PT* 24/25 - DM 10
à rendre le vendredi 10 janvier

Nous allons montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ est divergente.

Pour tout $x \geqslant \pi$, on note $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x}\frac{|\sin t|}{t}dt$

1. Simplifier pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$
2. (a) Montrer que pour tout entier k on a $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|dt = 2$

   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 2, F(n\pi) \geqslant \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ est divergente.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\pi}^{x}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt = +\infty$

1. Soit $n \geqslant 2$.
   Avec la relation de Chasles
$$\sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = F(n\pi)$$

2. (a) On distingue deux cas suivant la parité de k
      i) cas où k est impair.
         On a
$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ \sin t \geqslant 0$$
         et donc
$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t\, dt &= [-\cos t]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= \cos((k-1)\pi) - \cos(k\pi) \\ &= (-1)^{k-1} - (-1)^{k} \\ &= 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$
      ii) cas où k est pair.
         On a
$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ -\sin t \geqslant 0$$
         et donc
$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} -\sin t\, dt &= [\cos t]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= -\cos((k-1)\pi) + \cos(k\pi) \\ &= -(-1)^{k-1} + (-1)^{k} \\ &= -(-1) + 1 = 2\end{aligned}$$
   (b) Soit $n \geqslant 2$.
      On profite de deux questions précédentes
      i. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.
         Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[(k-1)\pi, k\pi]$, on a
$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k\pi}$$
         en multipliant par $|\sin t| \geqslant 0$, cela donne
$$\forall t \in [(k-1)\pi, k\pi],\ \frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{|\sin t|}{k\pi}$$
         Puis la croissance de l'intégrale et la question Q2(a) donnent
$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geqslant \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt = \frac{2}{k\pi}$$
      ii. En sommant les inégalités ci-dessus, et en utilisant Q1, on trouve directement l'inégalité demandée
$$F(n\pi) \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

3. i) Notons pour tout $n \geqslant 2, S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

On sait que

- S_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$
- La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ est divergente

On peut donc affirmer que la suite (S_n) est divergente.

(rem: à ce stade, ceci signifie que (S_n) possède une limite infinie OU ne possède pas de limite)

Pour pouvoir affirmer que $\lim S_n = +\infty$ il faut ensuite bien préciser que "le terme général de la série étant positif, on sait que la suite des sommes partielles est croissante, et donc si la suite diverge c'est forcément en tendant vers $+\infty$"

Ainsi $\boxed{\lim S_n = +\infty}$

ii) On sait d'après Q2b) que $\forall n \geqslant 2, F(n\pi) \geqslant S_n$.
Comme $\lim S_n = +\infty$, on a forcément $\lim F(n\pi) = +\infty$

iii) *Commençons par résumer la situation*

- *Montrer que* $\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *est une* ***intégrale*** *divergente revient à montrer que la* ***fonction*** *F ne possède pas de limite finie en $+\infty$*
- *On vient de montrer que la* ***suite*** $(F(n\pi))$ *tendait vers $+\infty$*

On peut par exemple procéder par l'absurde.

On suppose que l'intégrale $\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ **est convergente.**
Ceci signifie que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, càd qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{+\infty} F = l$.
Comme $\lim_{n\to\infty} n\pi = +\infty$, on aurait alors par composition de limites $\lim_{n\to+\infty} F(n\pi) = l$.

Contradiction

Conclusion: $\boxed{\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \text{ diverge}}$

4. *Il s'agit de bien faire la différence entre cette question et la question précédente.*

En Q3, on a montré que la fonction F ne possède pas de limite finie en $+\infty$, càd que F posssède une limite infinie ou F ne possède pas de limite.

Comme la fonction $f : t \mapsto \frac{|\sin t|}{t}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$, on sait d'après le théorème fondamental de l'analyse que F est C^1 sur cet intervalle, et que $\forall x \geqslant \pi, F'(x) = \frac{|\sin x|}{x} \geqslant 0$.

Ainsi la fonction F est croissante sur $[2, +\infty[$.

Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que F possède une limite l en $+\infty$.
A la question précédente, on a montré que forcément $l = +\infty$.