Matrices circulantes

On note I_4 la matrice identité d'ordre 4.

Pour tout quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, on notera $M(a,b,c,d)$ la matrice $M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

F désignera l'ensemble $F = \{M(a,b,c,d) | (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\}$

1. Etude la de structure de F
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer $\dim F$.
   (c) On note G l'ensemble des matrices symétriques qui appartiennent à F
   G est-il un sev de F? G est-il un hyperplan de F?
2. On note $J = M(0,1,0,0)$
   (a) Calculer J^2, J^3 et J^4.
   Que représente la famille (I_4,J,J^2,J^3) pour F?
   (b) Donner J^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$
   (c) En déduire que F est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel.
   On précisera si, restreint à F, le produit matriciel est commutatif ou pas.
   (d) A l'aide de la question (a), montrer que la matrice J est inversible et donner J^{-1}.
   Les matrices de F sont-elles toutes inversibles?
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $C = I_4 + \lambda.J^2$.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites complexes $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ telles que pour tout entier k on ait $C^k = a_k.I_4 + b_k.J^2$
   (b) Etablir que les suites $(a_k + b_k)$ et $(a_k - b_k)$ sont deux suites géométriques.
   (c) Déterminer C^k pour $k \geqslant 0$
   (d) Sans utiliser les questions précédentes, montrer que la suite des déterminants $(\det(C^k))_{k\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   (vous pourrez controler la validité de votre résultat avec celui de la question précédente)
4. (a) Justifier que J est une matrice diagonalisable, et donner une base de vecteurs propres de $\mathbb{C}^4$ pour laquelle chaque vecteur aura sa première coordonnée égale à un.
   (b) A l'aide de la question 2(a), montrer que $M(a,b,c,d)$ est diagonalisable pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ à l'aide d'une même matrice de passage.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de $M(a,b,c,d)$? Justifier que

$$\det(M(a,b,c,d)) = (a+b+c+d)(a+ib-c-id)(a-b+c-d)(a-ib-c+id)$$

5. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à J^2.
   (a) Donner l'expression de $f((x,y,z,t))$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$

(b) Montrer que f est une symétrie vectorielle, et déterminer ses éléments caractéristiques.
(c) Donner une base de $\mathbb{C}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

CORRECTION

1. (a) Je propose deux solutions, la seconde étant à privilégier car plus courte

i) Première idée : On montre que F est stable par combinaison linéaire

- $F \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: trivial
- F est non vide, car la matrice $O_4 = M(0,0,0,0) \in F$.
- F est stable par combinaison linéaire: en effet
  Soient $(A,A') \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
  on peut dire qu'il existe $(a,b,c,d,,a',b',c',d') \in \mathbb{C}^8$ tel que
  $A = M(a,b,c,d)$ et $A' = M(a',b',c',d')$. Un calcul matriciel simple donne alors

$$\begin{aligned}\lambda.A + A' &= \lambda. \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ d' & a' & b' & c' \\ c' & d' & a' & b' \\ b' & c' & d' & a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda.a + a' & \lambda.b + b' & \lambda.c + c' & \lambda.d + d' \\ \lambda.d + d' & \lambda.a + a' & \lambda.b + b' & \lambda.c + c' \\ \lambda.c + c' & \lambda.d + d' & \lambda.a + a' & \lambda.b + b' \\ \lambda.b + b' & \lambda.c + c' & \lambda.d + d' & \lambda.a + a' \end{pmatrix} \\ &= M(\lambda.a + a', \lambda.b + b', \lambda.c + c', \lambda.d + d')\end{aligned}$$

  Et comme le produit et la somme de nombres complexes sont des nombres complexes,
  on a bien $\lambda.a + a' \in \mathbb{C}, \lambda.b + b' \in \mathbb{C}$ et $\lambda.c + c' \in \mathbb{C}$: ce qui finit de prouver que $\lambda.A + A' \in F$.

ii) Seconde idée: Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, on peut écrire

$$M(a,b,c,d) = a.M(1,0,0,0) + b.M(0,1,0,0) + c.M(0,0,1,0) + d.M(0,0,0,1)$$

Ainsi, F est l'ensemble des combinaisons linéaires des 4 matrices ci-dessus, on peut donc affirmer que

$$\boxed{F = \text{vect}(\{M(1,0,0,0), M(0,1,0,0), M(0,0,1,0), M(0,0,0,1)\})}$$

(b) Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, on peut écrire

$$M(a,b,c,d) = a.M(1,0,0,0) + b.M(0,1,0,0) + c.M(0,0,1,0) + d.M(0,0,0,1)$$

Ainsi, F est l'ensemble des combinaisons linéaires des 4 matrices ci-dessus, on peut donc affirmer que

$$\boxed{F = \text{vect}(\{M(1,0,0,0), M(0,1,0,0), M(0,0,1,0), M(0,0,0,1)\})}$$

Nous allons montrer que cette famille de 4 matrices est un famille libre.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $a.M(1,0,0,0) + b.M(0,1,0,0) + c.M(0,0,1,0) + d.M(0,0,0,1) = 0$
On a donc

$$a.M(1,0,0,0) + b.M(0,1,0,0) + c.M(0,0,1,0) + d.M(0,0,0,1) = M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Or une matrice est la matrice nulle ssi tous ses coefficients sont nuls,
on a donc $a = b = c = d = 0$

La famille $\{M(1,0,0,0), M(0,1,0,0), M(0,0,1,0), M(0,0,0,1)\}$ est donc une famille libre et génératrice de F, c'est une base de F et donc $\boxed{\dim F = 4}$

(c) Notons S_4 l'ensemble des matrices symétriques complexes d'ordre 4. On sait que S_4 est un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

- On a $G = S_4 \cap F$. Or l'intersection de deux sev est encore un sev, donc $\boxed{G \text{ est un sev.}}$

- On a $G = \{M(a,b,c,b) | (a,b,c) \in \mathbb{C}\}$. Avec un raisonnement similaire au précédent, on montre que $\dim G = 3$. On a ainsi $\dim G = \dim F - 1$.
  conclusion: $\boxed{G \text{ est un hyperplan de } F}$

2. (a) Le calcul matriciel donne

$$J^2 = M(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = M(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J^4 = I_4$.
On reconnait dans $\boxed{(I_4, J, J^2, J^3) \text{ la base de } F \text{ trouvée à la question précédente.}}$

(b) Soit k un entier naturel.
Nous allons faire une discussion suivant le reste de la division euclidienne de k par 4.

- si $k \equiv 0[4]$ (c'est à dire s'il existe p naturel tel que $k = 4p$)
  on a $J^k = J^{4p} = (J^4)^p = I_4^p = I_4$
- si $k \equiv 1[4]$ (c'est à dire s'il existe p naturel tel que $k = 4p + 1$)
  on a $J^k = J^{4p+1} = J^{4p}.J = I_4.J = J$
- si $k \equiv 2[4]$ (c'est à dire s'il existe p naturel tel que $k = 4p + 2$)
  on a $J^k = J^{4p+2} = J^{4p}.J^2 = I_4.J^2 = J^2$
- si $k \equiv 3[4]$ (c'est à dire s'il existe p naturel tel que $k = 4p + 3$)
  on a $J^k = J^{4p+3} = J^{4p}.J^3 = I_4.J^3 = J^3$

(c) Nous allons montrer que le produit de deux matrices de F est encore une matrice de F. Plutôt que d'effectuer bestialement le calcul direct des 16 coefficients de la matrice, nous allons utiliser les questions précédentes.

- **Soient $M(a,b,c,d)$ et $M(a',b',c',d')$ deux matrices de F**
  On a $M(a,b,c,d) = a.I_4 + b.J + c.J^2 + d.J^3$ et $M(a',b',c',d') = a'.I_4 + b'.J + c'.J^2 + d'.J^3$
  Et ainsi.

$$\begin{aligned} M(a,b,c,d).M(a',b',c',d') &= (a.I_4 + b.J + c.J^2 + d.J^3)(a'.I_4 + b'.J + c'.J^2 + d'.J^3) \\ &= aa'.I_4 + (ab' + ba').J + (ac' + bb' + ca').J^2 \\ &\quad + (ad' + bc' + cb' + da').J^3 + (bd' + cc' + db').J^4 \\ &\quad + (cd' + dc').J^5 + dd'.J^6 \\ &= (aa' + bd' + cc' + db')I_4 + (ab' + ba' + cd' + dc')J \\ &\quad + (ac' + bb' + ca' + dd')J^2 + (ad' + bc' + cb' + da')J^3 \end{aligned}$$

  Ainsi: $M(a,b,c,d).M(a',b',c',d') = M(a'',b'',c'',d'')$ en posant $\begin{cases} a'' &= aa' + bd' + cc' + db' \\ b'' &= ab' + ba' + cd' + dc' \\ c'' &= ac' + bb' + ca' + dd' \\ d'' &= ad' + bc' + cb' + da' \end{cases}$

  (ce qui prouve que c'est bien une matrice de F!)

- Comme la formule précédente a été montré pour tout octuplet de complexes (a,b,c,d,a',b',c',d'), on sait déjà que

  $M(a',b',c',d').M(a,b,c,d) =$
  $M(a'a + b'd + c'c + d'b, a'b + b'a + c'd + d'c, a'c + b'b + c'a + d'd, a'd + b'c + c'b + d'a)$

  (les lettre primées ont été déprimées et réciproquement)
  Or dans $\mathbb{C}$ la multiplication est commutative (et l'addition aussi), ceci nous permet de dire que:

$$\begin{aligned} a'a + b'd + c'c + d'b &= aa' + bd' + cc' + db' \\ a'b + b'a + c'd + d'c &= ab' + ba' + cd' + dc' \\ &\vdots \end{aligned}$$

  et donc on a :

  $M(a'a + b'd + c'c + d'b, a'b + b'a + c'd + d'c, a'c + b'b + c'a + d'd, a'd + b'c + c'b + d'a) =$
  $M(aa' + bd' + cc' + db', ab' + ba' + cd' + dc', ac' + bb' + ca' + dd', ad' + bc' + cb' + da')$,

  soit $\boxed{M(a,b,c,d).M(a',b',c',d') = M(a',b',c',d').M(a,b,c,d)}$
  remarque: c'est joli non? La commutativité dans $\mathbb{C}$ suffit pour prouver la commutativité dans F!

(d) d'après la quesion 2(a), on a $J^4 = I_4$, c'est à dire $J.J^3 = J^3.J = I_4$. D'après la définition d'une matrice inversible, on peut affirmer que $\boxed{J \text{ est inversible et que } J^{-1} = J^3}$

3. (a) Il s'agit de montrer par récurrence sur k la proposition

$$\mathcal{P}_k : \text{"il existe deux complexes } a_k \text{ et } b_k \text{ tels que } C^k = a_k.I_4 + b_k.J^2\text{"}$$

- La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  en effet, on a $C^0 = I_4$ par convention.
  En posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ on a $C^0 = a_0.I_4 + b_0.J^2$

- La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.
  En effet, on a $C^1 = I_4 + \lambda.J^2$ qui est de la forme $a_1.I_4 + b_1.J^2$ en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = \lambda$

- Supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$ fixé quelconque.
  On a donc $C^k = a_k.I_4 + b_k.J^2$
  D'où

$$C^{k+1} = C.C^k = (I_4 + \lambda.J^2)(a_k.I_4 + b_k.J^2) = a_k.I_4 + (\lambda.a_k + b_k).J^2 + \lambda.b_k.J^4$$

  Or $J^4 = I_4$ donc

$$C^{k+1} = (a_k + \lambda.b_k)I_4 + (b_k + \lambda.a_k).J^2$$

  Il suffit alors de poser maintenant $a_{k+1} = a_k + \lambda.b_k$ et $b_{k+1} = b_k + \lambda.a_k$ pour justifier que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie!

(b) Pour tout k entier notons $u_k = a_k + b_k$ et $v_k = a_k - b_k$.

- on a $u_0 = v_0 = 1$
- pour tout $k \geqslant 0$, on a $u_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} = a_k + \lambda.b_k + b_k + \lambda a_k = (1+\lambda)u_k$
- pour tout $k \geqslant 0$, on a $u_{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1} = a_k + \lambda b_k - b_k - \lambda a_k = (1-\lambda)v_k$
- Ainsi la suite (u_k) est une suite géométrique de raison $1+\lambda$ et de premier terme $u_0 = 1$, on en déduit donc que pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $\boxed{u_k = (1+\lambda)^k}$

- On prouve de même que $\boxed{v_k = (1-\lambda)^k}$ pour tout entier k

(c)
- Comme $\forall k \geqslant 0, a_k = \dfrac{u_k + v_k}{2}$, on a $\boxed{\forall k \geqslant 0, a_k = \dfrac{1}{2}((1+\lambda)^k + (1-\lambda)^k)}$
- Comme $\forall k \geqslant 0, b_k = \dfrac{u_k - v_k}{2}$, on a $\boxed{\forall k \geqslant 0, b_k = \dfrac{1}{2}((1+\lambda)^k - (1-\lambda)^k)}$
- Il reste alors à écrire C^k sachant que $C_k = a_k.I_4 + b_k.J^2$!

4. (a) On commence par déterminer le polynôme caractéristique de J.
  (puis on développe le déterminant par rapport à la première colonne)

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} = X^4 - 1$$

  $X^4 - 1$ possède 4 racines complexes distinctes(les racines $n-$ièmes de l'unité avec $n = 4$), à savoir $\{1, -1, i, -i\}$

  On en déduit que $\boxed{sp(J) = \{1, -1, i, -i\}}$

Comme $J \in \mathcal{M}_{\boxed{4}}(\mathbb{C})$(matrice d'ordre 4) possède 4 valeurs propres distinctes, on d'après **la condition suffisante de de diagonalisabilité** que $\boxed{J \text{ est diagonalisable}}$ et que chaque sous-espace propre est de dimension un!

Nous allons maintenant déterminer les 4 sep d'un seul coup!

Soit λ une valeur propre de J.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes

$$X \in E_\lambda(J) \iff JX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y &= \lambda.x \\ z &= \lambda.y \\ t &= \lambda.z \\ x &= \lambda.t \end{cases}$$

ce qui, par substitutions successives, donne

$$X \in E_\lambda(J) \iff \begin{cases} y &= \lambda.x \\ z &= \lambda^2.x \\ t &= \lambda^3.x \\ x &= \lambda^4.x \end{cases} \underbrace{\iff}_{\text{car } \lambda^4 = 1} \begin{cases} y &= \lambda.x \\ z &= \lambda^2.x \\ t &= \lambda^3.x \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{E_\lambda(J) = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix})}$$

On a donc dans les 4 cas particuliers

$$E_1(J) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad E_{-1}(J) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \quad E_i(J) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}) \quad E_{-i}(J) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix})$$

Une base de vecteurs propres est donc $\boxed{(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix})}$

Préparons la question suivante,

en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ on a $J = PDP^{-1}$

(b) Comme $J = P.D.P^{-1}$ on sait alors que $\forall k \geqslant 0, J^k = P.D^k.P^{-1}$

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$.
On a

$$\begin{aligned} M(a,b,c,d) &= aI_4 + bJ + cJ^2 + dJ^3 \\ &= aP.I_4.P^{-1} + b.P.D.P^{-1} + cP.D^2.P^{-1} + dP.D^3.P^{-1} \\ &= P.(aI_4 + bD + cD^2 + dD^3).P^{-1} \\ &= P.\begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib-c-id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib-c+id \end{pmatrix}.P^{-1} \end{aligned}$$

Ceci prouve que la matrice $M(a,b,c,d)$ est diagonalisable, car elle est semblable à une matrice diagonale.

On remarque de plus que la matrice de passage est toujours P qui est indépendante des coefficients a, b, c et d.

(c) *On sait que les valeurs propres de $M(a,b,c,d)$ comptées avec leurs multiplicités sont les coefficients diagonaux de la matrice diagonale associée, donc ici*

$$a+b+c+d, a-b+c-d, a+ib-c-id, a-ib-c+id$$

On sait que deux matrices semblables ont même déterminant.
D'où:

$$\begin{aligned} \det(M(a,b,c,d)) &= \begin{vmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib-c-id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-ib-c+id \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a+ib-c-id)(a-b+c-d)(a-ib-c+id) \\ &= \left[(a+c)^2 - (b+d)^2\right] . \left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right] \end{aligned}$$

5. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.
   - On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^2 = (J^2)^2 = J^4 = I_4$, on peut donc affirmer que $f^2 = id_{\mathbb{C}^4}$.
     f est un endomorphisme involutif de $\mathbb{C}^4$, il s'agit donc d'une symétrie vectorielle. Plus précisément, c'est la symétrie vectorielle par rapport à $E_1(f) = \ker(f - id)$ parallèlement à $E_{-1}(f) = \ker(f + id)$

   - on a $f((x,y,z,t) = (z,t,x,y)$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$
     car on sait que f est l'edomophisme **canoniquement** associé à J^2, et donc que

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = J^2.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ t \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

   - on a $(x,y,z,t) \in \ker(f - id) \iff (z,t,x,y) = (x,y,z,t) \iff (x = z \text{ et } y = t)$
     Donc

$$\ker(f - id) = \{(x,y,x,y) | (x,y) \in \mathbb{C}^2\} = \mathrm{vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$$

- On trouve de la même manière

$$\ker(f+id) = \{(x,y,-x,-y)|(x,y) \in \mathbb{C}^2\} = \text{vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$$