_n = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n}$$

et ainsi remarqué que $a_n + b_n > 0$ car quotient de deux nombres strictement positifs.

On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, a_n > -b_n$, comme on sait aussi que $\forall n \geqslant 0, a_n > b_n$, on peut bien en déduire que $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n > |b_n|}$

2. Pour $n \geqslant 0$ fixé, on a

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n^2 - a_n - 1 = (a_n - 1)(2a_n + 1)$$

Or on sait que $a_n > 0$ (car $a_n > |b_n|$) et $a_n \geqslant 1$ (car $a_n = \cos(\dots)$),
on en déduit ainsi que $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.
On vient de montrer que $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante.}}$

3. Comme la suite (a_n) est une suite positive, elle est minorée par zéro.
La suite (a_n) est minorée et décroissante: on en déduit qu'elle est convergente.
Notons L sa limite.

On sait que $\forall n \geqslant 0, a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$.
Par passage à la limite cela donne $L = 2L^2 - 1$, c'est à dire $2L^2 - L - 1 = 0$.
Or les solutions de cette équation sont 1 et $\dfrac{-1}{2}$.
Comme $L \geqslant 0$ (car limite d'une suite positive), on en déduit que nécessairement $L = 1$.

$\boxed{\text{Conclusion } \lim a_n = 1}$

4. La suite (a_n) est une suite décroissante qui converge vers 1, on a donc $\forall n \geqslant 0, a_n \geqslant 1$.
Mais on sait aussi que par définition $1 \geqslant a_n$.
On a ainsi $\forall n \geqslant 0, 1 \geqslant a_n \geqslant 1$, càd $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n = 1}$
C'est en particulier le cas pour a_0, or $a_0 = \cos(x)$

Comme $\cos(x) = 1$, on peut affirmer qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$!

58 – On va s'intéresser aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

– Par hypothèse, on a dans le cas particulier où $p = n$

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant u_{2n} \leqslant \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Comme $\lim \dfrac{2}{n} = 0$, on a avec les gendarmes $\boxed{\lim u_{2n} = 0}$

– Par hypothèse, on a dans le cas particulier où $p = n + 1$

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Comme $\lim \dfrac{2n+1}{n(n+1)} = 0$, on a avec les gendarmes $\boxed{\lim u_{2n+1} = 0}$

– Comme les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, on peut affirmer par théorème que $\boxed{(u_n) \text{ converge aussi vers } 0}$

60 2. On trouvera $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|} = 2\pi n + \frac{a}{4\pi} + o(1)$.

62

– *La fonction* $\tan$ *est continue sur le segment* $[0,\pi/4]$ *à valeurs dans* $[0,1]$*,*
donc pour tout entier naturel n*, la fonction* $t \mapsto (\tan(t))^n$ *est continue sur le segment* $[0,\pi/4]$ *aussi.*

– *On vient de vérifier que les intégrales* I_n *existaient bien pour tout* $n \in \mathbb{N}$

1. (a) $\boxed{I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 dt = \frac{\pi}{4}}$ et $\boxed{I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt = [-\ln|\cos(t)|]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) = \frac{\ln 2}{2}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par linéarité de l'intégrale, on a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) + \tan^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t)) \tan^n(t) dt$$

En effectuant le changement de variable $u = \tan(t)$, on a $du = (1 + \tan^2(t))dt$, et donc

$$\boxed{I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}}$$

(c) Pour déterminer I_n on va distinguer les cas n pair et n impair comme sur les exemples suivants:

* $I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{1} - I_0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1} + I_0$
* $I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - I_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + I_1$
* $I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1} - I_0$

Au final on peut montrer rigoureusement par récurrence que

i. $I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \frac{1}{2p-5} + \dots + (-1)^p \frac{1}{3} + (-1)^{p-1}(1 - \frac{\pi}{4}) = (-1)^p \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{p-k}}{2k-1}$

ii. $I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \frac{1}{2p-4} + \dots + (-1)^{p-1}(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = (-1)^p \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{p-k}}{2k}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

– Le changement de variable $x = \tan t$ donne $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2} dx$

– Pour tout $x \in [0,1]$ on a $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$, ce qui, par croissance de l'intégrale, permet de dire que $\int_0^1 0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$.

– On a ainsi pour tout $n, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Le théorème de convergence par encadrement nous permet d'affirmer que $\boxed{\lim I_n = 0}$

(b) – Comme la suite (I_n) tend vers 0, on peut affirmer que ses suites extraites (I_{2p}) et (I_{2p+1}) convergent elles aussi vers 0

– A la question 1)c)i), on a montré que $(-1)^p I_{2p} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k-1}$
La suite $((-1)^p I_{2p})$ tend vers 0 (produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0), on peut donc affirmer que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{-\pi}{4}$, soit de manière équivalente que
$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$
– avec un raisonnement similaire on prouve l'autre égalité.

63 1. – Soit $n \in \mathbb{N}$.
Nous allons utiliser la **croissance de l'intégrale**.
Comme

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2 < 1 \qquad (*)$$

On a

$$\forall t \in [0,1], (\ln(1+t))^{n+1} \leqslant (\ln(1+t))^n$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$

càd

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

Conclusion $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$
– Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme la fonction $x \mapsto x^n$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a d'après (*)

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant (\ln(1+t))^n \leqslant (\ln 2)^n$$

ce qui donne par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0.dt \leqslant \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln 2)^n dt$$

càd

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$

Comme $\ln 2 \simeq 0{,}67$ on a $\lim(\ln 2)^n = 0$.
Le **théorème des gendarmes** permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = 0}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$
– On réalise une intégration par parties sur u_{n+1}
On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(1+t))^{n+1} \\ v(t) &= t+1 \qquad \textit{(petite astuce!)} \end{cases}$ qui sont bien C^1 sur $[0,1]$.
Cela donne

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= [(t+1).(\ln(1+t))^n]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (t+1)\frac{1}{1+t}(\ln(1+t))^n dt \\ &= 2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \end{aligned}$$

– Nous allons prouver l'encadrement demandé.

– Comme la suite (u_n) est décroissante, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ ce qui donne

$$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \leqslant u_n$$

et déjà

$$2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n$$

– On a vu en Q1 que la suite (u_n) était positive, on a donc

$$u_{n+1} \geqslant 0$$

càd

$$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \geqslant 0$$

ce qui donne

$$(n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1}$$

– Au final, on a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n}$

3. – On a $(n+1).u_n \sim n.u_n$ et $(n+2).u_n \sim n.u_n$
ce qui permet d'écrire avec l'encadrement de $Q2$

$$n.u_n \sim 2(\ln 2)^{n+1}$$

et ainsi

$$u_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$$

4. Cette question est plus délicate car on est obligé de décomposer l'intervalle d'intégration par la relation de Chasles
– Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \underbrace{\int_1^2 (\ln(1+t))^n dt}_{=x_n} + \underbrace{\int_2^3 (\ln(1+t))^n dt}_{=y_n}$$

– La fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est positive sur $[1,2]$, on a donc par positivité de l'intégrale

$$x_n = \int_1^2 (\ln(1+t))^n dt \geqslant 0$$

ce qui prouve que

$$v_n \geqslant y_n$$

Il suffit donc maintenant de montrer que $\lim y_n = +\infty$ pour conclure
– On reprend la même idée de croissance de l'intégrale (de manière plus rapide)
Comme

$$\forall t \in [2,3], (\ln(1+t))^n \geqslant (\ln 3)^n$$

On a

$$y_n = \int_2^3 (\ln(1+t))^n dt \geqslant \int_2^3 (\ln 3)^n dt = (\ln 3)^n$$

– On vient de montrer que

$$\forall n \geqslant 0, v_n \geqslant (\ln 3)^n$$

Comme $\ln 3 > \ln e = 1$, on a $\lim(\ln 3)^n = +\infty$,
ce qui permet d'affirmer que

$$\lim v_n = +\infty$$

67 1. Une ipp donne $U_1 = e - 2$

2. Une ipp donne $\forall n \geqslant 2, U_n = -\dfrac{1}{n!} + U_{n-1}$
3. Par récurrence
4. Vraiment classique!

72 On pourra commencer par montrer que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\binom{n}{k}} = 0$

82 1. On va bien sûr utiliser le théorème de la bijection

– La fonction f_n est C^∞ sur l'intervalle $]0,1[$ comme somme de fonctions c^∞, avec

$$\forall x \in]0,1[, f_n'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k^2)^2} < 0$$

– Ainsi la fonction f_n est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]0,1[$, f_n réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]\lim_{x\to 1^-} f_n(x), \lim_{x\to 0^+} f_n(x)[=]-\infty,+\infty[$

Ceci permet d'affirmer que $\exists!\, u_n \in]0,1[, f_n(u_n) = 0$

x	0		u_n		1
$f_n'(x)$	‖		-		‖
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

– *Quelques précisions qui aident à la compréhension:*

  – $f_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x-k^2} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x-1^2} + \dfrac{1}{x-2^2} + \dfrac{1}{x-3^2} + \dots + + \dfrac{1}{x-n^2}$

  – *Sous cette forme étendue il est clair qye $f_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,1[$. (L'ensemble de définition complet serait $\mathbb{R} - \{0,1^2,2^2,\dots,n^2\}$)*

  – *Sous cette forme, l'obtention des limites en 0^+ et en 1^- est claire aussi*

2. i) On peut par exemple reconnaître un procédé télescopique.

   – La décomposition en éléments simples donnent

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - X^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2} - X)(\frac{1}{2} + X)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - X} + \frac{1}{\frac{1}{2} + X} = \frac{1}{X + \frac{1}{2}} - \frac{1}{X - \frac{1}{2}}$$

et ainsi, avec $n \geqslant 1$ fixé

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - \frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - \frac{1}{2}}$$

Dans la seconde somme, on fait le glissement d'indice $k \longleftarrow k-1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1) - \frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{-4n}{2n+1}
\end{aligned}$$

ii) On peut par exemple procédé par récurrence

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$: " $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\dfrac{4n}{2n+1}$ "

– **initialisation:**
On a $\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4} - 1} = -\dfrac{4}{3} = -\dfrac{4.1}{2.1+1}$
ce qui prouve que $\mathcal{P}_1$ est vraie

– **hérédité:**
On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} + \frac{1}{\frac{1}{4} - (n+1)^2} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{1 - (2n+2)^2} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{(1 - (2n+2))(1 + (2n+2))} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} 6 \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4\frac{n+1}{2n+3} = -4\frac{n+1}{2(n+1)+1}
\end{aligned}$$

et l'on prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

– **conclusion:**
Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\dfrac{4n}{2n+1}$

3. Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f_n(x)-g_n(x) &= \left(\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k^2}\right)-\left(\frac{1}{2x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac14-k^2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x-k^2}-\frac{1}{\frac14-k^2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac14-x}{(x-k^2)(\frac14-k^2)}\\ &= \left(\frac14-x\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-k^2)(\frac14-k^2)} \end{aligned}$$

Or

$$\forall k\in [\![1,n]\!], x-k^2<0 \text{ et } \frac14-k^2<0$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-k^2)(\frac14-k^2)}>0$$

Conclusion : $\boxed{sg(f_n(x)-g_n(x)=sg(\frac14-x)}$

4. – Comme f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$,
pour montrer que $\frac14\leqslant u_n\leqslant\frac14+\frac1n$ **il suffit de montrer que** $f_n(\frac14)\geqslant f_n(u_n)\geqslant f_n(\frac14+\frac1n)$
càd prouver que $f_n(\frac14)>0$ **et** $f_n(\frac14+\frac1n)<0$

x	$\frac14$	u_n	$\frac14+\frac1n$
$f_n(x)$	$f_n(\frac14)$	0	$f_n(\frac14+\frac1n)$

– Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$f_n(\frac14)=2-\frac{4n}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}>0$$

– Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Comme $\frac14+\frac1n>\frac14$, on sait d'après Q3. que

$$f_n(\frac14+\frac1n)\leqslant g_n(\frac14+\frac1n)$$

Or

$$g_n(\frac14+\frac1n)=\frac{1}{2.\left(\frac14+\frac1n\right)}-\frac{4n}{2n+1}=\frac{-14n}{(n+4)(2n+1)}$$

et il est clair que pour $n\geqslant 1$, on a $\frac{-14n}{(n+4)(2n+1)}<0$

On a donc bien $f_n(\frac14+\frac1n)<0$

– Conlusion: $\boxed{\forall n\geqslant 1, \frac14\leqslant u_n\leqslant\frac14+\frac1n}$

– Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de prouver que $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac14$

84 On trouve $\forall n\geqslant 0, u_n=\dfrac{\cos(\frac{(2n-1)\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$

92 1. (a) On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(z)\in i\mathbb{R} &\iff f(z)=\overline{f(z)}\\ &\iff z+1/z=-(\overline{z}+1/\overline{z})\\ &\iff \overline{z}.z^2+z.\overline{z}^2+z+\overline{z}=0\\ &\iff (z+\overline{z})(\underbrace{1+z\overline{z}}_{\neq 0 \text{ car } z\overline{z}=|z|^2\geqslant 0})=0\\ &\iff z+\overline{z}=0\\ &\iff z\in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) On a donc également l'équivalence

$$z\notin i\mathbb{R}=\mathbb{C}-i.\mathbb{R}\iff f(z)\notin i\mathbb{R}=\mathbb{C}-i.\mathbb{R}$$

Comme $z_0\in\mathbb{C}-i.\mathbb{R}$, on a $z_0\neq 0$ et donc z_1 est bien défini.
De plus, on sait que $z_1\in\mathbb{C}-i\mathbb{R}$.
...
Une récurrence immédiate nous assure que tous les termes de la suite (z_n) sont bien définis.

2. Le calcul donne $u_{n+1}=u_n^2$.

Par une récurrence immédiate cela donne $\forall n\geqslant 0, u_n=u_0^{2^n}=\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2^n}$

3. On commence par exprimer z_n en fonction de u_n, et l'on trouve $z_n=\frac{1+u_n}{1-u_n}$

(a) cas $Re(a)>0$.
En faisant une interprétation géométrique dans le plan complexe, on constate que cela signifie que le point d'affixe a est plus proche du point d'affixe 1 que de celui d'affixe -1.
On a donc $|a-1|<|a+1|$ càd $\left|\frac{a-1}{a+1}\right|<1$
Ainsi $\lim u_n=0$ et donc $\lim z_n=1$

(b) cas $Re(a)<0$.
La même interprétation donne $\left|\frac{a-1}{a+1}\right|>1$.
On a donc $\lim\frac{1}{u_n}=0$.
Comme $z_n=\frac{1+u_n}{1-u_n}=\frac{1/u_n+1}{1/u_n-1}$, cela donne $\lim z_n=-1$.
rem: on est passé par $1/u_n$ car (u_n) étant une suite complexe, on ne peut écrire $\lim u_n=+\infty$

(c) cas $Re(a)=0$.
C'est le cas exclu car a N'est PAS un imaginaire pur par hypothèse!

93 $u_{n+1}=-3.4^{n+1}+5=4.(-3.4^n+5)-15=4.u_n-15$