Endomorphismes Cycliques

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n

- On note id l'endomorphisme identité de E
- Soient f et g deux endomorphismes de E, on note $f \circ g$ la composée de f et de g
- On convient que $f^0 = id$ et que $f^1 = f$
  et pour tout k entier supérieur ou égal à 2, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$
- Soit f un endomorphisme de E.
  On dit que f est cyclique lorsqu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ soit une base de E
  Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}))$ soit une base de E.
  De même, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ de E tel que $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}))$ soit une base de E.

I. Etude d'exemples

A. Dans cette section,

on note $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (4x-6y,x-y) \end{array}}$.

1) Ecrire la matrice de α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note A cette matrice.
2) On choisit $\vec{a} = (2,3)$
   Calculer $\alpha(\vec{a})$ et montrer que α est cyclique.
3) Déterminer $\alpha^2(\vec{a})$ puis déterminer deux réels x et y tels que $\alpha^2(\vec{a}) = x\vec{a} + y\alpha(\vec{a})$
4) Ecrire la matrice A' de α dans la base $(\vec{a},\alpha(\vec{a}))$
5) Montrer que le réel 2 est une valeur propre de α
6) Déterminer un vecteur $\vec{b}$ non nul de $\mathbb{R}^2$ tel que $(\vec{b},\alpha(\vec{b}))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$

B. Dans cette section,

on note $E = \mathbb{R}^3$ et considère β l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice B ci-dessous, c'est à dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de β
2) Montrer que β est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$
3) Déterminer les éléments propres de β

4) Après avoir rappelé avec soin le théorème utilisé, justifier que β est diagonalisable puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β est du type $D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où p et q sont des réels que l'on précisera

5) Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2id_E = 0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul.

6) En déduire que β n'est pas cyclique

C. Dans cette section,
on note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier supérieure ou égal à 2
On considère l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{ccc} \gamma : \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}}$

1) Déterminer $\gamma(X^{n-1})$ et plus généralement $\gamma^k(X^{n-1})$ pour tout entier $k \in [\![1,n-1]\!]$. (On effectuera un raisonnement par récurrence sur k)

2) En déduire que γ est un endomorphisme cyclique.

D. Dans cette section,
on note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier supérieure ou égal à 2
On considère l'application $\boxed{\begin{array}{ccc} \delta : \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P = P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}}$

1) Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ un polynôme non constant, montrer que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$

3) Déterminer $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$

4) On considère la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ définie par $P_0 = P_0(X) = 1$ et $\forall j \in [\![1,n-1]\!], P_j = P_j(X) = \dfrac{1}{j!}X(X-1)(X-2)\ldots(X-j+1) = \dfrac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k)$

a) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

b) Pour $j \in [\![1,n-1]\!]$ déterminer $\delta(P_j)$ en fonction de P_{j-1}

c) Soient $i \geqslant 1$ un entier et $j \in [\![1,n-1]\!]$.
Déterminer $\delta^i(P_j)$

d) En déduire que δ est cyclique

II. **Des résultats plus théoriques**

On considère E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.
On suppose que f est cyclique
et on note $\vec{a}$ un vecteur pour lequel $(\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}), \ldots, f^{n-1}(\vec{a}))$ est une base de E.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = n-1$ ou n

2) On suppose dans cette question seulement que $f^n(\vec{a}) = \vec{a}$

a) Ecrire une matrice associée à f

b) Justifier que f est diagonalisable.

3) On suppose dans cette question seulement que $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$

a) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?

b) Montrer que $f^n = 0$

c) Ecrire une matrice associée à f

d) f est-il diagonalisable? Justifier

4) Dans cette section, on retourne au cas général

a) Justifier qu'il existe un unique $(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$f^n(\vec{a}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i(\vec{a}) = \mu_0\vec{a} + \mu_1 f(\vec{a}) + \mu_2 f^2(\vec{a}) + \cdots + \mu_{n-1} f^{n-1}(\vec{a})$$

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ on a $f^n(f^k(\vec{a})) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i(f^k(\vec{a}))$

c) En déduire que $f^n = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i$

d) Montrer que la famille d'endomorphismes $(id_E,f,f^2,\ldots,f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$

e) Donner la plus grande valeur de p tel que $(id_E,f,f^2,\ldots,f^p)$ soit une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

$(id_E,f,f^2,\ldots,f^p)$ est-elle dans ce cas une base de $\mathcal{L}(E)$?

CORRECTION

I. A. 1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\boxed{\alpha(\vec{a}) = (-10, -1)}$

Pour montrer que f est cyclique, il suffit de vérifier que $(\vec{a},\alpha(\vec{a}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour ceci, on va calculer le déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{a},\alpha(\vec{a}))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{(\vec{a},\alpha(\vec{a})) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2, \text{ et } \alpha \text{ est cyclique}}$

3) $\alpha^2(\vec{a}) = \alpha(-10, -1) = (-34, -9)$

On a les équivalences

$$\alpha^2(\vec{a}) = x\vec{a} + y\alpha(\vec{a}) \iff (-34, -9) = x(2,3) + y(-10, -1) \iff \begin{cases} 2x - 10y &= -34 \\ 3x - y &= -9 \end{cases}$$

La résolution donne $\boxed{x = -2 \text{ et } y = 3}$

4) $\boxed{A' = \mathrm{Mat}_{(\vec{a},\alpha(\vec{a}))}(\alpha) = \mathrm{Mat}_{(\vec{a},\alpha(\vec{a}))}(\alpha(\vec{a}),\alpha^2(\vec{a})) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ d'après la question ci-dessus

5) $\chi_\alpha(X) = \det(Xid_E - f) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-4 & 6 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$

$\boxed{\text{Le spectre de } \alpha \text{ est } \{1,2\}}$, donc 2 est bien une valeur propre de α

6) Soit $\vec{b}$ un vecteur propre de α associé la la valeur propre 2.
On a donc $\vec{b} \neq \vec{0}$ et $(\vec{b},\alpha(\vec{b})) = (\vec{b},2\vec{b})$ qui est une famille liée, donc n'est pas une base de E!
Un calcul classique donne $E_2(\alpha) = \mathrm{vect}((3,1))$, donc $\boxed{\vec{b} = (3,1)}$ répond à la question posée

B. 1) $\chi_\beta(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-4 & 6 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1)$

2) Il suffit de vérfier que $\det\beta \neq 0$
On a $\chi_\beta(0) = \det(0.id - \beta) = \det(-\beta) = (-1)^3\det(\beta) = -\det(\beta)$
D'où $\det(\beta) = -\chi_\beta(0) = -(-4) = 4 \neq 0$

$\boxed{\beta \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$

3) • Les racines de χ_β étant les valeurs propres de β, on a ${}^(\beta) = \{1,2\}$,
plus précisément $\boxed{2 \text{ est valeur propre double et } 1 \text{ est valeur propre simple}}$

- Déterminons $E_2(\beta)$
  On résout $\beta(x,y,z) = 2(x,y,z)$ qui équivaut à

$$B.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}0 & = 0\\ 2y-6z & = 0 \iff y = 3z\\ y-3z & 0\end{cases}$$

  D'où

$$\boxed{E_2(\beta) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 3z\} = \{(x,3z,z) | (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,0,0),(0,3,1))}$$

  Comme les deux vecteurs ci-dessus ne sont pas colinéaires,
  on peut affirmer que $\boxed{\dim E_2(\beta) = 2}$

- Par théorème, comme 1 est valeur propre simple, on peut déjà affirmer que $\boxed{\dim E_1(\beta) = 1}$
- Par un calcul classique, on trouve $\boxed{E_1(\beta) = \text{vect}((0,2,1))}$

4) • **Théorème de la CNS de diagonalisabilité**
  Soit f un endomorphisme de E. On note $sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ son spectre.

  Alors, il y a équivalence entre :

  i.) f est diagonalisable
  ii.) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute vp λ de f, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
  iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$
  iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$ *càd*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \exists ! \, (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p} \,|\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p}$$

- Comme $\dim E_2(\beta) + \dim E_1(\beta) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,
  on peut affirmer que $\boxed{\beta \text{ est diagonalisable}}$
- En concaténant une base de $E_2(\beta)$ et une base de $E_1(\beta)$ on obtiendra une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β sera $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

  $\boxed{((1,0,0),(0,3,1),(0,2,1)) \text{ est un exemple de telle base}}$

5) Le calcul donne $D^2 - 3D + 2I_3 = 0$ c'est à dire que dans une base on a $Mat(\beta^2 - 3\beta + 2id_E) = 0$,
  on peut affirmer que $\boxed{\beta^2 - 3\beta + 2id_E = 0}$

6) Soit $\vec{a}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
  La famille $(\vec{a}, \beta(\vec{a}), \beta^2(\vec{a}))$ est toujours une famille liée! En effet, $\beta^2(\vec{a}) - 3\beta(\vec{a}) + 2\vec{a} = \vec{0}$ d'après la question ci-dessus.

  Il n'existe donc pas de vecteur $\vec{a} \in E$ tel que soit une base de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\beta \text{ n'est pas cyclique!}}$

C. 1) • $\gamma(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$

• Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ notons $\mathcal{P}_k$ la proposition

$$\gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)\dots(n-k)X^{n-k-1} = \prod_{i=1}^{k}(n-i).X^{n-k-1}$$

– **Initialisation:** on a vérifié au début de la question que $\gamma(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$

– **Hérédité:** on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \geqslant 1$ fixé quelconque.
On va montrer qu'elle est encore vraie au rang $k+1$.
On a

$$\gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)\dots(n-k)X^{n-k-1}$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma^{k+1}(X^{n-1}) &= \gamma(\gamma^k(X^{n-1}))\\ &= \gamma((n-1)\dots(n-k)X^{n-k-1})\\ &= (n-1)\dots(n-k)\gamma(X^{n-k-1})\\ &= (n-1)\dots(n-k)(n-k-1)X^{n-k-2}\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire $\gamma^{k+1}(X^{n-1}) = \prod_{i=1}^{k+1}(n-i).X^{n-(k+1)-1}$
On vient de justifier que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie

– **Conclusion:** on a montré que

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n-1]\!], \gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)\dots(n-k)X^{n-k-1} = \prod_{i=1}^{k}(n-i).X^{n-k-1}}$$

remarque: on pouvait aussi écrire $\gamma^k(X^{n-1}) = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}.X^{n-k-1}$

2) On remarque que la famille $\mathcal{F} = (X^{n-1},\gamma(X^{n-1}),\gamma^2(X^{n-1}),\dots,\gamma^{n-1}(X^{n-1}))$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, car de degrés respectifs $n-1,n-2,\dots,1,0$.
On peut donc affirmer que cette famille est libre.

Comme de plus $card(\mathcal{F}) = n$ et que $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, on peut affirmer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: ce qui prouve que $\boxed{\gamma \text{ est cyclique}}$

D. 1) • δ est bien une application linéaire car pour tout $(P_1,P_2,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\delta(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X)\\ &= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - \lambda P_1(X) - P_2(X)\\ &= \lambda(P_1(X+1) - P_1(X)) + P_2(X+1) - P_2(X)\\ &= \lambda\delta(P_1) + \delta(P_2)\end{aligned}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
(l'énoncé nous précise déjà que $\delta(P) \in \mathbb{R}[X]$, il reste donc simplement à montrer que $\deg(\delta - P)) \leqslant n-1$)

  On a $\deg(P) \leqslant n-1$.
  On sait que $\deg(P(X+1) = \deg P(X)$, et donc $\deg(P(X+1)) \leqslant n-1$.
  et ainsi

$$\deg(\delta(P)) = \deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X))) \leqslant n-1$$

  On a bien montré que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

  remarque: on a utilisé les propriétés de cours sur les degrés

  i) $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$
  ii) $\deg(P+Q) \leqslant \deg(P) + \deg(Q)$

- Conclusion : $\boxed{\delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

2) - Pour tout $k \geqslant 1$ fixé, on a d'après la formule du binôme de Newton

$$\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \quad \text{qui est un polynome de degré } k-1$$

  et on a bien sûr

$$\delta(1) = 0$$

- On considère $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$ un polynôme (non constant) de degré d.(ce qui implique que $a_d \neq 0$)

$$\delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \delta(X^k) = a_d \underbrace{\delta(X^d)}_{deg=d-1} + a_{d-1} \underbrace{\delta(X^{d-1})}_{deg=d-2} + \cdots + a_1 \underbrace{\delta(X)}_{deg=0} + a_0 \underbrace{\delta(1)}_{=0}$$

  Comme $a_d \neq 0$ ceci prouve que $\deg \delta(P) = d-1 = \deg(P) - 1$

3) - **Déterminons** $\ker(\delta)$
  D'après ce que l'on vient de prouver, si $\deg(P) \geqslant 1$ alors $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$ et ainsi on sait que $\delta(P) \neq 0$
  Ceci prouve que seuls les polynômes constants peuvent ètre a priori dans le noyau.
  Or si P est un polynôme constant, il est clair que $P(X+1) = P(X)$ et donc que P est dans le noyau.
  $\boxed{\text{Conclusion: } \ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X] = \text{vect}(1)}$
- **Déterminons** $\text{Im}(\delta)$
  Le théorème du rang appliqué à f donne $\dim(\text{Im } f) = \dim E - 1 = n-1$
  D'après la question 2, on sait que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$
  Comme ces deux espaces ont mème dimension, on peut affirmer qu'ils sont égaux!
  $\boxed{\text{Conclusion: } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$

4) a) Notons $\mathcal{F} = (P_0,P_1,\ldots,P_{n-1})$.
$\mathcal{F}$ est une famille de polynômes de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ échelonnée en degré, c'est donc une famille libre.
Comme de plus $card(\mathcal{F}) = n \dim E$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est donc une base de } E}$
(mème argument qu'en C2)

b) Soit $j \geqslant 1$

- $P_j(X+1) = \dfrac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X+1-k) = \dfrac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-(k-1)) = \dfrac{1}{j!}\prod_{k=-1}^{j-2}(X-k)$
- ainsi en mettant en facteur les facteurs communs

$$\begin{aligned}
\delta(P_j) &= P_j(X+1) - P_j(X) \\
&= \frac{1}{j!}\left(\prod_{k=-1}^{j-2}(X-k) - \prod_{k=0}^{j-1}(X-k)\right) \\
&= \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-2}(X-k).\left(\underbrace{(X-(-1)) - (X-(j-1))}_{=j}\right) \\
&= \frac{1}{(j-1)!}\prod_{k=0}^{j-2}(X-k) \\
&= P_{j-1}
\end{aligned}$$

remarque: $\boxed{\delta(P_0) = 0}$

c) Formellement, appliquer δ à des P_j revient à abaisser de un son indice, sauf pour P_0 qui lui est envoyé sur 0.
On a donc $\boxed{\delta_i(P_j) = \begin{cases} P_{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

d) La famille $(P_{n-1},\delta(P_{n-1}),\delta^2(P_{n-1}),\ldots,\delta^{n-1}(P_{n-1}) = (P_{n-1},P_{n-2},\ldots,P_0)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui prouve que $\boxed{\delta \text{ est cyclique}}$

II. A. 1) Je propose deux solutions :

i) première idée:
On sait que:
l'image d'une base de E par f est une famille génératrice de $f(E) = \mathrm{Im}(f)$,
c'est donc en particulier le cas pour l'image par f de la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$.
Ainsi

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a})),f^n(\vec{a}))$$

On sait que $(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est une famille libre car c'est un sous-famille de la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$, on a donc déjà

$$\dim \mathrm{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a})) = n-1$$

On en déduit qu'en ajoutant un vecteur à cette famille

$$\dim \mathrm{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}),f^n(\vec{a})) = n-1 \text{ ou } n$$

Au final on a bien $\boxed{\mathrm{rg}(f) = n \text{ ou } n-1}$

ii) seconde idée : on utilise une matrice.

On écrit la matrice de f dans la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))$.

C'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$

Les $n-1$ premières colonnes formant clairement une famille libre, on en déduit que $\mathrm{rg}(f) \geqslant n-1$.
Comme $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$, on a bien $\boxed{\mathrm{rg}(f) = n \text{ ou } n-1}$

2) a) si $f^n(\vec{a}) = \vec{a}$ la matrice de f dans la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) En développant par rapport à la première ligne on obtient

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_n = X^n + (-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = X^n - 1$$

Ainsi f possède n valeurs propres distinctes, à savoir les racines n-ièmes de l'unité!

Ceci prouve que f vérifie la condition suffisante de diagonalisabilité, à savoir posséder $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.

Conclusion : $\boxed{f \text{ diagonalisable (et chaque sep est de dimension un)}}$

3) a) • Comme $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$ (car c'est un vecteur qui appartien à une base), et que $f(f^{n-1}(\vec{a})) = \vec{0}$, on sait déjà que $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul, et donc $\dim\ker(f) \geqslant 1$.

• Le théorème du rang appliqué à f donne $\mathrm{rg}(f) + \dim\ker(f) = n$
Mais comme on sait aussi que $\dim\ker(f) \geqslant 1$ et $\mathrm{rg}(f) \geqslant n-1$,
on en déduit que forcément $\dim\ker(f) = 1$ et $\mathrm{rg}(f) = n-1$

• Maintenant que l'on sait que $\ker(f)$ est une droite vectorielle et que $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$ appartient à ce noyau, on peut écrire que $\boxed{\ker(f) = \mathrm{vect}(f^{n-1}(\vec{a}))}$

• L'image de la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}))$ par f est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)f$, ainsi

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\dots,f^{n-1}(\vec{a}),f^n(\vec{a}))$$

mais comme $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$, on peut écrire

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(\vec{a}), f^2(\vec{a}), \ldots, f^{n-1}(\vec{a}))$$

Or cette famille génératrice possède $n-1$ éléments et $\dim \mathrm{Im}\, f = n-1$, par théorème c'en est donc une base!

$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}\, f \text{ est } (f(\vec{a}), f^2(\vec{a}), \ldots, f^{n-1}(\vec{a}))}$

- NON, car ses deux espaces ne sont pas en somme directe:

  $f^{n-1}(\vec{a}) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ avec $f^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$

b) On sait que

$\boxed{f^n \text{ est l'endomorphisme nul ssi } f^n \text{ envoie tous les éléments d'une base de } E \text{ sur } \vec{0}}$

Considérons la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n) = (\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$

On a pour tout $i \in [\![1,n]\!], \vec{e}_i = f^{i-1}(\vec{a})$ et donc

$$f^n(\vec{e}_i) = f^n(f^{i-1}(\vec{a})) = f^{n+i-1}(\vec{a}) = f^{i-1}(f^n(\vec{a})) = f^{i-1}(\vec{0}) = \vec{0}$$

ceci prouve que $f^n = 0$

c) si $f^n(\vec{a}) = \vec{0}$ la matrice de f dans la base $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$ est $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) Un calcul simple donne $\chi_f(X) = X^n$. Ainsi $\boxed{f \text{ possède une unique vp } 0 \text{ et } m(0) = n}$

Le sous-espace propre associé à 0 n'est rien d'autre que $\ker(f)$, et l'on a déjà vu que $\dim \ker f = 1 \neq n$.

D'après la cns de diagonalisabilité rappelée plus haut,
on peut affirmer que $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4) a) Tout vecteur de E se décompose de manière unique sur une base.
C'est donc en particulier le cas pour le vecteur $f^n(\vec{a})$ et la base $(\vec{a},f(\vec{a}),\ldots,f^{n-1}(\vec{a}))$

b) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.
On sait que $f^n(\vec{a}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i(\vec{a})$
On va composer (à gauche) chaque membre par f^k et utiliser l'égalité

$$f^k \circ f^i = f^{k+i} = f^{i+k} = f^i \circ f^k$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} f^n(f^k(\vec{a})) &= f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i(\vec{a})\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^k \circ f^i(\vec{a}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^{k+i}(\vec{a}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^{i+k}(\vec{a}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i(f^k(\vec{a})) \end{aligned}$$

c) Les endomorphismes f^n et $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f^i$ sont égaux sur une base donc par théorème ces endomorphismes sont égaux.

d) Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\lambda_0 id + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$
Ceci signifie que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ on a

$$\lambda_0 \vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \lambda_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = 0$$

C'est en particulier vrai pour $\vec{x} = \vec{a}$

$$\lambda_0 \vec{a} + \lambda_1 f(\vec{a}) + \lambda_2 f^2(\vec{a}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{a}) = 0$$

Or on sait que la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{n-1}(\vec{a}))$ est libre!
Ce qui nous permet d'affirmer que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ (cqfd!)

e) • D'après la question précédente, on peut dire que $p \geqslant n-1$.
Grâce à la question c) on peut affirmer que $(id, f, f^2, \ldots, f^n)$ est une famille liée.

On en conclut que $p = n-1$

• On a $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ or la famille $(id, f, f^2, \ldots, f^p)$ étant de cardinal $p+1 = n < n^2$ (car $n \geqslant 2$), elle ne peut pas être un base de $\mathcal{L}(E)$