Problème : synthèse séries

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

Partie 1

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

1. Ecrire le théorème de la bijection et
   redémontrer le fait que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
2. Vérifier que f est une fonction impaire
3. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(f(x))$ et $f(\text{sh}(x))$. Que peut-on en déduire?
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
5. Montrer que $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} .x^{2n}$ pour $x \in]-1, +1[$
6. En déduire le développement en série entière de f. (on écrira avec soin le théorème utilisé)
7. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x).f'(x)$
   On souhaite justifier de deux manières différentes que g est développable en série entière.
   (a) Première manière
      i. Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
      Pour tout $x \in]-R, +R[$ on note $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
      ii. Montrer que la fonction g et la fonction S vérifie toutes les deux
      l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy = 1 \quad (E)$
      iii. Justifier que g est développable en série entière
   (b) Seconde manière.
      i. Rappeler ce que vous savez sur le produit de Cauchy de deux séries entières.
      ii. Justifier que g est développable en série entière. Que peut-on dire du rayon?
   (c) Déduire de (a) et (b) que pour tout $n \geqslant 0$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} \binom{2p}{p} \binom{2n-2p}{n-p} = \frac{(4^n.n!)^2}{(2n+1)!}$$

8. Dans cette question, on souhaite étudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$.

   Pour cela, on pose pour tout $n \geqslant 0, a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ et $b_n = a_n.\sqrt{n}$

   (a) Simplifier pour tout n entier $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que la suite (a_n) est un suite décroissante.

   (b) Montrer que $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}$

   (c) En déduire que la suite $(\ln b_n)$ est convergente puis justifier qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

   (d) La série $\sum(-1)^n a_n$ est-elle convergente? Justifier.

Partie 2

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction appelée zéta de Riemann $\boxed{\begin{array}{ccc}\zeta :]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}\end{array}}$.

Pour tout $N \geqslant 1$ on note aussi $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}$ et $R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$

Dans la suite, x désignera un réel strictement supérieur à un et N un entier positif non nul.

1. Rappeler pourquoi cette fonction est en effet bien définie sur $]1,+\infty[$
2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\frac{1}{k^{x+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x}$
3. (a) Démontrer, sans vous contenter d'un rappel de cours, que $\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant S_N(x) \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}$

   (b) En déduire que $\frac{1-(N+1)^{1-x}}{x-1} \leqslant S_N(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$

   (c) Justifier que $\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$,
   puis en déduire un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \to 1^+$
4. Soit $p \geqslant N+1$ un entier.

   (a) Montrer que $\sum_{k=N+1}^{p} \frac{1}{k^x} \leqslant \int_N^p \frac{dt}{t^x}$

   (b) En déduire que $0 \leqslant R_N(x) \leqslant \frac{1}{(x-1).N^{x-1}}$

   (c) Quel N doit-on choisir pour être certain que $S_N(x)$ est une valeur approchée de $\zeta(x)$ à 10^{-4} près?

CORRECTION DU PROBLEME

Préliminaire: démonstration faite en classe: s'y reporter!

Partie 1

1. Théorème de la bijection:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.
Alors:
   i) *$f(I)$ est un intervalle*
   ii) *f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$*
   iii) *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même sens de variation que f*
   iv) *si de plus f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annulle pas alors f^{-1} est dérivable sur J et l'on a $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$*

   La fonction sh est une fonction continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$,
   d'après le théorème ci-dessus, on peut affirmer que
   - $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$ est un intervalle
   - sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$

   Comme sh est croissante on a $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh}\,, \lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh}[=]-\infty, +\infty[$,
   et donc $\boxed{\text{sh réalise bien une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln((\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x))$$
   ce qui donne
$$f(x) + f(-x) = \ln((\sqrt{x^2+1})^2 - x^2) = \ln 1 = 0$$
   On a prouvé que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$, càd que $\boxed{f \text{ est une fonction impaire}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   i) $\mathrm{sh}(f(x)) = \dfrac{\exp(\ln(\sqrt{x^2+1} + x)) - \exp(-\ln(\sqrt{x^2+1} + x))}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} + x - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$
   Or
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1} = \sqrt{x^2+1} - x$$
   Ainsi
$$\mathrm{sh}(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} + x - (\sqrt{x^2+1} - x)\right) = \frac{2x}{2} = x$$
   ii) $f(\mathrm{sh}\, x) = \ln(\sqrt{\mathrm{sh}^2 x + 1} + \mathrm{sh}\, x) = \ln(\sqrt{\mathrm{ch}^2 x} + \mathrm{sh}\, x) = \ln(\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x) = \ln(e^x) = x$

   car $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ et que $\sqrt{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{ch}\, x$ car $\mathrm{ch}\, x \geqslant 1 \geqslant 0$

   iii) On a prouvé que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(f(x)) = f(\mathrm{sh}\, x) = x$.
   Ceci montre que f est l'application réciproque de la fonction sh (cette application s'appelle aussi la fonction argsh mais elle n'est pas à notre programme)

   remarque: comme on a prouvé que sh *était une bijection, il aurait suffit d'avoir maintenant seulement l'une de ces deux égalités pour prouver que l'application réciproque de* sh *était g*

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée
   - de la fonction dérivable $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+1\end{array}$
   - et de la restriction de la fonction $\sqrt{.}$ à $[1,+\infty[$ qui est dérivable *(on a retiré le problème de la non-dérivabilité de la fonction $\sqrt{.}$ en 0)*

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(x) = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

5. - On rappelle que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé
$$\forall X \in]-1,+1[, (1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n.X^n \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

   Dans le cas où $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, cela donne
$$\begin{aligned} n!.a_n &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2}) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}1.3.5.\dots.(2n-1) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}.\frac{(2n)!}{2^n.n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n}.\frac{(2n)!}{n!} \end{aligned}$$

   et ainsi
$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n}.\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

   Ainsi:
$$\forall X \in]-1,+1[, (1+X)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}X^n$$

   - Soit $x \in]-1,+1[$.
   On a alors $x^2 \in [0,+1[\subset]-1,+1[$, et en utilisant l'égalité précédente avec $X = x^2$ cela donne
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}$$

   On a bient montré que $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}}$

6. On commence par écrire le théorème de primitivation terme à terme des séries entières:

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S.
Soit F une primitive de S sur $]-R,+R[$.
On a

$$\forall x \in]-R,+R[, F(x) = F(0) + \int_0^x S(t)dt = F(0) + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n.t^n.dt = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Comme $f(0) = \ln(0 + \sqrt{0^2+1}) = \ln 1 = 0$, on a donc
Soit $x \in]-1,+1[$.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} \int_0^x t^{2n} dt$$

On vient de prouver que $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n.(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}}$

7. (a) i. On va utiliser la règle de D'Alembert:
Soit $x \neq 0$.
On a

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(2^{n+1}.(n+1)!)^2}{(2n+3)!} x^{2n+3}}{(-1)^n \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} x^2 \to x^2$$

- si $|x| < 1$, la série est donc ACV
- si $|x| > 1$, la série est GDV

$\boxed{\text{Conclusion: } R = 1}$

ii. • Notons pour tout $n \geqslant 0, b_n = (-1)^n . \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$.
On sait que $\forall x \in]-1,+1[$ on a $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$
Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières permet d'affirmer que S est C^∞ sur $]-1,+1[$ et que l'on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1).b_n.x^{2n}$
On a alors
– $x^2 S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1).b_n.x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) b_{n-1} x^{2n}$
– $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{2n}$
D'où

$$\begin{aligned}(1+x^2)S'(x) + xS(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1).b_n.x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) b_{n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{2n} \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((2n+1)b_n + (2n-1)b_{n-1} + b_{n-1} \right) x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((2n+1)b_n + 2n.b_{n-1} \right) x^{2n}\end{aligned}$$

Or pour $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = -\dfrac{(2n)^2}{(2n+1)(2n)} = -\dfrac{2n}{2n+1}$, càd $(2n+1)b_n + 2n.b_{n-1} = 0$

On trouve bien que $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, (1+x^2)S'(x) + xS(x) = 1}$

iii. Par théorème d'existence et d'unicité de la solution à un problème de Cauchy linéaire du premier ordre, il existe une et une seule fonction y définie sur $]-1,+1[$ telle que $\begin{cases} y' + \dfrac{x}{1+x^2}y & = \dfrac{1}{x^2+1}\,. \\ y(0) & = 0 \end{cases}$

Comme g et S vérifie ce problème de Cauchy,

on peut conclure que $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, g(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$

(b) i. On récite le cours!

théorème 6

i) *Le produit de Cauchy de deux séries entières* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *est la série entière* $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ *avec* $\boxed{c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.b_{n-j}}$ *pour tout* $n \geqslant 0$

ii) *si on note* R_a *le rayon de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, R_b *le rayon de la série* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, *et* R_p *le rayon de la série produit alors*

- *pour* $|z| < \min(R_a,R_b)$, *les trois séries sont ACV et* $\boxed{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}$
- *la série produit est de rayon* $R_p \geqslant \min(R_a,R_b)$

ii. On a montré que f était DSE avec un rayon égal à un, et la même chose pour f'.
grâce au théorème précédent, on peut affirmer que $g = f.f'$ sera DSE avec un rayon au moins égal à un.

(c) ici la chose la plus simple est de revenir aux notations des coefficients dans le cours.

Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ainsi que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

On a pour tout $n \geqslant 0$

- $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{4^n.(2n+1)} \binom{2n}{n}$
- $b_{2n+1} = 0$ et $b_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$
- $c_{2n} = 0$ et $c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$

L'idée est de considérer $c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k.b_{2n+1-k}$ en remarquant que dans cette somme tous les termes a_k avec k pair sont nuls. On va donc pouvoir poser $k = 2p+1$.

D'où

$$c_{2n+1} = \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}.b_{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}.b_{2(n-p)}$$

Cela donne

$$(-1)^n \frac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{4^p.(2p+1)} \binom{2p}{p} \frac{(-1)^{n-p}}{4^{n-p}} \binom{2(n-p)}{n-p}$$

et après simplification, cela donne l'égalité demandée

8. (a) Pour tout $n \geqslant 0$ on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant 1$.
Comme (a_n) est une suite positive, on sait que l'inégalité ci-dessus équivaut à dire que (a_n) est une suite décroissante.

(b) Soit $n \geqslant 0$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}.\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

d'où:

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln(1+\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

On trouve bien

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{8n^2}$$

(c)
- Comme $\frac{1}{8n^2}$ est de signe stable, on peut affirmer par la règle des équivalents que
$\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ et $\sum \frac{1}{8n^2}$ sont deux séries de même nature.
Or la série $\sum \frac{1}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente!
On a donc $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ série convergente .
- Le théorème lien série-suite nous dit que

$$\text{La série } \sum \ln b_{n+1} - \ln b_n \text{ est convergente ssi la suite } (\ln b_n) \text{ converge}$$

On peut donc affirmer que la suite $(\ln b_n)$ est convergente
- Notons $l = \lim \ln b_n$.
On a $b_n = \exp(\ln(b_n))$ pour tout $n \geqslant 1$
Comme la fonction exp est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de composition de limites permet de dire que $b_n = \exp(\ln(b_n)) \to \exp(l)$.
On vient de prouver que la suite (b_n) converge vers un réel $\exp(l) > 0$.
Notons $\lambda = \exp(l)$. On a $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

(d) Nous allons montrer que $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère spécial de convergence des séries alternées
- Il s'agit bien d'une série alternée car $a_n > 0$ pour tout n
- d'après $Q8a$), la suite $(|(-1)^n a_n) = (a_n)$ est décroissante
- On a $\lim a_n = 0$ car $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

Conclusion : $\boxed{\sum(-1)^n a_n \text{ est une série convergente}}$

remarque: à noter que $\sum(-1)^n a_n$ *n'est pas ACV car* $|(-1)^n a_n| = a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

Partie 2

1. Car la série $\sum \dfrac{1}{n^x}$ est un série de Riemann convergente pour $x > 1$
2. Notons $\boxed{\begin{array}{ccc} f : [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^x} = t^{-x} \end{array}}$

   La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et l'on a $\forall t \geqslant 1, f'(t) = -x.t^{x-1} < 0$
   La fonction f est (strictement) décroissante sur $[1, +\infty[$

   Soit $k \geqslant 1$.
   Le sens de variation de f permet d'écrire que

$$\forall t \in [k,k+1], f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

   par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt$$

   c'est à dire

$$\boxed{f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)}$$

3. (a) Soit $N \geqslant 1$.

   i) On montre déjà la minoration.
   On a par sommation

$$\sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

   ce qui donne par Chasles

$$\boxed{\int_1^{N+1} f(t)dt \leqslant S_N(x)}$$

   ii) Puis la majoration, en distinguant deux cas
   - Pour $N = 1$, on a bien linégalité demandée car

$$S_1(x) = 1 \leqslant 1 + \int_1^1 f(t)dt = 1$$

   - Pour $N \geqslant 2$, on a

$$S_N(x) = f(1) + \sum_{k=2}^{N} f(k) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} f(k+1)$$

   d'où en utilisant la majoration de Q2

$$S_N(x) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = 1 + \int_1^N f(t)dt$$

(b) Il suffit de calculer les deux intégrales, ce qui donne

$$\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{N+1} \leqslant S_N(x) \leqslant 1 + \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{N}$$

Soit

$$\frac{1-(N+1)^{-x+1}}{x-1} \leqslant S_N(x) \leqslant 1 + \frac{1-N^{-x+1}}{x-1}$$

Et comme $-N^{-x+1} < 0$ on a bien au final l'encadrement annoncé

(c) Il suffit de faire tendre $x \to +\infty$, et l'on a $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

En multipliant par $x-1 > 0$, on a $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$.
En faisant tendre $x \to 1^+$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{1^+}(x-1)\zeta(x) = 1$, càd

$$\boxed{\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

4. (a) On sait que pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt$$

donc

$$\sum_{k=N+1}^{p} f(k) = \sum_{k=N}^{p-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=N}^{p-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_N^p f(t)dt$$

(b) On a

$$\int_N^p f(t)dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_N^p = \frac{N^{-x+1} - p^{-x+1}}{x-1}$$

Reste alors à faire tendre $p \to +\infty$ et cela donne

$$R_N(x) \leqslant \frac{N^{-x+1}}{x-1} = \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}$$

De plus $R_N(x) \geqslant 0$ car tous les termes $\dfrac{1}{k^x}$ sont positifs

(c) Il suffit de choisir N tel que $\dfrac{1}{(x-1)N^{x-1}} \leqslant 10^4$ càd $(x-1)N^{x-1} \geqslant 10^4$ càd $\boxed{N \geqslant \left(\dfrac{10^4}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}}$