Exercice : Formes linéaires I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$
On considère les applications f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur E par

$$f_1(P) = P(0) \qquad f_2(P) = P(1) \qquad f_3(P) = P'(1) \qquad f_4(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

1. Montrer que f_2 est une forme linéaire sur E, c'est à dire que $f \in \mathcal{L}(E,F)$

   On admettra dans la suite que f_1, f_3 et f_4 sont des formes linéaires sur E

2. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de F.
3. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de F
4. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f_4 = a.f_1 + b.f_2 + c.f_3$

Exercice : Formes linéaires 2

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E.
On souhaite montrer l'équivalence suivante

$$\ker(f) = \ker(g) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda.g$$

1. On suppose que $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda.g$.
   Justifier que $\ker(f) = \ker(g)$

2. On suppose que $\ker(f) = \ker(g)$

   (a) Justifier qu'il existe $n-1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ tels que $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de $\ker(f)$

   (b) Justifier qu'il existe a un vecteur non nul tel que $E = \ker(f) \oplus \text{vect}(a)$
   On note $\lambda_1 = f(a)$ et $\lambda_2 = g(a)$

   (c) Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda.g$ alors forcément $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{K}^*$

   (d) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda.g$

CORRECTION

Exercice 1

1. • Soient $(P, Q, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} f_2(\lambda.P + Q) &= (\lambda.P + Q)(1) \\ &= \lambda.P(1) + Q(1) \\ &= \lambda.f_2(P) + f_2(Q) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f_2 est une application linéaire

• Soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$.
On a $P(1) \in \mathbb{R}$
L'application f_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}$

• On a ainsi bien prouvé que $\boxed{f_2 \text{ est une forme linéaire sur } E}$

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3 = 0$

Ceci signifie que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $a.f_1(P) + b.f_2(P) + c.f_3(P) = 0$

c'est à dire que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $a.P(0) + b.P(1) + c.P'(1) = 0$

C'est donc en particulier vrai pour les polynômes X^2, X et 1.

Ce qui aboutit au système $\begin{cases} b + 2c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a + b &= 0 \end{cases}$
La résolution de ce système est simple est donne $a = b = c = 0$

Conclusion: $\boxed{\text{on a bien montré que } (f_1, f_2, f_3) \text{ est une famille libre de } F}$

3. On sait que $\dim F = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = 3 \times 1 = 3$.

Comme (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de F et que $card(f_1, f_2, f_3) = 3 = \dim F$, on peut affirmer par théorème que $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } F}$

4. Comme $f_4 \in F$ et que (f_1, f_2, f_3) est une base de F on sait déjà qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f_4 = a.f_1 + b.f_2 + c.f_3$

Pour ce triplet, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f_4(P) = a.f_1(P) + b.f_2(P) + c.f_3(P)$

On va écrire un système pour déterminer ces trois réels.

i) l'égalité $f_4(X^2) = a.f_1(X^2) + b.f_2(X^2) + c.f_3(X^2)$ donne $\frac{1}{3} = a.0 + b.1 + c.2$

ii) l'égalité $f_4(X) = a.f_1(X) + b.f_2(X) + c.f_3(X)$ donne $\frac{1}{2} = a.0 + b.1 + c.1$

iii) l'égalité $f_4(1) = a.f_1(1) + b.f_2(1) + c.f_3(1)$ donne $1 = a.1 + b.1 + c.0$

La résolution du système ainsi formé donne $\boxed{(a,b,c) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{6})}$

Exercice 2

1. Soit $x \in E$.
   Comme $\lambda \neq 0$, on a les équivalences suivantes

   $$x \in \ker(f) \iff f(x) = 0 \iff \lambda.f(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff x \in \ker(g)$$

   Ceci prouve que $\boxed{\ker(f) = \ker(g)}$

2. (a) Comme f est une forme linéaire sur E on sait que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}$, et comme f n'est pas la forme linéaire nulle on sait que $\dim \mathrm{Im}(f) \neq 0$, càd $\dim \mathrm{Im}(f) \geqslant 1$.

   Ainsi $\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K} \\ \dim \mathbb{K} = 1 \\ \dim \mathrm{Im}(f) \geqslant 1 \end{cases}$.

   On a donc forcément $\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 1 \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}.}$
   Le théorème du rang appliqué à f donne alors que $\dim \ker(f) = n - 1$
   $\boxed{\text{Il existe donc } n-1 \text{ vecteurs } e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} \text{ qui constituent une base de } \ker(f)}$

   (b) Comme $\dim \ker(f) = n - 1$, on sait qu'un supplémentaire sera de dimension un, ce qui justifie qu'il existe a vecteur non nul tel que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{vect}(a)$

   (c)
   - Comme a n'est pas un élément de $\ker(f)$ on a $\lambda_1 = f(a) \neq 0$
   - Comme on a aussi $E = \ker(g) \oplus \mathrm{vect}\, a$, on a de la même manière $\lambda_2 = g(a) \neq 0$

   Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda.g$
   On a donc en particulier $f(a) = \lambda.g(a)$, càd $\lambda_1 = \lambda.\lambda_2$.
   Comme $\lambda_2 \neq 0$, on a $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$
   On remarque également que comme $\lambda_1 \neq 0$, on a $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 0$

   (d) Notons $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 0$.
   Nous allons montrer que $f = \lambda.g$
   c'est à dire que $\forall x \in E, f(x) = \lambda.g(x)$

   Commençons par remarquer que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de E car $E = \ker(f) \oplus \mathrm{vect}(a)$ et l'on sait alors que la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathrm{vect}(a)$ est une base de E.

   Soit $x \in E$.
   Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1.e_1 + \cdots + x_{n-1}.e_{n-1} + x_n.a$
   On a

   $$f(x) = x_1.f(e_1) + \cdots + x_{n-1}.f(e_{n-1}) + x_n.f(a) = 0 + \cdots + 0 + x_n.\lambda_1 = x_n.\lambda_1$$

et

$$g(x) = x_1.g(e_1) + \cdots + x_{n-1}.g(e_{n-1}) + x_n.g(a) = 0 + \cdots + 0 + x_n.\lambda_2 = x_n.\lambda_2$$

On a ainsi

$$\lambda.g(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.x_n.\lambda_2 = \lambda_1.x_n = f(x)$$

On a bien prouvé que $\forall x \in E, f(x) = \lambda.g(x)$ càd que $f = \lambda.g$

Conclusion: $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda.g}$