PT* 2024-25
DS 4 du 20 janvier 2024
durée 4h
(sortie autorisée à partir de 16h30)

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Ce devoir est composé de deux problèmes et un exercice totalement indépendants.

Problème I : Probabilités

Ce problème est composé de 2 parties indépendantes, chacune d'elle étant l'étude d'un tirage différent dans un paquet de bonbons effectué par deux enfants Eric et Céline

Dans l'ensemble du problème :

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats(corses)
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Eric n'aime que les bonbons à la menthe et Céline que les nougats(corses)

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geqslant 1$,

- M_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe »;
- N_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un nougat ».

Partie A

Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Eric tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Céline fait de même.

On note :

- X_E la variable aléatoire égale à 1 si Eric tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Eric tire un nougat.
- X_C la variable aléatoire égale à 1 si Céline tire un nougat et égale à 0 si Céline tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Quelle est la loi de X_E ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et la variance de X_E.
2. (a) Déterminer $P\left(X_E = 0 \cap X_C = 0\right)$.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_E,X_C).
3. En déduire la loi de X_C. Une justification est attendue.
4. Les variables X_C et X_E sont-elles indépendantes?

   Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.
   On note alors :

   - Y_E la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Eric après les dons éventuels;
   - Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Céline après les dons éventuels.

5. Justifier que l'univers image $Y_E(\Omega)$ de Y_E est égal à $\{0;1;2\}$.
6. Que dire de la variable aléatoire $Y = Y_E + Y_C$? Donner son espérance et sa variance.
7. Justifier que $Y_E = 1 + X_E - X_C$.
8. En déduire l'espérance de Y_E. On admettra pour la suite que sa variance vaut $\dfrac{9}{19}$.
9. A l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de Y_E n'est pas une loi binomiale.

Partie B

Dans cette partie, la proportion des bonbons à la menthe dans le paquet est notée e et celle des nougats est notée c avec $(e,c) \in]0;1[^2$.

Le tirage des bonbons dans le paquet répond au protocole suivant :

- Les enfants tirent à tour de rôle un bonbon dans le paquet.
- ◦ Lorsqu'un enfant tire un bonbon qu'il aime, il le mange, sinon il le remet dans le paquet.
- Les tirages s'arrêtent dès qu'un enfant a mangé un bonbon.
- Profitant de la galanterie d'Eric, Céline effectue le premier tirage.

On note B la variable aléatoire égale à 1 si c'est Céline qui a mangé un bonbon, égale à 0 si c'est Eric qui a mangé un bonbon et égale à -1 dans les autres cas.

1. Justifier que $e + c = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul. On note C_n l'événement : «Céline a mangé un nougat au n-ème tirage ».
   (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer C_{2p+1} en fonction d'événements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis.
   (b) En déduire $P\left(C_{2p+1}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
   (c) Que peut-on dire de C_{2p} et $P\left(C_{2p}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$?
3. Etablir à l'aide des questions précédentes que $P(B = 1) = \dfrac{c}{1 - ec}$.
4. Démontrer de même que $P(B = 0) = \dfrac{e^2}{1 - ec}$.
5. En déduire la valeur $P(B = -1)$. Interpréter ce résultat.
6. Est-il possible de posséder un paquet de bonbons tel que Eric et Céline aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon?

Problème II : Analyse

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a,b]$:
$$|f'(t)| \leq M.$$
2. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,e^{ikt}dt$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,e^{ikt}dt = 0.$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}dt.$$

1.
   (a)
      i. Déterminer :
      $$\lim_{t\to0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}.$$
      ii. Déterminer :
      $$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}.$$
      iii. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

   (b) Que vaut I_1 ?

   (c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :
   $$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$
   en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.

   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).
2. Étudier la convergence des intégrales J_n, $n\in\mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}dt$.
3. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, associe
$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$
est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Que vaut : $\lim\limits_{n\to+\infty} \{J_n - I_n\}$? On pensera à utiliser le préambule.
5.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).

   (b) Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$
   (on pourra utiliser un changement de variable).

   (c) Que vaut :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \quad ?$$

Exercice

1. Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$
2. Calculer $f(t) = \int_0^1 e^{-tu}du$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ puis pour $t = 0$
3. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}$
4. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$
Justifier que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $S'(x)$
6. (a) Pour tout $x > 0$ montrer que l'intégrale $R(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est convergente

   (b) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t).e^{-t}dt$

   (c) (FACULTATIF, HORS-BAREME)
   On pose $\gamma = S(1) - R(1)$. Démontrer que $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$
   (On pourra procéder par intégrations par parties dans $S(1)$ et dans $R(1)$)

   (d) Montrer que R est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis donner $R'(x)$ pour $x > 0$

   (e) Justifier que $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$ pour tout $x > 0$
   où γ est la constante définie en Q6c)

Problème I : Probabilités.

Partie A

Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Eric tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Céline fait de même.

1. (a) $\boxed{X_E \text{ suit une loi de Bernoulli (succès-échec) de paramètre } p = 1/2}$ dont le succès est celui d'avoir 1 bonbon à la menthe (10 à la menthe sur 20 bonbons)
(b) Avec une loi de Bernoulli de paramètre p, on aura :
$\boxed{E(X_E) = 1/2 = p}$ et $\boxed{V(X_E) = p(1-p) = 1/4}$

2. (a) Si on applique **la formule des probabilités conditionnelles**, on aura

$$\boxed{P(X_E = 0 \cap X_C = 0) = P(X_E = 0)P(X_C = 0 \,|\, X_E = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{19} = \frac{5}{19}}$$

puisque si Eric prend un nougat, il reste 19 bonbons dans le paquet dont 10 à la menthe d
(b) On trouve de même $\boxed{P(X_E = 1 \cap X_C = 1) = \frac{5}{19}}$ en raisonnant comme précédemment puis :
$\boxed{P(X_E = 0 \cap X_C = 1) = \frac{9}{38} \text{ et} P(X_E = 1 \cap X_C = 0) = \frac{9}{38}}$
Puisque cette fois-ci Céline n'aura que 9 chances de succès ou d'échec

3. Pour avoir la loi de X_C on utilise **la loi conjointe et le système complet d'évènements** $((X_E = 0),(X_E = 1))$, ce qui donne :

$$\begin{cases} P(X_C = 1) = P(X_C = 1 \cap X_E = 1) + P(X_C = 1 \cap X_E = 0) = 5/19 + 9/38 = 1/2 \\ P(X_C = 0) = P(X_C = 0 \cap X_E = 1) + P(X_C = 0 \cap X_E = 0) = 9/38 + 5/19 = 1/2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc } X_C \text{ suit comme } X_E \text{ une loi de Bernoulli de paramètre } p = 1/2}$

4. On a $P(X_E = 1 \cap X_C = 1) = \frac{5}{19} \neq \frac{1}{4} = P(X_E = 1).P(X_C = 1)$
donc $\boxed{X_E \text{ et } X_C \text{ ne sont pas indépendantes}}$

5. L'univers image représente les valeurs possibles de Y_E donc celles du nombre de bonbons à la menthe d'Eric et suite à l'échange il y aura en effet 0, 1 ou 2 bonbons à la menthe donc $\boxed{Y_E(\Omega) = \{0; 1; 2\}}$

6. $Y = Y_E + Y_C$ est le nombre de bonbons tirés après deux tirages, c'est donc une constante et $\boxed{Y = 2}$
.
On sait alors que $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 0$

7. On remarque que si $X_C = 1$ alors Céline ne donnera pas de bonbon donc $Y_E = X_E$
Sinon $X_C = 0$ et alors Céline donne son bonbon à la menthe à Eric qui en aura un de plus donc $Y_E = X_E + 1$ $\boxed{\text{On a donc bien } Y_E = 1 + X_E - X_C}$

8. Comme X_E et X_C ont même espérance et que l'espérance est linéaire, on aura $E(Y_E) = 1$

9. Si Y_E suit une loi binomiale alors, sachant que $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$, elle sera binomiale de paramètre $(n = 2,p)$ et $E(Y_E) = np = 2p = 1$ donc $p = \frac{1}{2}$
On aura aussi $V(Y_E) = np(1-p) = 2p(1-p) = \frac{1}{2}$ mais on a vu au-dessus que $V(Y_E) = \frac{9}{19} \neq \frac{1}{2}$.
C'est donc absurde et, par conséquent, $\boxed{Y_E \text{ ne suit pas une loi binomiale}}$

Partie C

1. Si N_1 est le nombre de bonbons à la menthe et N_2 celui des nougats et $N = N_1 + N_2$ le nombre total de bonbons alors $e = \frac{N_1}{N}$ et $c = \frac{N_2}{N}$ puisque ce sont des proportions . Donc on a bien $\boxed{e + c = 1}$

2. Soit n un entier naturel non nul.
(a) Pour avoir l'évènement C_{2p+1}, il faut que la menthe apparaisse aux tirages impairs, le nougat aux tirages pairs et à la fin le nougat au dernier tirage impair $2p + 1$:
Ce qui fait que $\boxed{C_{2p+1} = [(M_1 \cap N_2) \cap \ldots \cap (M_{2p-1} \cap N_{2p})] \cap N_{2p+1}}$
(b) *Il me semble que l'indépendance des évènements N_i et M_i n'est pas réelle vu que, par exemple, si on revient à la stricte définitions de ces évènements, on aura dans le contexte de la partie B : $N_1 \cap M_2 = \emptyset$ car l'enchaînement N_1 puis M_2 ne peut pas se réaliser.*
Pour mieux présenter les choses je pose $\boxed{F_i = \begin{cases} M_i & \text{si} \quad i \text{ impair} \\ N_i & \text{si} \quad i \text{ pair} \end{cases}}$
Alors $\boxed{C_{2p+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{2p} F_i\right) \cap N_{2p+1}}$ et par la **formule des probabilités composées**, on aura :

$$P(C_{2p+1}) = P(F_1)P(F_2\,|F_1)P(F_3\,|F_1 \cap F_2) \ldots P(F_{2p}\,|F_1 \cap \ldots \cap F_{2p-1})P(N_{2p+1}\,|F_1 \cap \ldots \cap F_{2p})$$

Alors ici chacune de ces probabilités donnera $\boxed{a \textbf{ ou } c}$ en alternance comme les nombres $\boxed{\text{impair } \textbf{ou} \text{ pair}}$ sauf $\boxed{c}$ pour le dernier ce qui donne $\boxed{P(C_{2p+1}) = (ac)^p c}$
(c) On a $\boxed{C_{2p} = \emptyset \text{ et } P(C_{2p}) = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{N}^\star}$

3. On a $(B = 1) = \bigcup_{p=0}^{+\infty} C_{2p+1}$ en **union d'évènements disjoints deux à deux** ce qui fait que
$$\boxed{P(B = 1) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(C_{2p+1}) = c \sum_{p=0}^{+\infty} (ac)^p = \frac{c}{1 - ac}}$$

4. On peut raisonner de même en prenant l'évènement A_{2p} : "Eric a mangé son bonbon à la menthe au 2p-ème tirage ", ce qui fait que par le même genre de raisonnement que dans les questions 2.(a) et 2.(b) on trouve

$$P(A_{2p}) = (ac)^{p-1} \cdot a \cdot a = a^2(ac)^{p-1}$$

et de même $(B = 0) = \bigcup_{p=0}^{+\infty} A_{2p}$ en union disjointe deux à deux
$$\boxed{\text{Donc finalement } P(B = 0) = a^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (ac)^{p-1} = \frac{a^2}{1-ac}}$$

5. Comme $B(\Omega) = \{-1,0,1\}$ on a :

$$P(B = -1) + P(B = 0) + P(B = 1) = P(\Omega) = 1$$

Ce qui fait que sachant que $c = 1 - a$: $P(B = -1) = 1 - \dfrac{a^2 + c}{1 - ac} = 1 - \dfrac{a^2 + 1 - a}{1 - a(1 - a)} = 0$
On en déduit que $(B = -1)$ est un évènement négligeable. On en déduit que certainement qu'Eric ou Céline mangera un bonbon!

6. Pour qu' Eric et Céline aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon, il faudrait que $P(B = 0) = P(B = -1)$ avec toujours $a + c = 1$ et $(a,c) \in]0,1[^2$

Or ceci a bien une solution puisque cela revient à résoudre dans notre domaine $]0{,}1[^2$ le système :

$$\begin{cases} a+c=1, a>0 \\ a^2=c \end{cases} \iff \begin{cases} a+a^2=1, a>0 \\ c=1-a \end{cases} \iff a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Si on prend les proportions $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $c=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ alors Eric et Céline auront autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon

rem: le nombre $\sqrt{5}$ étant irrationnel, il n'est cependant pas possible avec des nombres(entiers) de bonbons de pouvoir atteindre une telle proportion

Préambule

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, sa dérivée f' est **continue** sur ce **segment**; le **théorème des bornes atteintes** affirme alors que f' est bornée, ce qui se traduit par :
$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [a,b], \quad |f'(t)| \leq M.}$$
2. Ainsi, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\left|f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\right| = |f'(t)| \leq M$$
et par intégration on peut écrire :
$$0 \leq \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\right|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}\int_a^b M\,\mathrm{d}t = \frac{M\,(b-a)}{k}$$
et puisque $\lim_{k\to+\infty}\frac{M(b-a)}{k}=0$, il vient :
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\tfrac{1}{k}\textstyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = 0.}$$
3. Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}$ étant de classe C^1 sur $[a,b]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :
$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [f\,g]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$
c'est-à-dire :
$$\mathrm{i}\,k\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a) - \int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t$$
ou encore, pour k entier naturel non nul :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k} + \frac{\mathrm{i}}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t.$$
Mais avec **l'inégalité triangulaire**
$$0 \leq \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k}\right| \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{k}$$
donc
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,b}f(b) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,a}f(a)}{\mathrm{i}\,k} = 0.$$
Avec le résultat de la question précédente, on peut conclure que :
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t = 0.}$$

Partie I

1.
   (a)
   i. On sait que, lorsque u tend vers 0, $\sin u \sim u \sim \tan u$, donc :
   $$\boxed{\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t} = 2n.}$$
   ii. On a : $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\sin(2\,n\,t) = \sin(n\,\pi) = 0$ et $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\tan t = +\infty$, donc sans difficulté :
   $$\boxed{\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t} = 0.}$$
   iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   La fonction $t \mapsto \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}$, continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $2n$) et $\frac{\pi}{2}$ (par la valeur 0) d'après les questions précédentes. L'intégrale I_n est donc faussement doublement généralisée.
   $$\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$$

   (b) Pour $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:
   $$\frac{\sin(2\,t)}{\tan t} = 2\cos^2 t = 1 + \cos(2\,t)$$
   donc
   $$I_1 = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
   ce qui donne :
   $$\boxed{I_1 = \tfrac{\pi}{2}.}$$

   (c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :
   $$\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2\,(n+1)\,\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{2\,n\,\mathrm{i}\,t}\right)$$
   avec
   $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\,(n+1)\,\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{2\,n\,\mathrm{i}\,t} &= \mathrm{e}^{(2\,n+1)\,\mathrm{i}\,t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) \\ &= 2i.\sin(t).\mathrm{e}^{(2\,n+1)} \\ &= 2\,(-\sin((2\,n+1)\,t)\sin t + \mathrm{i}\cos((2\,n+1)\,t)\sin t)\end{aligned}$$
   donc
   $$\boxed{\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t) = 2\cos((2\,n+1)\,t)\sin t.}$$

   (d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2\,n+1)\,t)\cos t\,\mathrm{d}t.$$
   Mais par un calcul analogue au précédent :
   $$2\cos((2\,n+1)\,t)\cos t = \cos((2\,n+2)\,t) + \cos(2\,n\,t)$$
   donc
   $$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin((2\,n+2)\,t)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin(2\,n\,t)}{2\,n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$
   ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
   Avec la question (b), on peut conclure que
   $$\boxed{\text{la suite de terme général } I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est constante égale à } \pi/2.}$$

2. Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(p\,t)}{t}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p. L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(p\,t)}{t} dt$ est donc convergente, car faussement impropre.
C'est vrai notamment pour $p = 2\,n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.

$\boxed{\text{Les intégrales considérées sont convergentes.}}$

3. • Comme différence de telles fonctions, ϕ est de classe C^1 sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   • Elle se prolonge par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec la valeur $\frac{2}{\pi}$.

   • Lorsque t tend vers 0, on sait que $\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)$ donc

$$\lim_{t\to 0} \phi\,(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - t}{t\,\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{3\,t^2} = 0$$

   et ϕ se prolonge en une fonction $\widetilde{\phi}$ continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et C^1 sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   • Pour $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\widetilde{\phi}'\,(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

   On voit que

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}'\,(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

   et par ailleurs, lorsque t tend vers 0,

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-\tan t)\,(t+\tan t)}{t^2\,\tan^2 t} \sim \frac{1}{t^4}\left(-\frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)\right)\left(2t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)\right) \sim \frac{-2}{3}$$

   donc

$$\lim_{t\to 0} \widetilde{\phi}'\,(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

   En conséquence du **théorème de la limite de la dérivée** *, on peut conclure que

   $\boxed{\text{le prolongement } \widetilde{\phi} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,\pi/2].}$

   * *revoir ce théorème dans le rdm si vous ne l'avez pas en tête!*

4. Puisque $\widetilde{\phi}$ est C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}\,(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,t}\mathrm{d}t$$

converge vers 0, et la suite extraite $(\alpha_{2n})_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $(\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}))$ car $0 \leq |\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n})| \leq |\alpha_{2n}|$. Or

$$\mathcal{I}m\,(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}\,(t)\sin(2\,n\,t)\,\mathrm{d}t = J_n - I_n$$

donc

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (J_n - I_n) = 0.}$

5.
   (a) fait en classe! Prendre par exemple modèle sur le Résolu 130

   $\boxed{\text{L'intégrale considérée est convergente.}}$

   (b) La fonction $t \mapsto u = 2\,n\,t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0,n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

   Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

   $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.}$

   (c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

   donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

1. On peut par exemple utiliser la règle de D'Alembert.
On trouve $R = \infty$
2. Pour $t = 0$ on a $f(0) = \int_0^1 du = 1$
Pour $t \neq 0$ on a $f(t) = \left[\dfrac{e^{-tu}}{-t}\right]_0^1 = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$
3. D'après le DSE de exp, on peut affirmer que pour tout t réel on a

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

Et ainsi pour $t \neq 0$ cela donne

$$f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} = \frac{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{n!}}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}$$

Le changement d'indice $n \leftarrow n-1$ donne alors $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}$

On remarque que pour $t = 0$ la série précédente vaut 1, ce qui correspond aussi à $f(0)$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}}$
4. La série entière ci-dessus converge pour tout t réel, son rayon vaut donc $R = +\infty$
Le fonction f n'est rien d'autre que la fonction somme d'une série entière
On sait par théorème que la fonction somme d'une série entière est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$, ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$, càd $f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

5. La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, d'après le **théorème fondamental de l'analyse**, on peut dire que S est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que c'est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = f(x)$$

6. (a) Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$: elle possède donc des primitives sur cet intervalle et l'intégrale $R(x)$ est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

Pour tout $t \geqslant x$ on a $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$

et l'on sait que $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \int_x^{\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de réference convergente,

donc, par théorème de comparaison des fonctions positives,

on peut affirmer que $\boxed{\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ est une intégrale convergente}}$

(b) La fonction $t \mapsto \ln(t).e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{\infty} \ln(t).e^{-t} dt$ est une intégrale généralisée en ses deux bornes.

i) $\boxed{\text{Etude de } \int_0^1 \ln(t).e^{-t}}$

On a $\ln(t).e^{-t} \underset{0+}{\sim} \ln(t)$,

Comme $\ln(t)$ est de signe stable au voisinage de 0^+, on peut affirmer d'après la règles des équivalents que $\int_0^1 \ln(t).e^{-t}$ et $\int_0^1 \ln(t)$ sont de même nature. Or cette dernière intégrale est une intégrale de référence convergente! On peut donc affirmer que $\int_0^1 \ln(t).e^{-t}$ est une intégrale convergente

ii) $\boxed{\text{Etude de } \int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t}}$

D'après le théorème des croissances comparées, on peut affirmer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2. \ln(t).e^{-t} = 0$

ce qui permet de dire que $\ln(t).e^{-t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$.

Comme $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de référence absolument convergente, on peut affirmer par théorème de comparaison que $\int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t}$ est également une intégrale absolument convergente

iii) Comme $\int_0^1 \ln(t).e^{-t}$ et $\int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t}$ convergent, on peut affirmer que $\boxed{\int_0^{\infty} \ln(t).e^{-t} \text{ converge}}$

(c) i) $\boxed{\text{Intégrons par parties } S(1)}$

Comme l'intégrale est généralisée en sa borne inférieure, on va faire une intégration par parties sur $\int_x^1 f(t)dt$ avec $x > 0$.

En posant $u(t) = 1 - e^{-t}$ (et donc $u'(t) = e^{-t}$) et $v'(t) = \frac{1}{t}$ (et en choisissant $v(t) = \ln(t)$), cela donne

$$\int_x^1 f(t)dt = \left[(1 - e^{-t}) \ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \ln(t).e^{-t} dt = (e^{-x} - 1) \ln(x) - \int_x^1 \ln(t).e^{-t} dt$$

On sait que $e^{-x} - 1 =_0 1 + (-x) + o(x) - 1 = -x + o(x) \underset{0}{\sim} -x$

et donc $(e^{-x} - 1) \ln(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$.

Comme on sait que $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln(x) = 0$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{-x} - 1) \ln(x) = 0$

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus
(on sait déjà que $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_0^1 \ln(t).e^{-t}dt$ convergent), on peut écrire que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)dt = \lim_{x \to 0^+} (e^{-x} - 1) \ln(x) - \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \ln(t).e^{-t} dt$$

ce qui donne $\boxed{S(1) = -\int_0^1 f(t)dt = -\int_0^1 \ln(t).e^{-t} dt}$

ii) $\boxed{\text{Intégrons par parties } R(1)}$

Comme l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure, on va faire une intégration par parties sur $\int_1^x f(t)dt$ avec $x > 0$.

En posant $u(t) = e^{-t}$ (et donc $u'(t) = -e^{-t}$) et $v'(t) = \frac{1}{t}$ (et en choisissant $v(t) = \ln(t)$), cela donne

$$\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[e^{-t} \ln(t)\right]_1^x + \int_1^x \ln(t).e^{-t} dt = e^{-x}. \ln(x) + \int_1^x \ln(t).e^{-t} dt$$

D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}. \ln(x) = 0$

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus
(on sait déjà que $\int_1^{\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t} dt$ convergent),

on obtient $\boxed{R(1) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t} dt}$

iii) Par la relation de Chasles, on obtient bien

$$\gamma = S(1) - R(1) = -\int_0^1 \ln(t).e^{-t} dt - \int_1^{\infty} \ln(t).e^{-t} dt = -\int_0^{\infty} \ln(t).e^{-t} dt$$

(d) Pour tout $x > 0$ on a d'après la relation de Chasles

$$R(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

On retrouve maintenant une situation usuelle

- $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est tout simplement une constante
- Notons $T(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$.

  Comme la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$,
  on peut affirmer que T est la primitive de la fonction φ qui s'annule en 1.
  Ceci prouve que T est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0, T'(x) = \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

Au final, on a prouvé que $\boxed{R \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et que } \forall x > 0, R'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}}$

(e) Considérons la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} U :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & R(x) + \ln(x) + \gamma - S(x) \end{array}}$

La fonction U est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et l'on a

$$\forall x > 0, U'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} + 0 - f(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = 0$$

Ainsi la fonction U est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Comme de plus $U(1) = R(1) + \ln 1 + \gamma - S(1) = 0$ par définition de γ,
on a bien prouvé que $\boxed{\forall x > 0, S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma}$