PT 2023 B

Deuxième partie

1. • On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{a,b,c}(t) = a.\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + b.e^t.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + ce^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

• Notons
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

• Comme
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{a,b,c}(t) = a.f(t) + b.g(t) + c.h(t)$$
on a donc
$$f_{a,b,c} = a.f + b.g + c.h$$
Ainsi $\boxed{F = \text{vect}(f,g,h)}$, ce qui prouve que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$

• Montrons que (f,g,h) est une famille libre.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f + b.g + c.h = 0$.
On a donc
$$\forall t \in \mathbb{R}, a.\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + b.e^t.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + ce^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
Ce qui donne pour $t = 0$ le système
$$\begin{cases} b+c &= 0 \\ 2a-b &= 0 \\ a+c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= -b \\ a &= b/2 \\ a+c &= 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$
On a donc $\boxed{(f,g,h) \text{ base de } F \text{ et } \dim F = 3}$

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.
On effectue le calcul matriciel suivant
$$B.f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\-2 & -1 & 2\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b.e^t + c.e^{-t}\\2a - be^t\\a + c.e^{-t}\end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix}b.e^t - c.e^{-t}\\-b.e^t\\a - c.e^{-t}\end{pmatrix} = f'_{a,b,c}(t)$$
Ce qui prouve bien que $\boxed{\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, B.f(t) = f'(t)}$

3. Je propose deux solutions.
   (a) première solution:
   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Notons $M(t)$ le point de coordonnées $f_{a,b,c}(t)$ On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, M(t) = a.\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + b.e^t.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + ce^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Notons $A = \begin{pmatrix}0\\2a\\a\end{pmatrix}$ ainsi que $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
   Ainsi

$$M(t) = A + b.e^t.\vec{u} + c.e^{-t}.\vec{v}$$

   Ce qui prouve que le point $M(t)$ est dans le plan qui passe le point A et de vecteurs directeurs $(\vec{u},\vec{v})$.

   Conclusion : la courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est plane , tracée dans un plan dont la direction est vect$(\vec{u},\vec{v})$ qui est indépendant de (a,b,c).

   Ceci prouve bien que tous ces plans sont parallèles.

   (b) seconde solution:
   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Notons $M(t) = (x(t),y(t),z(t))$ le point de coordonnées $f_{a,b,c}(t)$.
   On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) &= b.e^t + c.e^{-t} \\ y(t) &= 2a - be^t \\ z(t) &= a + c.e^{-t} \end{cases}$$

   On remarque que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) + y(t) - z(t) = a$$

   Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est plane, tracée dans le plan d'équation $x + y - z = a$.

   Ces plans sont bien parallèles entre eux.

4. (a) $\boxed{\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} \qquad \vec{w} = \vec{i} + \vec{k}}$
   (b) Notons $(X(t),Y(t),Z(t))$ les coordonnées du point $M(t)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
   Je propose deux solutions.
      i. première solution: avec la formule de changement de base pour les vecteurs.
      On sait que

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = Q.\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\\Z(t)\end{pmatrix}$$

      On inverse la matrice Q, par exemple avec la méthode du miroir,

on trouve $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}.\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b.e^t + c.e^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + c.e^{-t} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a \\ b.e^t \\ c.e^{-t} \end{pmatrix}$$

ii. deuxième solution: en utilisant la question précédente
On a par définition des coordonnées

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM(t)} &= x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k} \\ &= (be^t + ce^{-t})\vec{i} + (2a - be^t)\vec{j} + (a + ce^{-t}).\vec{k} \\ &= a(2\vec{j} + \vec{k}) + be^t(\vec{i} - \vec{j}) + ce^{-t}(\vec{j} + \vec{k}) \\ &= a.\vec{u} + be^t.\vec{v} + ce^{-t}.\vec{w} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} X(t) &= a \\ Y(t) &= be^t \\ Z(t) &= ce^{-t} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

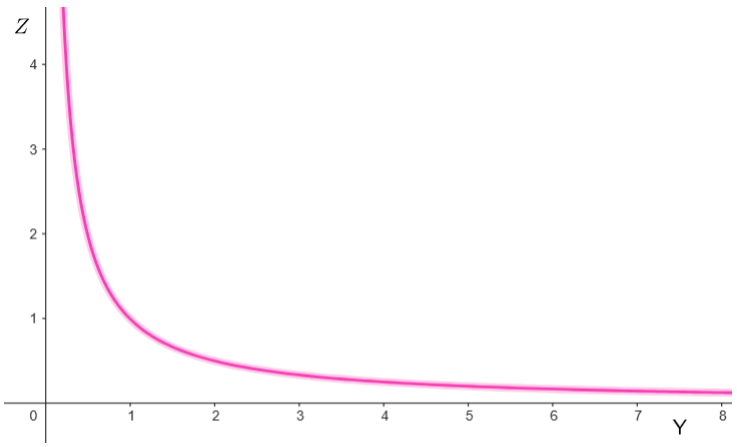
(c) On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} X(t) &= a \\ Y(t).Z(t) &= bc \end{cases}$

- si $bc \neq 0$, $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est incluse dans l'hyperbole d'équation $Y.Z = bc$ tracée dans le plan d'équation $X = a$
- si $bc = 0$, $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est incluse dans la conique dégénérée d'équation $Y.Z = 0$ tracée dans le plan d'équation $X = a$. (cette conique dégénérée est la réunion des axes (OY) et (OZ) tracés dans le plan $X = a$)

Voici quelques exemples de courbes

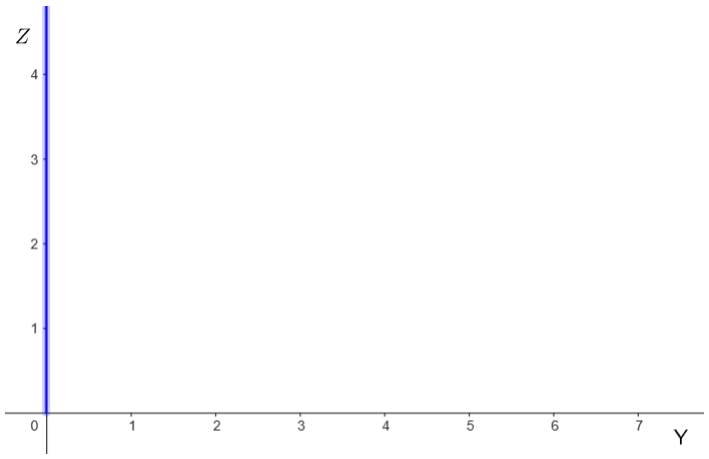
- $\mathcal{C}_{0,1,1}$ a pour équation $\begin{cases} X(t) &= 0 \\ Y(t) &= e^t \\ Z(t) &= e^{-t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

  On a $Y(t).Z(t) = 1$ avec $Y(t)$ qui décrit $]0, +\infty[$ quand t décrit $\mathbb{R}$.
  $\mathcal{C}_{0,1,1}$ est donc une branche d'hyperbole tracée dans le plan YOZ



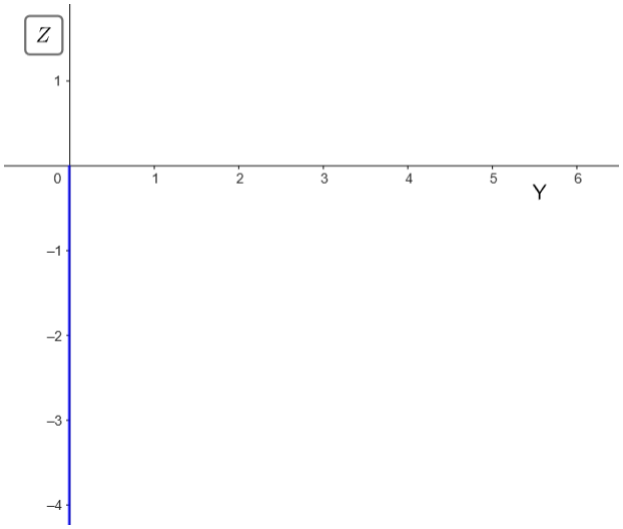
- $\mathcal{C}_{0,0,1}$ a pour équation $\begin{cases} X(t) &= 0 \\ Y(t) &= 0 \\ Z(t) &= e^{-t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

  On reconnait une demi-droite.



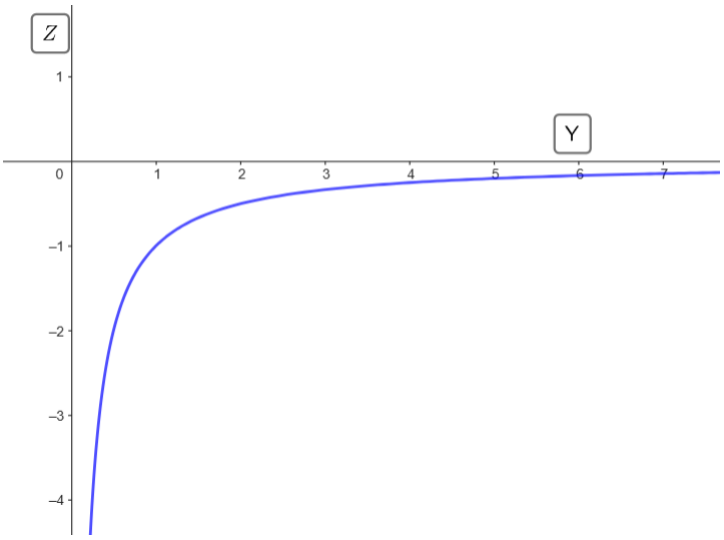
- $\mathcal{C}_{0,0,-1}$ a pour équation $\begin{cases} X(t) &= 0 \\ Y(t) &= 0 \\ Z(t) &= -e^{-t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

  On reconnait une demi-droite.



- $\mathcal{C}_{0,1,-1}$ a pour équation $\begin{cases} X(t) &= 0 \\ Y(t) &= e^{t} \\ Z(t) &= -e^{-t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

  On a $Y(t).Z(t) = -1$ avec $Y(t)$ qui décrit $]0, +\infty[$ quand t décrit $\mathbb{R}$.
  $\mathcal{C}_{0,1,-1}$ est donc une branche d'hyperbole tracée dans le plan YOZ



Quatrième partie

1. Le tableau de variation est quasi-immédiat tant les fonctions sont simples

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0

2. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases} = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ -e^t \end{pmatrix}$.

   On a donc $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

   Ceci prouve que $A(0)$ est un point régulier de Γ, et que la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $(0, -1)$, c'est à dire une tangente verticale.

3. • L'intersection de Γ avec l'axe des abscisses est caractérisée par le système

$$\begin{cases} x &= e^t + e^{-t} \\ y &= 2 - e^t \\ y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= \ln 2 \\ y &= 0 \\ x &= e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection est le point $A(\ln 2) = (\frac{5}{2}, 0)$

- On a $\begin{pmatrix} x'(\ln 2) \\ y'(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ qui est donc un vecteur directeur de la tangente au point $A(\ln 2)$.

Une équation cartésienne de cette tangente est $\begin{vmatrix} x - 5/2 & 3/2 \\ y - 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, càd $\boxed{4x + 3y = 10}$

4. $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 2$.

Il y a donc $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y = 2.}$
remarque: comme pour tout t on a $y(t) = 2 - e^t < 2$,
on peut préciser que $\boxed{\text{la courbe est toujours située sous cette asymptote.}}$

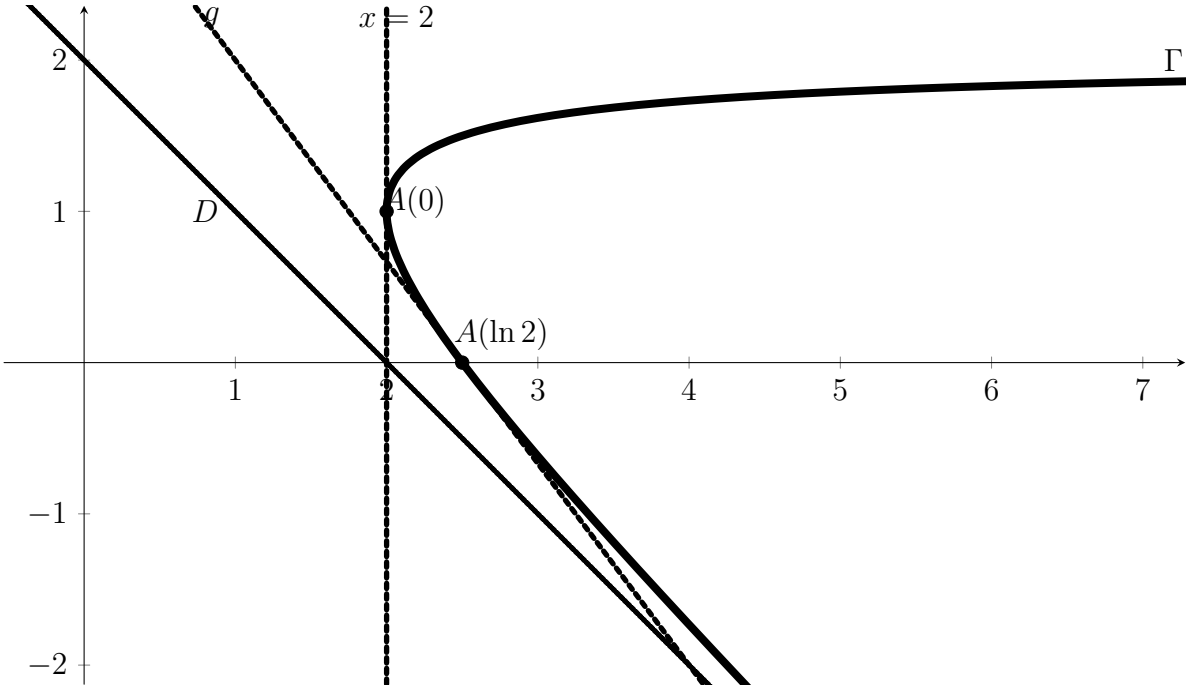
5. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = -\infty$, on suit la méthode classique
   - $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t + e^{-t}}{2 - e^t} = -1$
   - $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) + x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 2 + e^{-t} = 2$

   Conclusion : $\boxed{\text{la droite } D \text{ d'équation } y = -x + 2 \text{ est asymptote(oblique) à } \Gamma}$

   Pour étudier la position relative de Γ et de D, on étudie le signe de $y(t) + x(t) - 2$.

   Comme $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) + x(t) - 2 = e^{-t} > 0$,
   on en déduit que $\boxed{\text{la courbe est toujours au-dessus de cette asymptote } D}$

6.



7. Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $A(t) = (x(t),y(t))$ et $B(t) = (x(t),2 - x(t))$.
Ainsi

$$A(t)B(t) = \sqrt{(x(t) - x(t))^2 + (y(t) + x(t) - 2)^2} = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}$$

8. - On a pour n entier $d(n) = e^{-n} = (e^{-1})^n$.
Ainsi la série $\sum d(n)$ est une série géométrique convergente car de raison $q = e^{-1}$ avec $|q| < 1$.
Et l'on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-1})^n = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}$$
- On a pour tout n entier $d(\ln n) = \dfrac{1}{n}$.
La série $\sum (\ln n)$ est donc une série de Riemann divergente