PT* 2024-25
DS 3 du 9 décembre 2024
durée 4h
(sortie autorisée à partir de 16h30)

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Ce devoir est composé de trois exercices totalement indépendants, et de deux questions de cours

---

Questions de cours

1. Ecrire le théorème de condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité pour une matrice

2. Définition et propriétés caractéristiques des projecteurs

Premier exercice.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{E}_1) : M^2 - 2M = A$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1$$

$$(E_3) : x^2 - 2x = 3$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable?
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1 .

   (a) Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$.
   On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.
   (b) Démontrer que $MA = AM$.
   (c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.
   (d) En déduire que la matrice Δ est diagonale.

4. (a) Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$.
   (b) En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Partie B :

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.
2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M. Établir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.

   (a) Soit $\alpha = -1$. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M.
   (b) Soit $\alpha \neq -1$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable. Préciser les matrices diagonales D, semblables à M, possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2).
   (c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
   (d) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

Deuxième exercice.

question préliminaire:
Soit E un $\mathbb{R}-$ev et F un sous-espace vectoriel de E.
Soit f un endomorphisme de E.
On note $\boxed{\begin{array}{rcl} h : F & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}}$

Exprimer $\ker(h)$ en fonction de F et de $\ker(f)$

Dans la suite de cet exercice, on considère E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 6,
et f un endomorphisme de E telle que $\text{rg}(f) = 4$ et $f^3 = f \circ f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

2. Justifier une inclusion entre $\text{Im}(f^2)$ et $\ker(f)$, ainsi qu'une inclusion entre $\text{Im}(f)$ et $\ker(f^2)$

3. On note $F = \text{Im}(f)$ et on considère $\boxed{\begin{array}{rcl} h : F & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}}$

   (a) En appliquant le théorème du rang et en utilisant le préliminaire,
   montrer que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2) + \dim(\text{Im}(f) \cap \ker(f))$

   (b) Justifier que $\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(f)) \leqslant \dim(\ker(f))$ puis que $\dim(\ker(f^2)) \leqslant 2.\dim(\ker(f))$
   (On pourra appliquer le théorème du rang à f^2)

   (c) En déduire que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f^2)$ sont deux espaces de dimension deux et qu'ils sont égaux

4. (a) Justifier qu'il existe deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ telles que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit une base de $\ker(f)$

   (b) Justifier qu'il existe 4 vecteurs $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ et $\vec{e}_6$ tels que $\begin{cases} f^2(\vec{e}_5) & = \vec{e}_1 \\ f^2(\vec{e}_6) & = \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_5) & = \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_6) & = \vec{e}_4 \end{cases}$

   (c) Montrer que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6)$ ainsi définie est une base de E.

   (d) Ecrire la matrice de f dans la base précédente.

Troisième exercice.

Dans tout cet exercice, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue; on note E_f l'équation différentielle du second ordre $y'' + y = f$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t).\sin(x-t).dt$$

Dans tout cet exercice, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles.

1. 1.1 Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutons sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel

   1.2 Préciser une base et la dimension de $\mathcal{S}_0$

2. Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t).\cos t.dt$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t).\sin t.dt$

   2.1 Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$

   2.2 Montrer que pour tout $x \in I$

   $$\varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x).\sin x - \varphi_2(x).\cos x$$

   Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

   2.3 En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi'_{f,x_0}(x)$ pour tout $x \in I$.
   Que vaut $\varphi'_{f,x_0}(x_0)$?

   2.4 Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable et qu'elle est solution sur I de l'équation différentielle E_f

   2.5 Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution sur I de l'équation différentielle E_f s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0. *On écrira avec précision le théorème utilisé*

   2.6 Donner la solution générale de E_f sur I

Premier exercice.

Partie A :

1.
   - Les solutions de (E_1) sont 0 et 2.

   - (E_2) admet 1 comme solution double.

   - Les solutions de (E_3) sont -1 et 3.

2. (a) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -3 \\ -3 & X+3 & -3 \\ -4 & 4 & X-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1+C_2\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}}{=} \begin{vmatrix} X-2 & X & -X-1 \\ -3 & X & 0 \\ -4 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = X(X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \underset{L_1-L_2+L_3\to L_1}{=} X(X+1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X(X+1)(X-3)$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de la matrice } A \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 3, \text{ toutes simples}}$

(b) χ_A est scindé à racines simples, donc, d'après la condition suffisante de diagonalisabilité, la matrice A est diagonalisable et chaque sep est de dimension un

(c) Soit E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+3z=0 \\ 3x-2y+3z=0 \\ 4x-4y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x, y=0.$$

Ainsi, $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{0} \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ 4x-4y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=0, y=x.$$

Ainsi, $E_{0} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{3} \Leftrightarrow (A-3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+3z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ 4x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$$

Ainsi, $E_{3} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Comme A est diagonalisable, on sait que $E_{-1}\oplus E_0 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$ et que la concaténation des bases des sous-espaces propres de A donne une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut ainsi écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1 .

   (a) **Multiplier une égalité matricielle par une matrice inversible donne une égalité équivalente.**
   Ainsi on a les équivalences

$$\begin{aligned} M^2 - 2M = A &\iff P^{-1}M^2P - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \\ &\iff (P^{-1}MP)^2 - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \iff \Delta^2 - 2\Delta = D \end{aligned}$$

   On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

   (b) On a alors $A = M^2 - 2M$.
   Donc

$$MA = M(M^2 - 2M) = M^3 - 2M^2 = (M^2 - 2M)M = AM$$

   Finalement, $\boxed{MA = AM}$.

   (c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   On a donc $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$
   D'abord, comme λ est une valeur propre simple on sait que le sep $E_\lambda(A)$ est une droite vectorielle, et donc $E_\lambda(A) = \mathrm{vect}(X)$
   D'autre part, on a

$$AY = A(MX) = (AM)X = (MA)X = M(AX) = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda Y$$

   Donc le vecteur $Y = MX$ appartient à $E_\lambda(A)$
   Ainsi $Y = MX \in \mathrm{vect}(X)$
   Donc Y est colinéaire à X et il existe un réel μ tel que $MX = \mu X$.
   Comme de plus $X \neq 0$, on peut affirmer que X est un vecteur propre de M.

   (d) Notons C_1,C_2,C_3 les colonnes de P.
   D'après ce qui précède, ces colonnes sont aussi des vecteurs propres de M, ce qui assure que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

   On a bien $\boxed{\Delta \text{ matrice diagonale}}$

4. (a) Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
   $\Delta^2 - 2\Delta = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 2a = -1 \\ b^2 - 2b = 0 \\ c^2 - 2c = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \text{ ou } b = 2 \\ c = -1 \text{ ou } c = 3 \end{array} \right.$
   Les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$ sont donc :
   $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) M est solution de $M^2-2M=A$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale solution de $\Delta^2-2\Delta=D$.
Ainsi, les matrices M vérifiant $M^2-2M=A$ sont
$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$, $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$, $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$ et $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$.

Partie B :

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2-2M=\alpha I$ où $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\alpha\in\mathbb{C}$.

1. Soit M une matrice solution de $(\mathcal{E}_2)$.
Notons N une matrice semblable à M.
On sait qu'il existe P matrice inversible telle que $N=P.M.P^{-1}$
On a aussi $N^2=P.M^2.P^{-1}$
et donc
$$N^2-2N=P.M^2.P^{-1}-2P.M.P^{-1}=P.(M^2-2M).P^{-1}$$
Or
$$M^2-2M=\alpha I$$
donc
$$N^2=P.(\alpha I).P^{-1}=\alpha.P.P^{-1}=\alpha.I$$
Donc, si $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.

2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M.
Soit X un vecteur propre de M associé à λ.
On a $X\neq 0$, $MX=\lambda X$ et $M^2X=M(\lambda X)=\lambda^2X$.
Or $M^2-2M=\alpha I$, donc $(M^2-2M-\alpha I)X=0$, soit $(\lambda^2-2\lambda-\alpha)X=0$.
Or $X\neq 0$, donc $\lambda^2-2\lambda-\alpha=0$, ou encore $\lambda^2-2\lambda=\alpha$.

3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2-2\lambda=\alpha$.

   (a) Soit $\alpha=-1$.
   On va procéder par double implication.

   - On suppose que M est solution $(\mathcal{E}_2)$.
   D'après Q2, on sait que les valeurs propres de M vérifient l'égalité $\lambda^2-2\lambda=-1$.
   On sait alors d'après Q1 que $\lambda=1$.
   A ce niveau on a montré que la seule valeur propre possible de A est 1.
   Or dans $\mathbb{C}$, on sait que M possède 2 valeurs propres comptées avec leur multiplicités (car M est une matrice d'ordre 2).
   On en déduit donc que 1 est valeur propre double de de M
   - On suppose que 1 est valeur propre double de M.
   On a ainsi $\chi_M=(X-1)^2$.
   Comme χ_M est scindé, on sait que M est trigonalisable et que M est semblable à une matrice T de la forme $T=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$.

On a

$$T^2-2T=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-I_2$$

Ainsi T vérifie $(\mathcal{E}_2)$, et d'après Q1, on peut affirmer que toute matrice semblable à T vérifiera aussi $(\mathcal{E}_2)$, donc M vérifie $(\mathcal{E}_2)$

(b) Soit $\alpha \neq -1$.
Notons avant tout que si $\alpha \neq -1$, l'équation $\lambda^2-2\lambda=\alpha$ possède deux racines distinctes car $\Delta = 4+4\alpha \neq 0$.
Dans le cas que nous traitons, nous avons donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

On suppose que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
Dans $\mathbb{C}$, on sait que le polynome caractéristique de M est scindé et sera de la forme $\chi_M = (X-l_1).(X-l_2)$.
On sait aussi que les seules valeurs propres possibles de M sont λ_1 et λ_2 (éventuellement de multiplicité deux).
3 cas sont alors à envisager

i. cas où $\chi_M=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
Dans ce cas χ_M est scindé à racines simples et M est diagonalisable semblable à la matrice $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$.

ii. cas où $\chi_M=(X-\lambda_1)^2$.
Dans ce cas, on peut affirmer que M est trigonalisable, semblable à une matrice $T=\begin{pmatrix}\lambda_1&k\\0&\lambda_1\end{pmatrix}$.
Comme M vérifie $(\mathcal{E}_2)$, on sait que T vérifiera aussi $(\mathcal{E}_2)$.
Or on a

$$\begin{aligned}0=T^2-2T-\alpha I_2&=\begin{pmatrix}\lambda_1&k\\0&\lambda_1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}\lambda_1&k\\0&\lambda_1\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&2k\lambda_1\\0&\lambda_1^2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\lambda_1&k\\0&\lambda_1\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1^2-2\lambda_1-\alpha&2k(\lambda_1-1)\\0&\lambda_2^2-2\lambda_2-\alpha\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&2k(\lambda_1-1)\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui donne $k.(\lambda_1-1)=0$.
Cependant, on a $\lambda_1 \neq 1$! (En effet si c'était le cas, on aurait $\alpha=\lambda_1^-2\lambda_1=-1$ ce qui est exclu).
On a donc $k=0$, et donc $T=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_1\end{pmatrix}$
On a bien prouvé que dans ce cas aussi, M est semblable à une matrice diagonale, à savoir $\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_1\end{pmatrix}$

iii. cas où $\chi_M = (X-\lambda_2)^2$.
Même raisonnement que précédemment, on trouve M est semblable à une matrice diagonale, à savoir $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

(c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente.
On a vu que $D = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$ avec $(i,j) \in \{1,2\}^2$
Donc
$$D^2 - 2D = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i^2 - 2\lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j^2 - 2\lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
Ainsi D vérifie l'équation $(\mathcal{E}_2)$ et d'après Q2, on peut alors affirmer que M aussi

(d) Pour $\alpha = 0$, l'équation donnant les valeurs propres est $x^2 - 2x = 0$. Les solutions sont les matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0,2\}$.
Par exemple $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ convient, son polynôme caractéristique étant $X(X-2)$, il est scindé à racines simples, cette matrice est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 2.
Vérification $M_0^2 - 2M = \begin{pmatrix} 0 & 2-2 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix} = 0$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

préliminaire:

- Par définition, on a $\boxed{\ker(f) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}}$ et $\boxed{\ker(h) = \{\vec{x} \in F \mid h(\vec{x}) = \vec{0}\}}$
- On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \ker(h) &= \{\vec{x} \in F \mid h(\vec{x}) = \vec{0}\} \\ &= \{\vec{x} \in E | \vec{x} \in F \text{ et } h(\vec{x}) = \vec{0}\} \\ &= \{\vec{x} \in E | \vec{x} \in F \text{ et } f(\vec{x}) = \vec{0}\} \qquad \text{car } h(\vec{x}) = f(\vec{x}) \\ &= \{\vec{x} \in E | \vec{x} \in F \text{ et } \vec{x} \in \ker(f)\} \\ &= F \cap \ker(f) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boxed{\ker(h) = F \cap \ker(f)}$ *(fait en classe)*

1. (a) Montrons que $\boxed{\ker(f) \subset \ker(f^2)}$.
Soit $\vec{x} \in \ker(f)$
c'est à dire $f(\vec{x}) = \vec{0}$.
Comme f est une application linéaire, on sait que $f(\vec{0}) = \vec{0}$
On a ainsi $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$
ce qui prouve que $\vec{x} \in \ker(f^2)$
On a bien montré que $\forall \vec{x} \in \ker(f), \vec{x} \in \ker(f^2)$

(b) Montrons que $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f^2)$
c'est à dire qu'il existe $\vec{t} \in E$ tel que $\vec{x} = f^2(\vec{t}) = f(f(\vec{t}))$
Notons $\vec{y} = f(\vec{t})$.
On a alors $\vec{x} = f(\vec{y})$
ce qui prouve que $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$
On a bien montré que $\forall \vec{x} \in \mathrm{Im}(f^2), \vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$

2. • Montrons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \ker(f)$.
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f^2)$.
Ceci signifie qu'il existe $\vec{t} \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = f^2(\vec{t})$.
On a donc $f(\vec{x}) = f^3(\vec{t}) = \vec{0}$ car $f^3 = 0$.
ce qui prouve que $\vec{x} \in \ker(f)$.
On a bien montré que $\forall \vec{x} \in \mathrm{Im}(f^2), \vec{x} \in \ker(f)$

• Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f^2)$.
Soit $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$.
Ceci signifie qu'il existe $\vec{t} \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = f(\vec{t})$.
On a donc $f^2(\vec{x}) = f^3(\vec{t}) = \vec{0}$ car $f^3 = 0$.
ce qui prouve que $\vec{x} \in \ker(f^2)$.
On a bien montré que $\forall \vec{x} \in \mathrm{Im}(f), \vec{x} \in \ker(f^2)$

3. (a) • D'après le préliminaire, on a

$$\ker(h) = F \cap \ker(f) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$$

• On a

$$\mathrm{Im}(h) = \{h(\vec{x}) | \vec{x} \in \mathrm{Im}(f)\}$$

Or par définition

$$\vec{x} \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \exists \vec{t} \in E, f(\vec{t}) = \vec{x}$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Im}(h) = \{h(f(\vec{t})) | \vec{t} \in \ E\} = \{f^2(\vec{t}) | \vec{t} \in E\} = \mathrm{Im}(f^2)$$

• Le théorème du rang appliqué <u>à h</u> donne $\dim(F) = \dim \ker(h) + \dim(\mathrm{Im}(h)$, c'est à dire

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f^2))$$

On a bien prouvé que

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f))}$$

(b) • Comme $\text{Im}(f) \cap \ker(f)$ est inclus dans $\ker(f)$, on a

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(f)) \leqslant \dim(\ker(f))}$$

• De l'inégalité ci-dessus et de l'égalité en 3(a), on peut en déduire que

$$\text{rg}(f) \leqslant \text{rg}(f^2) + \dim(\ker(f)) \qquad (*)$$

• Le théorème du rang appliqué $\underline{\text{à } f}$ donne $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$
(en passant, ceci prouve que $\boxed{\dim(\ker(f)) = 6 - 4 = 2}$ *(on utilisera ce résultat plus tard!))*

• Le théorème du rang appliqué $\underline{\text{à } f^2}$ donne $\dim(E) = \text{rg}(f^2) + \dim(\ker(f^2)) \quad (**)$

• En reportant ces deux résultats dans (*) on obtient

$$\dim(E) - \dim(\ker(f)) \leqslant \dim E - \dim \ker(f^2) + \dim(\ker(f))$$

et au final $\boxed{\dim(\ker(f^2)) \leqslant 2.\dim(\ker(f))}$

(c) • L'inégalité ci-dessus donne numériquement $\dim \ker(f^2) \leqslant 2 \times 2 = 4$

• On a vu en Q2), que $\text{Im}(f) \subset \ker(f^2)$.
On a donc $\dim \text{Im}(f) \leqslant \dim \ker(f^2)$ c'est à dire $4 \leqslant \dim \ker(f^2)$

• Les deux inégalités ci-dessus donnent $\dim(\ker(f^2)) = 4$
On en déduit avec (**) que $\boxed{\dim(\text{Im}(f^2)) = 2}$

• On a $\text{Im}(f^2) \subset \ker(f)$ d'après Q2) et ces espaces ont même dimension,
on peut affirmer par théorème que $\boxed{\text{Im}(f^2) = \ker(f)}$

4. (a) Comme $\ker(f)$ est un sev de dimension 2,
il existe deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ telles que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit une base de $\ker(f)$

(b) Comme $\ker(f) = \text{Im}(f^2)$ d'après 3(c), les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont donc deux vecteurs de $\text{Im}(f^2)$ également.

• Or dire que $\vec{e}_1 \in \text{Im}(f^2)$ signifie qu'il existe un vecteur $\vec{e}_5 \in E$ tel que $f^2(\vec{e}_5) = \vec{e}_1$.

Posons alors simplement $\vec{e}_3 = f(\vec{e}_5)$

• On tient un raisonnement identique qui assure l'existence de $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_4$

(c) • **Commençons par montrer que la famille** $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6)$ **est libre.**

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\lambda_1.\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4 + \lambda_5\vec{e}_5 + \lambda_6\vec{e}_6 = \vec{0}$
On a donc

$$\lambda_1.f^2(\vec{e}_5) + \lambda_2.f^2(\vec{e}_6) + \lambda_3.f(\vec{e}_5) + \lambda_4.f(\vec{e}_6) + \lambda_5\vec{e}_5 + \lambda_6\vec{e}_6 = \vec{0} \qquad (*)$$

En composant par f^2, et en tenant compte du fait que $f^3 = 0$, cela donne

$$\lambda_5.f^2(\vec{e}_5) + \lambda_6.f^2(\vec{e}_6) = \vec{0}$$

càd

$$\lambda_5.\vec{e}_1 + \lambda_6.\vec{e}_2 = \vec{0}$$

Or la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une famille libre car c'est une base,
on peut donc affirmer que $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$.
En reportant dans $(*)$ cela donne

$$\lambda_1.f^2(\vec{e}_5) + \lambda_2.f^2\vec{e}_6) + \lambda_3.f(\vec{e}_5) + \lambda_4.f(\vec{e}_6) = \vec{0}$$

En composant par f, et en tenant compte du fait que $f^3 = 0$, on obtient cette fois

$$\lambda_3.f^2(\vec{e}_5) + \lambda_4.f^2(\vec{e}_6) = \vec{0}$$

c'est à dire $\lambda_3.\vec{e}_1 + \lambda_4.\vec{e}_2 = \vec{0}$
Or la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une famille libre car c'est une base,
on peut donc affirmer que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
En reportant dans $(*)$ cela donne simplement $\lambda_1.\vec{e}_1 + \lambda_2.\vec{e}_2 = \vec{0}$,
ce qui permet d'affirmer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On a bien prouvé que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_6 = 0$

$\boxed{\text{Conclusion: } (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6) \text{ est une famille libre.}}$

- La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6)$ est une famille libre de E et $card(\mathcal{B}) = 6 = \dim E$, on peut alors affirmer par théorème que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$

(d) La matrice de f dans la base précédente est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Troisième exercice

1. 1.1 Notons $\mathcal{S}_0 = \{y \in D^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, y'' + y = 0\}$
et vérifions que $\mathcal{S}_0$ est un sev de $D^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

   i. $\mathcal{S}_0 \subset D^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition

   ii. $\mathcal{S}_0$ est non vide car contient la fonction constante nulle

   iii. $\mathcal{S}_0$ est stable par combinaison linéaire.
   En effet,
   Soit $(f,g) \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Notons $h = \lambda.f + g$

$$\begin{aligned} h'' + h &= (\lambda.f + g)'' + (\lambda.f + g) \\ &= \lambda.f'' + g'' + \lambda.f + g \qquad \textit{linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda.(f'' + f) + g'' + g \\ &= \lambda.0 + 0 \qquad \textit{car } f \textit{ et } g \textit{ dans } \mathcal{S}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Conclusion $\boxed{\mathcal{S}_0 \text{ est bien un espace vectoriel}}$

1.2 $\boxed{\dim \mathcal{S}_{\prime} = 2 \text{ et une base est } (\sin\,,\,\cos)}$

2. 1 • Comme f est continue sur I, la fonction $f_1 : t \mapsto f(t).\cos t$ est continue sur I comme produit de fonctions continues.
Le théorème fondamental de l'analyse permet alors d'affirmer que φ_1 est l'unique primitive de f_1 qui s'annulle en x_0. En particulier φ_1 est dérivable sur I avec $\varphi_1'(x) = f(x).\cos x$

• Par le même raisonnement: φ_2 est dérivable sur I avec $\varphi_2'(x) = f(x).\sin x$

2 Soit $x \in I$.
On a

$$\begin{aligned}\forall t \in [x,x_0], f(t).\sin(x-t) &= f(t).(\sin x.\cos t - \cos x.\sin t)\\ &= \sin x.f(t).\cos t - \cos x.f(t).\sin t\end{aligned}$$

et donc par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} \sin x.f(t).\cos t - \cos x.f(t).\sin t\,dt\\ &= \sin x.\int_{x_0}^{x} f(t).\cos t.dt - \cos x.\int_{x_0}^{x} f(t).\sin t.dt\\ &= \sin x.\varphi_1(x) - \cos x.\varphi_2(x)\end{aligned}$$

$\boxed{\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0}$

3 • D'après l'égalité ci-dessus, φ_{f,x_0} est la somme et le produit de fonctions dérivables sur I, donc φ_{f,x_0} est dérivable sur I.
Soit $x \in I$

$$\begin{aligned}\varphi'_{f,x_0}(x) &= \cos x.\varphi_1(x) + \sin x.\varphi_1'(x) + \sin x.\varphi_2(x) - \cos x.\varphi_2'(x)\\ &= \cos x.\varphi_1(x) + \sin x.\varphi_2(x)\end{aligned}$$

$\boxed{\varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0}$

4 D'après l'égalité ci-dessus, φ'_{f,x_0} est la somme et le produit de fonctions dérivables sur I, donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I, càd φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I
Soit $x \in I$

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= -\sin x.\varphi_1(x) + \cos x.\varphi_1'(x) + \cos(x).\varphi_2(x) + \sin x.\varphi_2'(x)\\ &= -\sin x.\varphi_1(x) + \cos^2 x.f(x) + \cos(x).\varphi_2(x) + \sin^2 x.f(x)\\ &= \sin x.\varphi_1(x) + \cos(x).\varphi_2(x) + (\cos^2 x + \sin^2 x).f(x)\\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall x \in I, \varphi''_{f,x_0}(x) + \varphi_{f,x_0}(x) = f(x)$$

φ_{f,x_0} est bien solution sur I de l'équation différentielle E_f

5 $\begin{cases} y'' + y = 0 \text{ sur I} \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$ constitue un problème de Cauchy linéaire de second ordre.

On sait alors qu'il existe une et une seule solution à ce problème. La fonction φ_{f,x_0} vérifiant ces trois conditions, c'est bien la seule solution à ce problème!

6 E_f est une équation différentielle linéaire d'ordre deux normalisée avec second membre, sa solution générale s'écrit comme la somme de l'équation sans second membre associée et d'une solution particulière, càd ici

$$\begin{array}{rcl} y : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\cos x + B.\sin x + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t).\sin(x-t)dt \end{array}$$