Problème d'analyse: Wallis et série entière

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

Partie I : équivalent des intégrales de Wallis

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 0$ on a $W_n > 0$
2. Donner les valeurs de W_0 et de W_1
3. A l'aide d'une intégration par parties dans W_{n+1} , en intégrant $\sin(t)$, montrer que pour $n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$
4. Montrer que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geq 1}$ est constante et déterminer cette constante
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1, W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, puis en déduire que pour n au voisinage de $+\infty, W_n \sim W_{n-1}$
6. En déduire, enfin, que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Partie II: étude d'une série entière

Le but de cette partie est de déterminer la nature et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} W_{2n}x^n$ pour x réel

1. Nature.
   (a) Déterminer le rayon R de cette série entière
   (b) Déterminer la nature de cette série pour $x = 1$
   (c) Justifier que $\sum_{n\geqslant 0} W_{2n}x^n$ converge pour $x = -1$

   Jusqu'à la fin du problème, x désigne un réel fixé de $]-1,1[$, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $f_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$

2. Calcul de la somme :
   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} f_k(t)$
   (b) Montrer que les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}$
   (d) En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} W_{2k}x^k = I_0$
   (e) Montrer que $I_0 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$
   (On pourra s'aider du changement de variable $u = \tan(t)$ *puis* $v = u\sqrt{1-x}$*)*
   (f) Après avoir retrouvé le DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, justifier que $\forall n \geqslant 0, W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \dfrac{\pi}{2}$

3. Calcul de la somme de manière plus directe

   En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\sin^2(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} W_{2k}x^k$$

CORRECTION

PARTIE I

1. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est *continue, positive et non identiquement nulle* sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,
   donc par théorème on peut affirmer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt > 0$

   On a bien $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n > 0}$

2. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

3. Pour $n \geqslant 1$, on considère $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t).\sin(t)dt$
   Comme le suggère l'énoncé, nous allons réaliser une intégration par parties.
   Les fonctions $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \sin^n(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,
   et l'on a pour tout t dans cet intervalle $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = n\cos(t)\sin^{n-1}(t)$.
   D'où

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt\right) \\
&= n(W_{n-1} - W_{n+1})
\end{aligned}$$

   Ainsi $W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1}) = nW_{n-1} - nW_{n+1}$ càd $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$

   Conclusion: $\boxed{\forall n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}}$

4. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
   D'après la question 3), on a $nW_{n-1} = (n+1)W_{n+1}$ donc en multipliant chaque membre par W_n cela donne $nW_{n-1}W_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

   On a montré que $\forall n \geqslant 1, nW_{n-1}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$,
   càd que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
   Le premier terme de cette suite vaut $1.W_0.W_1 = 1.\dfrac{\pi}{2}.1$

   Conclusion $\boxed{\text{la suite } (nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1} \text{ est la suite constante } \dfrac{\pi}{2}}$

5. Montrer la double inégalité demandée revient é montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Soit $n \geqslant 0$.
Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $1 \geqslant \sin(t) \geqslant 0$, et donc $\sin^n(t) \geqslant \sin^{n+1}(t)$
Par croissance l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt$$

ce qui prouve que $W_n \geq W_{n+1}$.

On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n \geqslant W_{n+1}}$ c'est é dire que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}}$$

En divisant par $W_{n-1} > 0$, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\quad \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$
c'est é dire

$$\forall n \geqslant 1, \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

D'après le théorème de convergence par encadrement(ex des gendarmes),
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$ ce qui prouve que

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}}$$

6. D'après la question 4, on a $\frac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n$ pour tout $n \geqslant 1$,
d'après la question ci-dessus on obtient $\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$ soit encore $\frac{\pi}{2n} \underset{+\infty}{\sim} W_n^2$
Comme $W_n > 0$(précision INDISPENSABLE) d'après la question 1a),
on en déduit bien que

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

.

Partie II

1. (a) Nous allons déterminer le rayon de la série entière en utilisant la règle de D'Alembert.
Soit $x \neq 0$ un entier fixé.
On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = W_{2n}.x^n$
On a pour tout $n \geqslant 0$ d'après la question I3)

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}.|x| = \frac{2n+1}{2n+2}.|x| \longrightarrow |x|$$

On peut affirmer que
- si $|x| < 1$ alors la série $\sum W_{2n}.x^n$ est absolument convergente
- si $|x| > 1$ alors la série $\sum W_{2n}.x^n$ est grossièrement divergente
On en déduit que $\boxed{R = 1}$

(b) On a $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ d'après le I6).
Or $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ qui est de signe stable et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente,
donc, d'après la régle des équivalents, on peut affirmer que $\boxed{\text{la série } \sum W_{2n} \text{ diverge}}$

(c) Il s'agit d'étudier la série numérique $\sum W_{2n}(-1)^n$.

- Comme $\forall n \geqslant 0, W_{2n} > 0$, la série $\sum W_{2n}(-1)^n$ est une série alternée
- On a $|W_{2n}(-1)^n| = W_{2n}$.
  Nous allons montrer que le critère spécial des séries alternées est vérifiée.
  - Comme $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, on a $\lim W_{2n} = 0$
  - D'après Partie I Q5, on a $\forall n \geqslant 0, W_{2n+2} \leqslant W_{2n}$

  Ainsi la suite (W_{2n}) est une suite décroissante qui tend vers 0,
  ce qui permet d'affirmer que

$$\boxed{\sum W_{2n}(-1)^n \text{ converge}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.
On reconnait

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sin^{2k}(t) = \sum_{k=0}^{n} (x.\sin^2(t))^k$$

est une somme géométrique de raison $x\sin^2(t) \neq 1$ car $|x\sin^2(t)| \leqslant |x| < 1$ par hypothése, on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sin^{2k}(t) = \frac{1-(x.\sin^2(t))^{n+1}}{1-x\sin^2 t} = \frac{1-f_{n+1}(t)}{1-x\sin^2(t)}}$$

(b) On a déjé vu que pour tout t réel, on a $|x\sin^2(t)| \leqslant |x| < 1$,
On peut donc affirmer en particulier que $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], 1 - x.\sin^2(t) \neq 0$
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^{2n}(t)}{1-x\sin^2(t)}$ est ainsi définie et continue sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$, (comme quotient de fonctions continues le dénominateur ne s'annulant pas); on peut donc affirmer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(t)}{1-x\sin^2(t)}dt$ existe, car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.(ce n'est méme pas une intégrale généralisée)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} W_{2k}x^k &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(t)dt.x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} x^k.\sin^{2k}(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-f_{n+1}(t)}{1-x\sin^2(t)}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\sin^2(t)}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_{n+1}(t)}{1-x\sin^2(t)}dt = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}\end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}}$

(d)
- Commençons par montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$.
  On a

$$0 \leqslant \sin^{2n+2}(t) \leqslant 1$$

En divisant par $1 - x\sin^2(t)$ qui est strictement positif (cf 2(a) ou 2(b)), on obtient

$$0 \leqslant \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}$$

On a ainsi prouvé que

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leqslant \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}$$

Gréce é la croissance de l'intégrale on obtient

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)} dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)} dt$$

On vient de justifier que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_0}$

- Comme $|x| < 1$ on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$.
  On peut en déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}.I_{n+1} = 0$
  comme produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers zéro.

- Comme pour tout entier n on a $\sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}$
  et que l'on vient de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}.I_{n+1} = 0$,
  on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0$.

  On vient de prouver que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} W_{2k}x^k$ convergeait pour tout $x \in]-1, +1[$ (ce que l'on savait déjà) et que

$$\boxed{\forall x \in]-1, +1[, \sum_{k=0}^{\infty} W_{2k}x^k = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)} dt}$$

(e) Je propose deux solutions: l'une avec le changement de variable dans l'intégrale généralisée, l'autre en effectuant ce même changement mais dans une intégrale non généralisée

- avec l'intégrale généralisée:
  (il faut bien indiquer dans la rédaction "C^1, bijectif et strictement monotone"

  – On effectue le changement de variable $t \mapsto \tan t = u$ qui est bien de classe C^1, strictement monotone et bijectif de $[0,\pi/2[$ sur $[0, +\infty[$
  On a

  $$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2(t)} = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)} \text{ et } du = (1 + \tan^2 t)dt = (1 + u^2)dt$$

  On obtient ainsi

  $$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1 - x.\frac{u^2}{1+u^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (1-x)u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (\sqrt{1-x}.u)^2} \quad \text{car } 1-x > 0$$

  On effectue le changement de variable affine (donc C^1, strictement monotone et bijectif!) $v = \sqrt{1-x}.u$ (et donc $dv = \sqrt{1-x}du$),
  et on obtient

  $$I_0 = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [\arctan v]_0^{\infty} = \frac{\pi/2}{\sqrt{1-x}}$$

- avec une intégrale non généralisée

  Pour tout $T \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on considère $F(T) = \int_0^T \frac{dt}{1-x.\sin^2(t)}$
  On effectue le changement de variable $t \mapsto \tan t = u$ qui est bien de classe C^1 sur [0,T].
  On a

$$\sin^2(t) = 1-\cos^2(t) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)} \text{ et } du = (1+\tan^2 t)dt = (1+u^2)dt$$

  On obtient ainsi

$$F(T) = \int_0^{\tan T} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1-x.\frac{u^2}{1+u^2}} = \int_0^{\tan T} \frac{du}{1+(1-x)u^2} = \int_0^{\tan T} \frac{du}{1+(\sqrt{1-x}.u)^2} \quad \text{car } 1-x>0$$

  On effectue le changement de variable affine $v = \sqrt{1-x}.u$ (et donc $dv = \sqrt{1-x}du$),
  et on obtient

$$F(T) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{\sqrt{1-x}.\tan T} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [\arctan v]_0^{\sqrt{1-x}.\tan T}$$

  En faisant tendre $T \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$, on obtient $\lim\limits_{T\to\frac{\pi}{2}^-} F(T) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{\pi}{2}$.
  On vient de prouver que

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}}$$

(f) Dans le cours sur les séries entières, on a vu en exemple important le DSE $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ en utilisant la formule de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.(IL FAUT SAVOIR REFAIRE CET EXEMPLE).

  On avait trouvé que $\forall x \in]-1,+1[, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$
  On sait donc que

$$\forall x \in]-1,+1[, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi}.I_0 = \frac{2}{\pi}.\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}.W_{2n}x^n$$

  <u>L'unicité du DSE</u> nous permet d'affirmer que $\forall n \geqslant 0, \frac{2}{\pi}.W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ cqfd!

3. On utilise le théorème d'intégration terme à terme comme demandé.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$.
     La fonction f_n est intégrable sur [0,$\pi/2$] car c'est une fonction continue sur ce segment.

   - Soit $t \in [0,\pi/2]$.
     La série $\sum f_n(t) = \sum (x.\sin^2 t)^n$ est une série géométrique convergente
     car de raison $q = x.\sin^2 t$ avec $|q| \leqslant |x| < 1$.
     On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (x.\sin^2 t)^n = \frac{1}{1-x.\sin^2 t} = S(t)$$

- La fonction S continue sur [0,$\pi/2$]
- La série $\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|dt = \int_0^{\pi/2} |x|^n.\sin^{2n} t dt = |x|^n.\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = |x|^n.W_{2n}$ converge. car $|x| < 1$ et que l'on sait que $Rayon(\sum W_{2n}x^n) = 1$

D'après le fameux théorème, on peut affirmer que

i) S est intégrable sur [0,$\pi/2$]

ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x.\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} x^n.\sin^{2n} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n W_{2n}$