PT 2020 B

Deuxième partie

3(c)

- Les fonctions appartenant à Φ_1 sont de classe C^∞, le théorème de Schwarz pourra donc s'appliquer.
- Soit $f \in G$.
  On a
  $$\Phi_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$
  et donc
  $$\Phi_1(\Phi_1(f)) = \frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial z}$$
  avec
  $$\frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$
  $$\frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$
  $$\frac{\partial(\Phi_1(f))}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
- Les vecteurs propres de Φ_1^2 sont tous associés à la valeur propre -1, ils vérifents donc l'égalité $\Phi_1^2(f) = -f$ càd $\Phi_1^2(f) + f = 0$.
  C'est à dire:
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + f = 0$$
  On peut remarquer que si $f \in G$ de nombreuses dérivées sont nulles, et on obtient l'équation plus simple
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + f = 0$$

3(d)
Nous allons pouvoir utiliser la matrice précédente.

Soit $f \in G$

Il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6, f = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i$.

La traduction matricielle dans la base B, donne

$$\Phi_1^2(f) = -f \iff A^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} \iff (A^2 + I_6) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = 0$$

On aboutit alors à un système linéaire

$$(A^2 + I_6) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & = 0 \\ -2\lambda_3 - 2\lambda_5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_6 & = -\lambda_4 \\ \lambda_5 & = -\lambda_3 \end{cases}$$

Conclusion: les solutions cherchées sont

$$f = \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 + \lambda_3.(f_3 - f_5) + \lambda_4.(f_4 - f_6) \qquad \text{avec } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^3$$

Troisième partie

- $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
- S est la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f \neq 0$

1. (a) **question de cours:** On dit que le point M_0 de S est un point régulier de S lorsque $\nabla_{M_0} f \neq \vec{0}$.

   L'équation du plan tangent est alors donnée par le produit scalaire $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \nabla_{M_0} f = 0$.

   On obtient

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).(z - z_0) = 0$$

   (b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ -2z \end{pmatrix}$ et $\nabla_{M_0}(f) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   $\boxed{\text{L'équation du plan est } x - 2y - z - 2 = 0}$

   La fonction f ne répond pas au problème car le vecteur normal en M_0 est ici $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas orthogonal à $\vec{u}$

2. (a) Soit $\alpha > 0$.
   On considère $F_1 : (x,y,z) \mapsto (y - z)^2 - \alpha$.
   - Soit M_0 un point régulier de S.

     On a $\nabla_{M_0} F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y_0 - z_0) \\ 2(z_0 - y_0) \end{pmatrix}$.

     Et ainsi $\nabla_{M_0} F_1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y_0 - z_0) \\ 2(z_0 - y_0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Conclusion: $\boxed{F_1 \text{ répond au problème posé(elle est bien non nulle)}}$

- On a

$$F_1(x,y,z = 0 \Longleftrightarrow (y-z)^2 = \alpha \Longleftrightarrow y - z = \sqrt{\alpha} \text{ ou } y - z = -\sqrt{\alpha}$$

$\boxed{\text{La surface est donc la réunion de deux plans parallèles (distincts car } \alpha > 0}$

(b) On considère $f : (x,y,z) \mapsto g(x-y,x-z)$.
(On remarque déjà que f n'est pas la fonction nulle car g ne l'est pas)

Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de S.
On a

$$\nabla_{M_0}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 g(x_0-y_0,x_0-z_0) + \partial_2 g(x_0-y_0,x_0-z_0) \\ -\partial_1 g(x_0-y_0,x_0-z_0) \\ -\partial_1 g(x_0-y_0,x_0-z_0) \end{pmatrix}$$

On a donc $\nabla_{M_0}(f) \cdot \vec{u} = 0$.

La fonction f ainsi définie répond au problème posé

(c) La fonction F_1 est bien de la forme précédente.
En posant $g : (X,Y) \mapsto (Y-X)^2 - \alpha$, on a en effet:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, g(x-y,x-z) = ((x-z)-(x-y))^2 - \alpha = (y-z)^2 - \alpha = f(x,y,z)$$

3. (a) La surface S est une surface réglée et l'on sait que le plan tangent en un point régulier M_0 contient la génératrice qui passe par ce point.
Ici, les génératrices de S sont des droites qui sont dirigées par le vecteur $\vec{u}$: le vecteur normal au plan tangent est donc nécessairement orthogonal à $\vec{u}$!

(b) *Je propose deux solutions:*

i. **En déterminant déjà la représentation paramétrique puis en éliminant le paramètre**

- une paramétrisation de Γ est $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (P(t) = \cos t, \sin t, 0)$
- une paramétrisation de la droite qui passe par $P(t)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda \longmapsto P(t) + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos t + \lambda \\ \sin t + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$
- Une représentation paramétrique de S est donc

$$\begin{cases} x &= \cos t + \lambda \\ y &= \sin t + \lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \qquad \text{avec } (\lambda,t) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$$

Sachant que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on trouve par élimination du paramètre

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$$

- On étudie la réciproque.

Pour cela on note S' la surface d'équation $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$.

Soit $M(x,y,z) \in S'$.
On sait donc que $x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$.

Par théorème, on peut affirmer qu'il existe $t \in [0,2\pi]$ tel que $\begin{cases} x-z &= \cos t \\ y-z &= \sin t \end{cases}$.

Posons alors $\lambda = z$.

On a montré qu'il existe $(t,\lambda) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x &= \cos t + \lambda \\ y &= \sin t + \lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$.

Ce qui prouve que $M \in S$.

On a prouvé donc au final que $S = S'$.

Conclusion $\boxed{S \text{ a pour équation cartésienne } x-z)^2 + (y-z)^2 = 1}$

ii. **Sans passer par la représentation paramétrique.**
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
On a les équivalences suivantes

$$M(x,y,z) \in S \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists M_0 \in \Gamma, M = M_0 + \lambda.\vec{u}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= x_0 + \lambda \\ y &= y_0 + \lambda \\ z &= 0 + \lambda \\ & x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x_0 &= x - \lambda \\ y_0 &= y - \lambda \\ \lambda &= z \\ & (x-z)^2 + (y-z)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff (x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$$

(c) $S \cap \Pi_\alpha$ est caractérisé par le système

$$\begin{cases} x-z)^2 + (y-z)^2 &= 1 \\ z &= \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 &= 1 \\ z &= \alpha \end{cases}$$

On reconnait l'équation du $\boxed{\text{cercle tracé dans le plan } z = \alpha, \text{ de centre } (\alpha,\alpha,\alpha) \text{ et de rayon } 1}$

(d) Non, elle ne permet pas de conclure que c'est une surface de révolution. On vient de prouver que S est une surface réunion de cercles tracés dans des plans parallèles... mais non centrés sur un axe perpendiculaires à ces plans!. En effet, les centres des cercles sont sur la droite qui passe par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ (car de coordonnées (α,α,α)) alors que les plans ont pour vecteur orthogonal $\vec{k}$

(e) i. Par construction, P est la matrice de passage d'une base orthonormée directe vers une base orthonormée directe, on sait donc que c'est une matrice orthogonale positive (de $SO_3(\mathbb{R})$).
On en déduit donc que f est une rotation vectorielle

ii. Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans le nouveau repère.
La formule de changement de base pour les vecteurs donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

En remplaçant ces expressions dans le système $\begin{cases} (x-z)^2 + (y-z)^2 & = 1 \\ x+y+z & = 0 \end{cases}$
on trouve bien $\begin{cases} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 & = 2 \\ Z & = 0 \end{cases}$ après calculs.

iii. Il s'agit d'une conique à réduire avec un terme croisé en XY mais sans partie linéaire.
On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.

- Les valeurs propres sont 2 et 6, car $\chi_A = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$
- Une recherche classique de sep donne $E_2 = \text{vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix})$
- Comme la matrice est symétrique réelle, on sait que les sep sont orthogonaux 2 à 2, on a donc $E_6 = \text{vect}(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix})$
- Notons $\vec{\epsilon}_1 = \dfrac{-\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_2}{2}$ et $\vec{\epsilon}_2 = \dfrac{\sqrt{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2}$.
  Notons (X',Y') les coordonnées dans le repère $(O,\vec{\epsilon}_1,\vec{\epsilon}_2)$.
  On sait que

$$5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda_1 X_1'^2 + \lambda_2 Y'^2$$

  Ainsi dans ce nouveau repère l'équation est $2X'^2 + 6Y'^2 = 2$ c'est à dire

$$\frac{X'^2}{1^2} + \frac{Y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

  On reconnait une ellipse de demi grand axe $a = 1$ et de demi petit axe $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

iv. Le dessin ne pose aucun problème