1 Fonctions: continuité, dérivabilité,...

ANA 1 (Epreuve C 2024 Banque PT (préambule))

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \tan x$$
2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0,\pi[\setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \dfrac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0,\pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0,\pi[$.
   (b) En déduire une primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$$
3. On considère les fonctions
$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
   (a) Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2.
   (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.
   (c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2.
   (d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$.
   (e) Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2,
$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$
   et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.
   (f) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_2. On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
   Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
   (g) Tracer, sur un même graphe (échelle: 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi,2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi,2\pi]$.
4. On considère la fonction
$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$$
   (a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3. Quel est le domaine de dérivabilité de f_3?
   (b) Etudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

ANA 2 (équivalent et ln)

1. A-t-on $1+x \underset{0}{\sim} 1+x^2$? A-t-on $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln(1+x^2)$
2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point a.
   On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que $\begin{cases} g \text{ est strictement positive} \\ g \text{ admet une limite } l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \text{ autre que } 1 \end{cases}$
   (a) f est-elle strictement positive?
   (b) Montrer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

ANA 3 (classique)

1. Justifier que $\arcsin(y) - \dfrac{\pi}{6} \underset{1/2}{\sim} \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$
2. Justifier que $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin y \underset{y \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}$ (Astuce!)

ANA 4

Déterminer les équivalents suivants

1. a) $x.\ln(e^x+1)$ en $-\infty$ b) $x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$ c) $\dfrac{\ln(x^2+x+1).\arctan x}{\ln(x+1)}$ en 0 et en $+\infty$
2. a) $\dfrac{(1-\cos x).\tan x}{x.\sin^2(3x)}$ en 0 b) $x^\alpha - 1$ en 1 c) $\dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\dfrac{\pi}{4}$

ANA 5

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}e^{1/x}$

1. Montrer que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \to +\infty$
2. Etudier la position de l'asymptote par rapport à la courbe. $\mathcal{C}_f$

ANA 6 (bien comprendre les croissances comparées)

Ordonner les fonctions suivantes de la plus négligeable à la plus prépondérante quand $x \to +\infty$

$$\frac{\ln x}{x^2} \quad \frac{1}{x.\ln x} \quad \frac{1}{x.\sqrt{x}} \quad \frac{(\ln x)^2}{x^3} \quad \frac{1}{x^2} \quad e^{-x^2} \quad e^{-\sqrt{x}} \quad e^{-x} \quad e^{-2x}$$

On utilisera la notation $a \ll b$ lorque $a = o_{+\infty}(b)$

ANA 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui possède $n+1$ racinces disctinctes.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

ANA 8 (continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.
Montrer que f possède un unique point fixe, càd qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$

ANA 9 (continuité)

Soit f une fonction définie et cntinue sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)+1$.
On définit la foncton $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$

1. Montrer que g est une fonction périodique et justifier qu'elle soit bornée sur $\mathbb{R}$
2. En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ainsi qu'un équivalent de f en $+\infty$

ANA 10 (inégalités diverses)

1. Montrer que $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[, |\tan x| \geqslant |x|$
2. Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$
3. Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1, \forall x \geqslant 0, (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha.x$

ANA 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}.\sin(kx)}{k^2+n^2}$

1. Expliciter $f_2(x)$ puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f_2(x)| \leqslant \dfrac{13}{40}$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$

ANA 12

Etudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 2}$ sur son ensemble de définition

ANA 13 (bonne utilisation du théorème de la limite de la dérivée)

On pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $[-1, +1]$
2. Etudier la dérivabilité de f sur $[-1,+1]$ en distinguant éventuellement des cas, et donner sa dérivée.
3. En déduire un expression simple de $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$

FONCTIONS RÉCIPROQUES.

ANA 14 (fonction réciproque)

Soit $f : x \mapsto x.e^{x^2}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera
2. Montrer que f^{-1} admet un DL à l'ordre 4 en 0
3. Déterminer ce DL

ANA 15 (fonction réciproque)

Soit $f : x \mapsto x + x^2 - x^3$

1. Déterminer deux intervalles I et J contenant 0 tels que f réalise une bijection de I sur J
2. On note g la fonction réciproque de la restriction de f à I. Montrer que g admet un DL à l'ordre 4 en 0 et le calculer

ANA 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Réduire le domaine d'étude
3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative
4. Montrer que f réalise une bijection de $I = [0,\pi/4]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la fonction réciproque .
5. Donner les variations de g et représenter sa courbe représentative sur le graphique précédent
6. Justifier que $\forall x \in J, \begin{cases} \cos(g(x)) = \dfrac{1}{x} \\ \sin(g(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$
7. Montrer que g est dérivable sur $J - \{1\}$ et qu'alors $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ANA 17 (fonction tangente hyperbolique)

On considère la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$

1. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser
2. Dresser le tableau de variation de la fonction réciproque de th, que l'on nomme argth. Justifier que argth est de classe C^∞ et préciser sa dérivée.
3. Justifier que $\forall x \in J, \mathrm{argth}(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$ et en déduire alors une expression simple de argth à l'aide des fonctions usuelles

ÉTUDE DE PROLONGEMENTS.

ANA 18 (prolongement C^1)

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccl} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2\pi x}{4\pi \sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

ANA 19 (prolongement)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n.\sin(\dfrac{1}{x})$ lorsque $x \neq 0$

1. La fonction f_n peut-elle toujours être prolongeable par continuité en 0. Lorsque c'est la cas, on note encore f_n son prolongement
2. Montrer que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f_2' n'est pas continue en 0
3. Montrer que f_3 est C^1 sur $\mathbb{R}$ mais que f_3' n'est pas dérivable en 0

ANA 20 (prolongement et C^∞)

Soit f la fonction définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1, +1[$

ANA 21 (prolongement et C^2)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

1. Déterminer la limite l de f en 0, puis un équivalent de $f(x) - l$ lorsque $x \to 0$
2. On pose $f(0) = l$. Etudier si ce prolongement est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? Dérivable? C^1?

ANA 22

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x.e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

1. La fonction f est-elle C^∞ sur son ensemble de définition?
2. La fonction f a-t-elle une parité particulière?
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable?

ANA 23

Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2.\ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?

DÉRIVÉES n−IÈME

ANA 24

Soit $f :]-\pi/2,+\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$

1. Calculer f' et f''
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in]-\pi/2,+\pi/2[, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$
   Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'
3. Trouver le monôme de plus haut degré de P_n

ANA 25 (dérivée n−ième)

1. Déterminer la dérivée n−ième de $x \mapsto e^x.\cos x$
2. (a) Donner la dérivée n−ième de $x \mapsto e^{ix}$
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}$
   (c) Déterminer la dérivée n−ième de $x \mapsto \sin^2 x.\cos x$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$
   Déterminer la dérivée n−ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$
   Déterminer la dérivée n−ième de $x \mapsto e^{x.\operatorname{ch} a}.\operatorname{ch}(x.\operatorname{sh} a)$

ANA 26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^{n-1}.e^{1/x}$.
Montrer que f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n)}(x) = (-1)^n.x^{-n-1}.e^{1/x}$ pour tout $x \neq 0$

2 Intégrales I.

ANA 27

Indiquer parmi les intégrales suivantes celles qui font parties du chapitre Intégration I

$$A = \int_0^1 \ln(t)dt \qquad B = \int_1^3 \frac{t-1}{t+2}dt \qquad C = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2-4} \qquad D = \int_0^\infty e^{-t}dt$$

ANA 28

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Justifier que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis donner leurs dérivées.

$$G : x \mapsto \int_3^{x^2} f(t)dt \qquad H : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} f(t)dt \qquad J : x \mapsto \int_0^x e^{3x}.f(t)dt$$

ANA 29

Soit f une fonction continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

1. Existe-t-il une primitive F de f sur [0,1] telle que $F(1/2) = 2030$? Est-elle unique?
2. Existe-t-il une primitive G de f sur [0,1] telle que $\lim\limits_{x\to 1^-} G(x) = +\infty$?
3. Existe-t-il une primitive H de f sur [0,1] telle que $\int_0^1 H(t)dt = \pi$? Est-elle unique?

ANA 30

Montrer que si f est continue sur [0,1] alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$

ANA 31 (lemme de Lebesgue - très classique)

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE:

ANA 32

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Ensemble de définition de f?
2. Réduction de l'intervalle d'étude?
3. Etudier les variations de f ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition
4. Dessiner l'allure du graphe de f

ANA 33

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et déterminer le signe de g'
2. La fonction g est-elle paire ou impaire? Que vaut $g'(0)$?
3. Pour $x > 0$ donner un encadrement de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{t} - g(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln 3$
4. Donner l'allure de la courbe représentative de g.
5. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une expression de $g(x)$ en fonction de h sans le signe $\int$

ANA 34

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \arctan(t^2)dt$

1. Montrer que g est une fonction impaire
2. Montrer que g est strictement positive sur $]0,+\infty[$
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer g' et montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $2x\arctan(x^2) \leqslant g(x) \leqslant 2x\arctan(9x^2)$
   puis en déduire que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \pi.x$
5. Montrer que $\forall x > 0, \pi.x - g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \arctan(\frac{1}{t^2})dt$
   En déduire que cette différence tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et que la courbe représentative de g admet une droite asymptote
6. Donner l'allure de la courbe représentative de g

ANA 35

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner $g'(x)$ ainsi que son signe
3. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et dresser le tableau de variation de g
4. Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

ANA 36
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de f.
   (On pourra considérer $0<x_1<x_2$ puis comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$)
3. (a) Montrer que $\forall x>0$, $\ln\dfrac{x+1}{x}\leqslant f(x)\leqslant e.\ln\dfrac{x+1}{x}$
   (b) En déduire les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition
4. (a) Justifier avec soin que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt=o(\frac{1}{x})$ lorsque $x\to+\infty$
   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e-1}{x}$
5. En utilisant le changement de variable $\theta=t+x$, justifier que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$

ANA 37
On note $H:x\in]0,+\infty[\to\displaystyle\int_0^x \ln^2(1+x.t).dt$.

En introduisant la fonction $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^x \ln^2(1+t)dt$, montrer que H est C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner sa dérivée

ANA 38
On souhaite étudier la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{e^{-1/t}}{t}dt$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{*+}$
2. Montrer que f est C^1 sur cet ensemble et donner sa dérivée. Dessiner le TV de f.
   (Dans le tableau, on pourra noter $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{\ln(16e)}}{\ln 4}$)
3. Justifier que $\lim\limits_{0^+}f=0$ et $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$

ANA 39
On souhaite étudier la fonction définie en posant $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t-\ln t}$

1. Etudier la fonction $h:t\mapsto\dfrac{1}{t-\ln t}$
2. Montrer que la fonction f est C^1 sur $]0,+\infty[$, et donner sa dérivée. Dessiner le TV de f
3. Montrer que $\forall x>0, 0\leqslant f(x)\leqslant x$.
   En déduire $\lim\limits_{0^+}f$
4. En encadrant, pour $x\geqslant 1$, la quantité $f(x)-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$, montrer que $\lim\limits_{+\infty}f=\ln 2$

ANA 40
Justifier que $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\arctan(t)dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

FORMULES DE TAYLOR:

ANA 41
Soit $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et g définie que $[a,b]$ par $g(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.f(t)dt$
Montrer que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et que $g^{(n)}=f$

ANA 42
A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\forall x\in[0,\pi/2], 1-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

CHANGEMENT DE VARIABLE

ANA 43
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que: $\forall t\in[a,b], f(a+b-t)=f(t)$

1. Donner l'interprétation géométrique de cette condition
2. Montrer que: $\forall t\in[a,b]$, $\int_a^b tf(t)dt=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$
3. En déduite $\displaystyle\int_0^\pi t.\sin^3(t).dt$

ANA 44
Soit $\alpha\in]0,\frac{\pi}{4}]$ fixé.
Calculer $\int_\alpha^{\pi/2-\alpha}\sin(t).\cos(t).\ln(\tan t)dt$ en posant $x=\dfrac{\pi}{2}-t$
Proposer un autre moyen de justifier ce résultat et le mettre en oeuvre

ANA 45
A l'aide du changement de variable $t=\dfrac{\pi}{4}-x$, calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)$

ANA 46
Déterminer une primitive de $f:x\mapsto\dfrac{1}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $]-\pi,+\pi[$ (on pourra poser $t=\tan\dfrac{x}{2}$)

ANA 47
Déterminer une primitive de $f:x\mapsto\dfrac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}$ en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser $x=2t+2$)

SOMMES DE RIEMANN

ANA 48
Calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\qquad b_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{n\alpha+k}(\alpha>0\text{ fixé})\qquad c_n=\sum_{k=1}^n\frac{n}{k^2+2kn+n^2}$$

$$d_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k+n}}\qquad e_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k.\exp(-\frac{k}{n})\qquad f_n=\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}\qquad g_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt[n]{2^k}$$

$$h_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}\qquad i_n=\left(\frac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{1/n}\qquad j_n=\sqrt[n]{\frac{n(n+1)\dots(n+n)}{n^n}}$$

ANA 49
Soit $\alpha>0$. Déterminer un équivalent de $S_n=\sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$ en introduisant une somme de Riemann

ANA 50
Soit $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|\neq 1$.
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln|x-e^{it}|dt$

ANA 51

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant une somme de Riemann, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt = \ln 2$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} \right) dt$. Etonnant?

ANA 52 (démonstration de la méthode des rectangles)

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.

On note pour tout $k \in [\![0,n]\!], x_k = a + k.\dfrac{b-a}{n}$

1. Justifier que $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ existe
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx$
3. En déduire que $\left| \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \leqslant \dfrac{M.(b-a)^2}{2n}$
4. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + O(\frac{1}{n})$

ANA 53

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).\frac{k\pi}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0, |\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^3}{6}$
2. Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite
3. Montrer que $\lim |u_n - v_n| = 0$. En déduire $\lim v_n$

Quelques corrigés

3 1. Le théorème de Taylor-Young donne le résultat

2. Ici, on ne peut utiliser le même théorème car arcsin n'est pas dérivable en 1!
   Notons $x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin y$.
   - lorsque $y \to 1$, on a $x \to 0$
   - $\cos(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin y) = \sin(\arcsin y) = y$
   - Comme $x \to 0$, on peut utiliser le DL en 0 de référence

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

càd

$$2(1-\cos x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$$

Comme $x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin y \geqslant 0$ car $\arcsin(y) \in [-\pi/2,\pi/2]$, on a donc

$$\sqrt{2(1-\cos x)} \sim x$$

- En remplaçant $\cos x$ par y cela donne bien

$$x \sim \sqrt{2(1-y)}$$

5 On devra trouver $f(x) = x + 2 + \dfrac{7/2}{x} + o(\dfrac{1}{x})$

8 – Comme f est une fonction (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}$, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que
  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ existe avec $l_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ existe avec $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Notons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$
  - On en déduit que forcément $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
  - La fonction g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$(car différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
    Compte tenu des limites précédentes, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
  - Ceci prouve que $0 \in g(\mathbb{R})$ et ainsi qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}, g(x_0) = 0$
    A ce stade, nous N'avons PAS utilisé la STRICTE décroissance
  - Prouvons maintenant que g s'annule en une seule valeur, en tenant un raisonnement par l'absurde.
    On suppose qu'il existe $x_0 < x_1$ tels que $g(x_0) = 0$ et $g(x_1) = 0$.
    Ceci signifie que $f(x_0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$,
    et ainsi on a $f(x_0) = x_0 < x_1 = f(x_1)$.
    Cependant comme f est strictement décroissante et que $x_0 < x_1$, on a forcément $f(x_0 > f(x_1)$! **contradiction!**
- Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x_0) = x_0}$

9 1. – Vérifions que g est périodique, de période 1.
Pour tout x réel

$$\begin{aligned} g(x+1) &= f(x+1) - (x+1) && (1)\\ &= (f(x)+1) - x - 1 && (2)\\ &= f(x) - x = g(x) && (3) \end{aligned}$$

- Comme la fonction g est $1-$périodique, on a $g(\mathbb{R}) = g([0,1])$. **(remarque très importante!)**
- Comme la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que g est bornée sur $[0,1]$
  Comme $g(\mathbb{R}) = g([0,1])$, on a donc montré que que g est bornée sur $\mathbb{R}$ également

2. – On a montré en Q1 que g est bornée sur $\mathbb{R}$, càd

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant g(x) \leqslant M$$

ce qui revient à dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, m + x \leqslant f(x) \leqslant M + x \qquad (*)}$$

- Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} m + x = +\infty$, on a donc forcément $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

– En divisant chaque membre de $(*)$ par $x > 0$ on a

$$\forall x > 0, \frac{m+x}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{M+x}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{m+x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{M+x}{x} = 1$,

on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\boxed{\text{Conclusion: on a montré que } f(x) \underset{+\infty}{\sim} x}$

16 1. $\cos x = 0$ lorsque $x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

L'ensemble de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

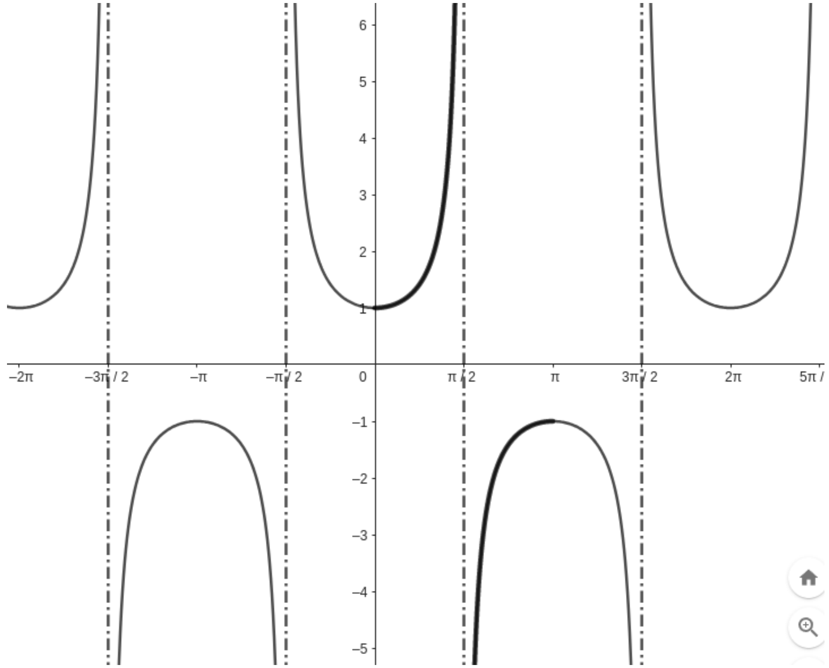
2. – La fonction f est $2\pi-$ périodique
   – La fonction f est paire

   On en déduit qu'il suffit de faire l'étude sur $[0,\pi] \cap D_f$
   (La courbe sera symétrique par rapport à l'axe (Oy))

3. Sur $[0,\pi] - \{\pi/2\}$, la fonction f est de classe C^∞ comme quotient de fonctions C^∞, le dénominateur ne s'annulant pas.
   et l'on a $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \geqslant 0$ sur cet ensemble.
   On obtient le TV suivant:

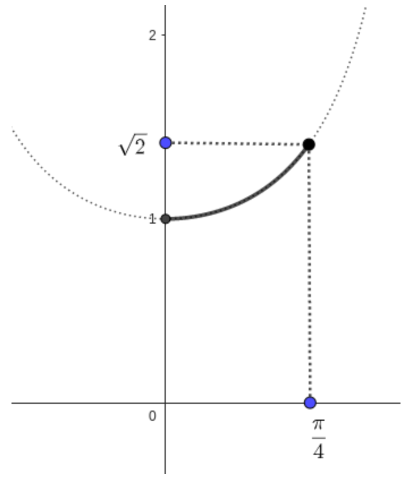
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$

ainsi que la courbe complète obtenue par symétrie et translation



Question Bonus: sauriez-vous justifier que la courbe est symétrique par rapport au point $(0,\frac{\pi}{2})$

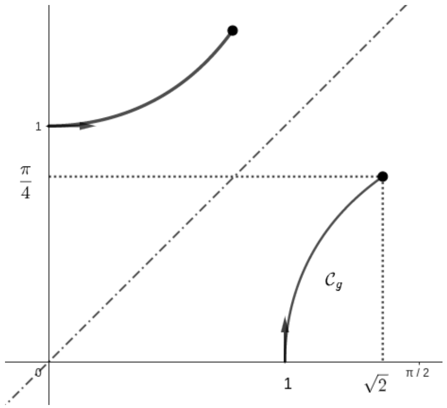
4. On va appliquer **le théorème de la bijection**
   – La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0,\pi/4]$, on peut donc affirmer que f réalise une bijection de I sur $J = f(I) = [f(\pi/4),f(0)] = [1,\sqrt{2}]$



5. – Le théorème de la bijection permet d'affirmer que g possède le même sens de variation que f,

donc g est strictement décroissante de $J=[1,\sqrt{2}]$ sur $I=[0,\pi/4]$

– Le théorème de la bijection, toujours lui, permet de dire que la courbe représentative de g est symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y=x$



rem: comme $\mathcal{C}_f$ possède une tangente horizontale en $(0,1)$, on a une tangente horizontale à $\mathcal{C}_g$ en $(1,0)$

6. (petite coquille dans l'énoncé, il faut lire $\forall x\in J$)
Soit $x\in J$.

– Comme $g: J\to I$ et l'application réciproque de $f: I\to J$, on a l'équivalence pour $(x,t)\in J\times I$

$$g(x)=t \Longleftrightarrow x=f(t)$$

– Soit $x\in J$.
On a $f(g(x))=x$ par définition de l'application réciproque.
On a donc

$$\frac{1}{\cos(g(x))}=x$$

En passant à l'inverse, cela donne bien

$$\cos(g(x))=\frac{1}{x}$$

– Soit $x\in J$.
On sait que $g(x)\in I=[0,\pi/4]$ et donc que $\sin g(x)\geqslant 0$.
On sait aussi que

$$\cos^2 g(x)+\sin^2(g(x))=1$$

Comme $\sin(g(x))\geqslant 0$, on a donc

$$\sin(g(x))=+\sqrt{1-\cos^2(g(x))}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

7. – On applique (encore!) le théorème de la bijection, qui affirme que:
si f est bijective de I_1 sur J_1, dérivable sur I_1, et de **dérivée non nulle** sur I_1, alors f^{-1} est dérivable sur J_1 avec $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$

– Ici, comme f est dérivable à dérivée non nulle sur $]0,\pi/4]$, on peut affirmer que g est dérivable sur $]1,\sqrt{2}]$
(ce qui se comprend bien sur le dessin précédent avec la tangente verticale uniquement au point $(1,0)$*)*

– Soit $x\in J-\{1\}=]1,\sqrt{2}]$.
D'après la formule rappelée on a

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{\cos^2(g(x))}{\sin g(x)}$$

En utilisant Q6, cela donne bien

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$$

$\boxed{18}$ 1. **Etude sur $]0,\pi]$ par les théorèmes généraux**
La fonction f est C^1 (C^∞ même) sur l'intervalle $]0,\pi]$ d'après les théorèmes généraux, car c'est le quotient de fxs C^1 (C^∞) le dénominateur ne s'annulant pas.
Et l'on a par formules de dérivation

$$\forall x\in]0,\pi],\ f'(x)=\frac{4(x-\pi).\sin\frac{x}{2}+(2x\pi-x^2).\cos\frac{x}{2}}{8\pi\sin^2(\frac{x}{2})}$$

2. **Etude du recollement en** 0
Nous allons montrer que $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } 0\\ f' \text{ est continue en } 0\end{cases}$

(a) **Montrons que f est dérivable en** 0

– pour $x>0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\cdots=\frac{x^2-2\pi x+4\pi\sin\frac{x}{2}}{4\pi x\sin\frac{x}{2}}$$

On va maintenant déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur en 0^+ *afin de trouver la limite de ce quotient en* 0^+

– Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0$, on a $\sin\frac{x}{2}\underset{0^+}{\sim}\frac{x}{2}$
et donc

$$4\pi x\sin\frac{x}{2}\underset{0^+}{\sim}4\pi x\frac{x}{2}=2\pi x^2$$

– Comme on ne peut additionner les équivalents, on va utiliser un DL pour le numérateur.
On sait que $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+o(x^2)$
et donc

$$x^2-2\pi x+4\pi\sin\frac{x}{2}=x^2-2\pi x+4\pi(\frac{x}{2}+o(x^2))=x^2+o(x^2)$$

ce qui permet d'affirmer que

$$x^2-2\pi x+4\pi\sin\frac{x}{2}\underset{0^+}{\sim}x^2$$

– On en déduit ainsi que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{0^+}{\sim}\frac{x^2}{2\pi x^2}=\frac{1}{2\pi}$$

ceci prouve que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2\pi}$.

Comme cette limite est finie, on a montré que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ avec } f'(0) = \dfrac{1}{2\pi}}$

(b) **Montrons que f' est continue en** 0
Il s'agit que montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$.
Nous allons déterminer un équivalent de $f'(x)$ calculé en Q1
– On a déjà pour le dénominateur

$$8\pi\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} 8\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\pi x^2$$

– Pour le numérateur, on passe par des DLS

$$\begin{aligned}4(x-\pi).\sin\frac{x}{2} + (2x\pi - x^2).\cos\frac{x}{2} &= 4(x-\pi)\left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right) + (2x\pi - x^2)(1+o(x))\\ &= x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

et donc

$$4(x-\pi).\sin\frac{x}{2} + (2x\pi - x^2).\cos\frac{x}{2} \underset{0^+}{\sim} x^2$$

– On a ainsi

$$f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{x^2}{2\pi x^2} = \frac{1}{2\pi}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{1}{2\pi}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$, on a montré que $\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$

3. $\boxed{\text{Conclusion: on a montré que } f \text{ est } C^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

21 1. Un développement limité donne $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{15} + o(\dfrac{1}{x^2})$.

D'où $l = \dfrac{1}{3}$ et $f(x) - l \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{15}$

2. On définit ainsi

$$f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases}\frac{1}{3} & \text{si } x = 0\\ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} & \text{sinon}\end{cases}$$

(a) f est évidemment continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
Puisque
– f est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^*$ par les théorèmes généraux
– f est continue en 0 car $\lim 0 f(x) = \dfrac{1}{3} = f(0)$
(on a effectué un prolongement par continuité en Q1)

(b) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
En effet:
– sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^*$, f est dérivable (et même C^∞)) d'après les théorèmes généraux
– f est dérivable en 0 car
pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{3}}{x} = \frac{x}{15} + o(\frac{1}{x})$$

On a ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

ceci prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

(c) f' est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
En effet:
– Sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^*$, f' est continue (théorème généraux)
– f' est continue en 0
En effet:
Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{-2.\cos x}{\sin^3 x} + \dfrac{2}{x^3}$

$$\begin{aligned}\frac{-2\cos x}{\sin^3 x} &= -2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right).\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^{-3}\\ &= -2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right).x^{-3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^{-3}\\ &= \frac{-2}{x^3}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - (-3)\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\\ &= \frac{-2}{x^3}\left(1 + o(x^3)\right)\\ &= \frac{-2}{x^3} + o(1)\end{aligned}$$

et ainsi on a montré que

$$f'(x) = o(1)$$

càd que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$

Conclusion: $\boxed{\text{on a montré que } f' \text{ est continue en } 0}$

rem: on se rappelle que l'on NE peut PAS dériver les DLs, ceci signifie que l'on N'aurait PAS pu dire dès le départ que le DL de $f'(x)$ était celui obtenu à partir de $f(x)$ (càd $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{15} + o(\dfrac{1}{x^2})$) en dérivant)

24 1. $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ et $f''(x) = \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

2. $P_0 = 1$
$P_1 = X$
$P_2 = X^2 + 1$

$$P_{n+1} = (1 - X^2).P'_n + (n+1).X.P_n$$

3.

25 1.

2.

3. On pense à linéariser $f(x) = \sin^2 x.\cos x = \frac{1}{4}(-\cos(3x) + \cos(x))$

4. (Astuce!) $f(x) = \dfrac{1}{2}.e^{x.e^a} + \dfrac{1}{2}.e^{x.e^{-a}}$

31 1. **On commence par réaliser une intégration par parties.**
Soit $x \neq 0$ fixé
Comme la fonction f et la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut donc réaliser une intégration par parties, ce qui donne:

$$\int_a^b f(t)\sin(xt)dt = \left[-f(t)\frac{\cos(xt)}{x}\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(xt)}{x}dt$$

soit

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin(xt)dt &= f(a)\frac{\cos(xa)}{x} - f(b)\frac{\cos(xb)}{x} + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(xt)}{x}dt \\ &= \frac{1}{x}(f(a).\cos(xa) - f(b).\cos(xb)) + \frac{1}{x}.\int_a^b f'(t).\cos(xt)dt\end{aligned}$$

2. **On montre que la partie du crochet tend vers zéro.**
Comme la fonction cos est une fonction bornée et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on peut affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(f(a).\cos(xa) - f(b).\cos(xb)) = 0$$

3. **On montre que la deuxième intégrale tend elle aussi vers zéro**
Soit $x \neq 0$ fixé.
   - La fonction f étant C^1 sur $[a,b]$, on sait que f' est continue sur le segment $[a,b]$.
   Le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que f' est bornée sur $[a,b]$.
   Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [a,b], |f'(t)| \leqslant M$
   - On en déduit que

   $$\forall t \in [a,b], |f'(t).\cos(xt)| = |f'(t)|.|\cos(xt)| \leqslant M.1 = M$$

   et donc par **croissance de l'intégrale** on a

   $$\int_a^b |f'(t).\cos(xt)|dt \leqslant \int_a^b M dt = M.(b-a)$$

   L'inégalité triangulaire intégrale permet d'écrire

   $$\left|\int_a^b f'(t).\cos(xt)dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t).\cos(xt)|dt \leqslant \int_a^b M dt = M.(b-a)$$

   ce qui prouve que la fonction $x \mapsto \int_a^b f'(t).\cos(xt)dt$ est une fonction bornée.
   - On peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\int_a^b f'(t).\cos(xt)dt = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0

4. Au final, on a bien montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0 + 0 = 0$

36 1. Nous allons montrer que pour tout $x > 0$ fixé, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ existe bien.
Soit $x > 0$ fixé.
La fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t+x}$ est définie et **continue** sur le **segment** [0,1 (en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas), on peut donc affirmer que $\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ existe
rem: il ne faut surtout pas considérer la fonction $x \mapsto \frac{e^t}{t+x}$

2. – **première idée.**
Soit $0 < x_1 < x_2$.
On a

$$\forall t \in [0,1], 0 < t + x_1 < t + x_2$$

comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a

$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{t+x_2} < \frac{1}{t+x_1}$$

en multipliant par $e^t > 0$ cela donne

$$\forall t \in [0,1], \frac{e^t}{t+x_2} < \frac{e^t}{t+x_1}$$

par **croissance de l'intégrale***

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1}dt$$

On a montré que

$$(0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

rem: quand on intègre une inégalité stricte, elle devient large*

– **seconde idée.**
Soit $0 < x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2}dt - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1}dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2} - \frac{e^t}{t+x_1}dt \qquad \textit{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (x_1 - x_2).\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)}dt \end{aligned}$$

Or

$$\forall t \in [0,1], \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)} \geqslant 0$$

d'où par positivité de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)}dt \geqslant 0 \qquad \text{et ainsi} \qquad f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0$$

On a montré que

$$(0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

3. (a) Soit $x > 0$.
On a
$$\forall t \in [0,1], 1 \leqslant e^t \leqslant e$$
et ainsi
$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{e^t}{t+x} \leqslant \frac{e}{t+x}$$
Par croissance de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e}{t+x}dt = e.\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt$$
et comme
$$\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt = [\ln|t+x|]_0^1 = \ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x}$$
On a bien montré que
$$\ln\frac{x+1}{x} \leqslant f(x) \leqslant e.\ln\frac{x+1}{x}$$

(b) – On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{x+1}{x} = +\infty$, donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$
– On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$,
donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4. (a) – Nous allons montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = 0$
et pour cela on va commencer par encadrer l'intégrale pour 'l'évaluer'
– Soit $x > 0$
On a
$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{e^t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{e}{x^2}$$
et donc par croissance de l'intégrale
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e}{x^2}dt = \frac{e}{x^2}$$
– On a donc pour tout $x > 0$
$$0 \leqslant x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \leqslant \frac{e}{x}$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$, on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = 0$$
Ce qui signifie exactement que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt}{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \text{càd} \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = o(\frac{1}{x})$$

(b) Soit $x > 0$ fixé.
On réalise une intégration par parties en posant $\begin{cases} u'(t) &= e^t \\ v(t) &= \dfrac{1}{t+x} \end{cases}$ qui sont bien C^1.
Cela donne
$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{e^t}{t+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \\ &= \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} + o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$
Or on a
$$\frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(e-1)x}{x^2} = \frac{e-1}{x}$$
ce qui permet d'affirmer que
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$$

5. Soit $x > 0$.
– On commence par opérer le changement de variable affine proposé $\theta = t + x$ ($d\theta = dt$)
$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{\theta-x}}{\theta}d\theta = e^{-x}.\underbrace{\int_x^{x+1} \frac{e^\theta}{\theta}d\theta}_{=K(x)} = e^{-x}.K(x) \qquad (*)$$
– Notons $h : \theta \mapsto \frac{e^\theta}{\theta}$
La fonction h est continue sur $]0,+\infty[$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle.
Notons H l'une d'elles. On a ainsi $H' = h$, et H est C^1 sur $]0,+\infty[$.
On a
$$\forall x > 0, K(x) = H(x+1) - H(x)$$
Ainsi la fonction K est aussi C^1 sur $]0,+\infty[$ comme différence de fonctions C^1.
– Avec $(*)$ on sait que f est un produit de fonctions C^1 donc f est C^1 sur $]0,+\infty[$, avec
$$\begin{aligned} f'(x) &== -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.K'(x) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.(H'(x+1) - H'(x)) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.(h'(x+1) - h'(x)) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}\right) \\ &= -f(x) + \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt}$
rem: on a prouvé que f vérifie l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)}$

43 1. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$

2. On commence par utiliser l'égalité donnée

$$I = \int_a^b t.f(t).dt = \int_a^b t.f(a+b-t).dt$$

Dans cette seconde intégrale, on effectue le changement de variable affine $\theta = a+b-t$ (et ainsi $d\theta = -dt$.)
Cela donne

$$\begin{aligned}\int_a^b t.f(a+b-t).dt &= -\int_b^a (a+b-\theta).f(\theta).d\theta \\ &= \int_a^b (a+b-\theta).f(\theta).d\theta \\ &= (a+b)\int_a^b f(\theta)d\theta - \underbrace{\int_a^b \theta.f(\theta).d\theta}_{=I}\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$I = (a+b)\int_a^b f(\theta)d\theta - I$$

càd

$$I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(\theta)d\theta$$

3. – Notons $f : t \mapsto \sin^3(t)$
On commence par vérifier que c'est bien une application possible de cet exercice

$$\forall t \in [0,\pi], f(0+\pi-t) = \sin^3(\pi - t) = (\sin t)^3 = f(t)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t.\sin^3(t)dt &= \frac{0+\pi}{2}.\int_0^\pi \sin^3(t).dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin(t).\sin^2 t.dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin(t).(1-\cos^2 t).dt \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi \sin(t) - \sin(t).\cos^2 t).dt\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}.\cos^3 t\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

rem: il était aussi possible de linéariser $\sin^3(t)$*:*

$$\sin^3(t) = \frac{3}{4}.\sin(t) - \frac{1}{4}.\sin(3t)$$

46 – La fonction f est définie et continue sur $I =]-\pi, +\pi[$ comme quotient de fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas
  – elle possède des primitives sur cet intervalle
  – et les primitives sont égales à une constante près

– Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $y \in I, F(y) = \int^y \dfrac{dx}{1+\sin x}$

– En posant $t = \tan(\dfrac{x}{2})$ on a
  – d'une part, $dt = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2(\dfrac{x}{2})\right)dx$ c'est à dire $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
  – et d'autre part, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

– Et ainsi

$$\begin{aligned}F(y) &= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\dfrac{2t}{1+t^2})} \\ &= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{1+2t+t^2} \\ &= 2\int^{\tan(y/2)} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \left[\frac{-2}{1+t}\right]^{\tan(y/2)} \\ &= \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{y}{2})} + Cste\end{aligned}$$

– On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{x}{2})} + Cste}$$

47 – Comme

$$4x - x^2 > 0 \iff x(4-x) > 0 \iff 0 < x < 4$$

La fonction f est définie et continue sur $I =]0,4[$ donc
  – elle possède des primitives sur cet intervalle
  – et les primitives sont égales à une constante près

– Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(y) = \displaystyle\int^y \frac{-dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

Le changement de variable $x = 2t+2$ (et donc $dx = 2dt$) donne

$$F(y) = \int^{(y-2)/2} \frac{-2dt}{\sqrt{4(2t+2)-(2t+2)^2}} = \int^{(y-2)/2} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arccos t]^{(y-2)/2} = \arccos\left(\frac{y}{2}-1\right) + Cste$$

– On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2}-1\right) + Cste}$$

de nombreux autres exemples sont sur le site ;-)

48 – **Etude de e_n**

– On remarque que $e_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.\exp(-\frac{k}{n})$

– Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t.e^{-t} \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$e_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

– On réalise une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 f(t)dt$.
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$, et l'on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$.
(ces fonctions sont de classe C^1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 t.e^{-t}dt &= \left[-t.e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-t}\right]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

– On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = 1 - 2.e^{-1}}$$

– **Etude de g_n**

– On remarque que $g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp(\frac{k}{n}.\ln 2)$

– Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{t.\ln 2} \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$e_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

– On a

$$\int_0^1 e^{t.\ln 2}dt = \left[\frac{e^{t.\ln 2}}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{e^{\ln 2}-1}{\ln 2} = \frac{2-1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

– On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{\ln 2}}$$

remarque: sur le site, d'autres sommes de Riemann sont disponibles :-)))