Problème d'analyse: Wallis et Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

Partie I : calcul et équivalent des intégrales de Wallis

1. Calcul de W_n
   (a) Justifier que pour tout $n \geqslant 0$ on a $W_n > 0$
   (b) Donner les valeurs de W_0 et de W_1
   (c) A l'aide d'une intégration par parties dans W_{n+1} , en intégrant $\sin(t)$, montrer que pour $n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$
   (d) En déduire avec soin que pour $p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}\dfrac{\pi}{2}$
2. Equivalent de W_n quand n tend vers l'infini
   (a) Montrer que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geq 1}$ est constante et déterminer cette constante
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, puis en déduire que pour n au voisinage de $+\infty, W_n \sim W_{n-1}$
   (c) En déduire, enfin, que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Partie II : démonstration de la formule de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$

1. Déterminer un réel a tel que pour n au voisinage de $+\infty$, $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{a}{n^2}$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, puis que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente.
3. En déduire avec soin qu'il existe un réel L tel que pour n au voisinage de $+\infty$, $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^L$
4. En utilisant l'expression de W_{2n} obtenue au I1), écrire à l'aide de e^L, un équivalent de W_{2n}
5. Enfin, en utilisant l'équivalent de W_n obtenu au I2), déterminer la valeur de e^L et en déduire alors que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

Partie III: d'autres écritures des intégrales de Wallis

Cette partie est indépendantes des deux premières

1. A l'aide d'un changement de variable judicieux, montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ pour tout $n \geqslant 0$
2. En utilisant un changement de variable utilisant la fonction arcsin montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}du$ pour tout $n \geqslant 0$

CORRECTION

PARTIE I

1. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est *continue, positive et non identiquement nulle* sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,
   donc par théorème on peut affirmer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt > 0$
   On a bien $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n > 0}$

2. (a) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

   (b) Pour $n \geqslant 1$, on considère $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t).\sin(t)dt$
   Comme le suggère l'énoncé, nous allons réaliser une intégration par parties.
   Les fonctions $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \sin^n(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,
   et l'on a pour tout t dans cet intervalle $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = n\cos(t)\sin^{n-1}(t)$.
   D'où

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt\right) \\
&= n(W_{n-1} - W_{n+1})
\end{aligned}$$

   Ainsi $W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1}) = nW_{n-1} - nW_{n+1}$ càd $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$

   Conclusion: $\boxed{\forall n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}}$

   (c) La chose la plus simple et la plus convaincante est de réaliser une démonstration par récurrence.
   Pour tout $p \geqslant 0$ on note la proposition $\mathcal{P}_p$: " $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}.\dfrac{\pi}{2}$"

   - **initialisation:** Pour $p = 0$, on a $\dfrac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = W_{2\times 0}$ car $0! = 1$
   - **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_p$ vrai pour un entier $p \geqslant 0$ fixé quelconque, et on va montrer que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
     D'après la formule de récurrence établie en (c), on sait que $W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}W_{2p}$
     et d'après l'hypothèse de récurrence on sait que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}.\dfrac{\pi}{2}$
     donc

$$W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}.\frac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)!}{(2p+2)(2^p(p!))^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{(2p+2)^2(2^p(p!))^2}\frac{\pi}{2}$$

     Or

$$(2p+2)^2(2^p(p!))^2 = [2(p+1)]^2(2^p(p!))^2 = [2^{p+1}.(p+1)!]^2$$

Et au final cela donne

$$W_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!))^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(p+1)!}{(2^{p+1}(p+1)!))^2}\frac{\pi}{2}$$

La proposition $\mathcal{P}_{p+1}$ est donc vraie

- conlusion: par le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall p \geqslant 0,\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p(p!)]^2}\frac{\pi}{2}}$$

3. (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
D'après la question 1)c), on a $nW_{n-1} = (n+1)W_{n+1}$ donc en multipliant chaque membre par W_n cela donne $nW_{n-1}W_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

On a montré que $\forall n \geqslant 1, nW_{n-1}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$,
càd que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
Le premier terme de cette suite vaut $1.W_0.W_1 = 1.\frac{\pi}{2}.1$

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1} \text{ est la suite constante } \frac{\pi}{2}}$

(b) Montrer la double inégalité demandée revient à montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Soit $n \geqslant 0$.
Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $1 \geqslant \sin(t) \geqslant 0$, et donc $\sin^n(t) \geqslant \sin^{n+1}(t)$
Par croissance l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt$$

ce qui prouve que $W_n \geq W_{n+1}$.

On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n \geqslant W_{n+1}}$ c'est à dire que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}}$$

En divisant par $W_{n-1} > 0$, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\quad \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$
c'est à dire

$$\forall n \geqslant 1, \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

D'après le théorème de convergence par encadrement(ex des gendarmes),
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$ ce qui prouve que

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}}$$

(c) D'après la question 2)a), on a $\frac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n$ pour tout $n \geqslant 1$,
d'après la question ci-dessus on obtient $\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$ soit encore $\frac{\pi}{2n} \underset{+\infty}{\sim} W_n^2$
Comme $W_n > 0$(précision INDISPENSABLE) d'après la question 1a),
on en déduit bien que

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Partie II

1. Soit $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}} = \frac{n^n e\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+\frac{1}{2}}.e$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) &= (n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+1\\ &= -(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+1\\ &= -(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})+1 = -(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))+1\end{aligned}$$

(car on a $\lim \frac{1}{n} = 0$ *et on sait que* $\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$*)*
En développant et en gardant bien le bon ordre, cela donne

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = -1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Pour reprendre les notations de l'énoncé, on trouve $\boxed{a = \frac{-1}{12}}$

2. *Il s'agit d'utiliser la règle des équivalents puis le théorème lien suite-série.*

- On a $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln u_{n+1} - \ln u_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.
Comme $-\frac{1}{12n^2}$ est de signe stable et que la série de terme général $-\frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente, on peut affirmer d'après la règle des équivalents que

$$\boxed{\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n \text{ est une série convergente}}$$

- Le théorème lien entre suite et série nous permet d'affirmer que:

$$\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n \text{ est une } \underline{\text{série}} \text{ convergente ssi la } \underline{\text{suite}} \ (\ln(u_n)) \text{ est convergente}$$

(on rappelle que ce théorème formalise le procédé télescopique: la somme partielle d'indice N *de la série indiquée est en effet égal à* $\sum_{n=1}^{N} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$*)*

3. Notons L la limite (finie) de la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$: on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = L$.

   Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en L, le théorème de composition des limites permet d'affirmer que

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp(\ln(u_n)) = e^L$$

   Comme $e^L \neq 0$, on peut encore écrire $u_n \sim e^L$, c'est a dire $\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \sim e^L$
   On a bien prouvé que

   $$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^L}$$

4. Donc d'après I1),

   $$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n(n!))^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi(2n)}e^L}{(2^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^L)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}e^L}{2\pi n e^{2L}}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2e^L\sqrt{n}}$$

5. D'après I2)(d), on a $W_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$ et donc $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\times 2n}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2e^L\sqrt{n}}$
   ce qui donne : $\sqrt{4n} \sim 2e^L\sqrt{n}$ soit encore $1 \sim e^L$ (!)
   Or 1 et e^L étant des constantes, dire qu'elles sont équivalentes signifie qu'elles sont égales!

   On a prouvé que $\boxed{e^L = 1}$ et donc

   $$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

Partie III

1. Le changement de variable affine $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$ fournit le résultat
2. Pour le deuxième changement de variable il faut faire plus attention car la fonction arcsin n'est pas C^1 sur le segment [0,1] mais sur l'intervalle semi-ouvert [0,1[.

   On peut alors penser à utiliser le théorème du changement de variable pour les intégrales généralisées.
   La fonction $\varphi : u \mapsto \arcsin u = t$ réalise est C^1 et strictement croissante sur [0,1[, et réalise une bijection de [0,1[sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$. Par théorème, on peut donc affirmer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.
   Comme l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$ est convergente (puisque ce n'est pas une intégrale généralisée) on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}du$ est une intégrale convergente et que $W_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}du$
   remarque: on "trouve" l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}du$ *car* $t = \arcsin u$ *donc* $dt = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$