Exercice : Banque PT 2019 A

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, P(X=k, Y=l) = \frac{\alpha}{2^{k+l}}$$

où α est une constante réelle.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

4. Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $Cov(X,Y)$.
5. Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X \geqslant n)$.
6. On pose $Z = min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.
7. Calculer les probabilités suivantes

$$P(X=Y), \qquad P(X<Y), \qquad P(X=rY)$$

   où r est un nombre rationnel positif fixé.
8. On pose $T = X - Y$. Déterminer la loi du couple (Z,T), en précisant dans un premier temps les valeurs possibles prises par ce couple.
   Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
9. Donner la loi conditionnelle de Z sachant $X = k$.

CORRECTION

Notation : $(X = k,Y = l)$ est une notation simplifiée de $(X = k \cap Y = l)$

1. • Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a

$$((X = k,Y = l))_{k\geqslant 0,l\geqslant 0} \text{ qui est un Système Complet d'Evénements}$$

On doit donc avoir

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(Y = k,Y = l) = 1$$

or

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(Y = k,Y = l) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+l}} = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}$$

avec

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Ainsi

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$$

2. • Nous allons déterminer les lois de X et de Y *(les lois marginales)*
• Soit $k \in \mathbb{N}$

$$P(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X = k,Y = l) = \alpha.\frac{1}{2^k}.\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l} = \alpha.\frac{1}{2^k}.2 = \frac{1}{2^{k+1}}$$

• Soit $l \in \mathbb{N}$

$$P(Y = l) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k,Y = l) = \alpha.\frac{1}{2^l}.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \alpha.\frac{1}{2^l}.2 = \frac{1}{2^{l+1}}$$

rem: on peut remarquer que X et Y suivent la même loi, et écrire $X \sim Y$

• Les variables aléatoires sont indépendantes car

$$\forall(k,l) \in \mathbb{N}^2, P(X = k).P(Y = l) = \frac{1}{2^{k+1}}.\frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2^{k+l+2}} = \alpha.\frac{1}{2^{k+l}} = P(X = k,Y = l)$$

3. • On sait que $Rayon(\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k) = 1$ et que $\forall x \in]-1,+1[,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$
• Le **théorème de dérivation terme à terme des séries entières** permet d'affirmer que
  i) $Rayon(\sum\limits_{k\geqslant 1} k.x^{k-1}) = 1$ et $\forall x \in]-1,+1[,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = S'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
  ii) $Rayon(\sum\limits_{k\geqslant 2} k.(k-1).x^{k-2}) = 1$ et $\forall x \in]-1,+1[,\ \sum\limits_{k=2}^{\infty} k.(k-1).x^{k-2} = S''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

4. • Comme $X(\Omega)$ n'est pas fini, il faut commencer par justifier que $E(X)$ existe.

On sait que

$$\boxed{E(X) \text{ existe ssi la série } \sum_{k\geqslant 0} k.P(X = k) = \sum_{k\geqslant 0} k.\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^2}.\sum_{k\geqslant 0} k.\frac{1}{2^{k-1}} \text{ ACV}}$$

D'après Q3, c'est bien le cas,(comme le terme général est positif, la convergence est synonyme d'ACV) et l'on a

$$E(X) = \frac{1}{2^2}.\sum_{k=0}^{\infty} k.\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1$$

- Comme $X(\Omega)$ n'est pas fini, il faut commencer par justifier que $E(X^2)$ ou $E(X(X-1))$ existe.

  On sait que

  $$\boxed{E(X(X-1)) \text{ existe ssi la série } \sum_{k\geqslant 0} k.(k-1)P(X=k) = \frac{1}{2^3}.\sum_{k\geqslant 0} k.(k-1).\frac{1}{2^{k-2}} \text{ ACV.}}$$

  D'après Q3, c'est encore bien le cas, et l'on a

  $$E(X(X-1)) = \frac{1}{2^3}.\sum_{k=0}^{\infty} k.(k-1).\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{8}.\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 2$$

  Ainsi par linéarité de l'espérance

  $$E(X^2) = E(X(X-1)+X) = E(X(X-1)) + E(X) = 2+1 = 3$$

  et

  $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - 1^2 = 2$$

  remarque:
  autre idée ici si on ne pense pas à considérer $E(X(X-1))$, on peut considérer $E(X^2)$
  Avec Q3, on a

  $$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{k=1}^{\infty} k^2.x^{k-1} = x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1).x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

  et donc

  $$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{k=1}^{\infty} k^2.x^{k} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

  ce qui permet d'affirmer que la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2P(X=k) = \frac{1}{2}.\sum_{k\geqslant 0} k^2.\frac{1}{2^k}$ ACV, et que

  $$E(X^2) = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{\infty} k^2.\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{\frac{1}{2^3}} = 3$$

- Comme X et Y sont indépendantes (on peut écrire $X \perp\!\!\!\perp Y$), on a $\boxed{cov(X,Y) = 0}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a

   $$(X \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{\infty} (X=k) \qquad \textit{union d'événements disjoints 2 à 2}$$

   et donc

   $$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k-n}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n+1}}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

6. - On a déjà $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
   - Comme Z est défini par un minimun, et qu'en plus à la question précédente on a calculé $P(X \geqslant n)$, on va s'intéresser à $P(Z \geqslant n)$
     Comme

     $$(Z \geqslant n) = (X \geqslant n \cap Y \geqslant n)$$

et que X et Y sont indépendantes

$$P(Z \geqslant n) = P(X \geqslant n).P(Y \geqslant n)$$

comme X et Y suivent la même loi

$$P(Z \geqslant n) = (P(X \geqslant n))^2 = \frac{1}{4^n}$$

- Z étant à valeurs entières, on a

$$(Z \geqslant n) = (Z = n) \cup (Z \geqslant n+1) \qquad \textit{union disjointe}$$

ainsi

$$P(Z \geqslant n) = P(Z = n) + P(Z \geqslant n+1)$$

d'où

$$P(Z = n) = P(Z \geqslant n) - P(Z \geqslant n+1) = \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{3}{4^{n+1}}$$

7. (a) On utilise **la formule des probabilités totales** avec le Système Complet d'Evénements $((X = n))_{n \geqslant 0}$

$$\begin{aligned} P(X = Y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = Y \cap X = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n \cap Y = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n).P(Y = n) \qquad \textit{car } X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

remarque: on peut aussi décrire l'événement $(X = Y)$ puis passer à la probabilité

$$(X = Y) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (X = k, Y = k) \qquad \textit{union d'événements disjoints deux à deux}$$

Et donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = k) = \alpha.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

(b) On utilise la même formule !

$$\begin{aligned} P(X < Y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X < Y \cap X = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n \cap Y \geqslant n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n).P(Y \geqslant n+1) \qquad \textit{car } X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

rem: une autre idée consiste à dire que comme X et Y sont indépendantes et suivent la même loi, on a $P(X > Y) = P(X < Y)$.
Mais on a aussi $P(X < Y) + P(X = Y) + P(X > Y) = 1$, et donc $P(X < Y) = \dfrac{1}{3}$

(c)
- Un nombre rationnel positif est un nombre de la forme $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$
- Pour être pédagogique, je vais tenir le raisonnement dans le cas où $r = \dfrac{2}{5}$ *(pour la démonstration générale, il suffira de remplacer 2 par p et 5 par q, en supposant que p et q sont premiers entre eux)*
  On commence par remarquer que

$$(X = \frac{2}{5}Y) = (5X = 2Y)$$

Comme X et Y sont des entiers, et que 5 et 2 sont premiers entre eux, les valeurs prises par $5X = 2Y$ sont des multiples de $2 \times 5 = 10$, càd que $5X = 2Y = 10n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi

$$(5X = 2Y) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (5X = 2Y = 10n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X = 2n) \cap (Y = 5n)$$

Comme il s'agit d'une **union d'événements disjoints deux à deux**, et que les variables X et Y sont **indépendantes**, on a

$$\begin{aligned} P(X = \frac{2}{5}Y) = P(5X = 2Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n).P(Y = 5n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2^{5n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{1}{2^{7n+2}} \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^7}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^7}} \end{aligned}$$

8.
- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $T(\Omega) = \mathbb{Z}$
- Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
  On a

$$(Z = a \cap T = b) = (Z = a \cap Y = X - b) = \begin{cases} (X = a \cap Y = a - b) & \text{si } b \leqslant 0 \\ (Y = a \cap X = a + b) & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

On a donc toujours par indépendance des variables X et Y

$$\begin{cases} \text{si } b \leqslant 0 \quad P(Z = a \cap T = b) = P(X = a).P(Y = a - b) = \dfrac{1}{2^{2a-b+2}} \\ \text{si } b > 0 \quad P(Z = a \cap T = b) = P(Y = a).P(X = a + b) = \dfrac{1}{2^{2a+b+2}} \end{cases}$$

On remarque que l'on peut avoir une forme unique

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z}, P(Z = a \cap T = b) = \frac{1}{2^{2a+|b|+2}}$$

- On va déterminer la loi de T.
  On utilise la **formule des probabilités totales** avec le Système Complet d'Evénements $((Z=a))_{a\in\mathbb{N}}$

$$P(T=b)=\sum_{a=0}^{\infty}P(Z=a\cap T=b)=\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2a+|b|+2}}=\frac{1}{2^{|b|+2}}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{4^a}=\frac{1}{3.2^{|b|}}$$

- On constate que $\boxed{\text{les variables aléatoires } Z \text{ et } T \text{ sont indépendantes}}$
  En effet

$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}, P(Z=a\cap T=b)=\frac{1}{2^{2a+|b|+1}}=\frac{3}{4^{a+1}}.\frac{1}{3.2^{|b|}}=P(Z=a).P(T=b)$$

9. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$.
   Il s'agit de déterminer

$$P_{X=k}(Z=n)=\frac{P(X=k,Z=n)}{P(X=k)}$$

Une discussion est nécessaire car $Z=\min(X,Y)$

$$(X=k,Z=n)=\begin{cases}\emptyset & \text{si } k<n\\ (X=k,Y\geqslant k) & \text{si } k=n\\ (X=k,Y=n) & \textbf{si } k>n\end{cases}$$

et ainsi, toujours par indépendance des variables X et Y

$$P(X=k,Z=n)=\begin{cases}0 & \text{si } k<n\\ \frac{1}{2^{k+1}}.\frac{1}{2^k} & \text{si } k=n\\ \frac{1}{2^{k+1}}.\frac{1}{2^{n+1}} & \textbf{si } k>n\end{cases}$$

et donc

$$P_{X=k}(Z=n)=\begin{cases}0 & \text{si } k<n\\ \frac{1}{2^k} & \text{si } k=n\\ \frac{1}{2^{n+1}} & \textbf{si } k>n\end{cases}$$