1 Fonctions: continuité, dérivabilité,...

ANA 1 (équivalent et ln)

1. A-t-on $1+x \underset{0}{\sim} 1+x^2$? A-t-on $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln(1+x^2)$
2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point a.

   On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que $\begin{cases} g \text{ est strictement positive} \\ g \text{ admet une limite } l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \text{ autre que } 1 \end{cases}$

   (a) f est-elle strictement positive?

   (b) Montrer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

ANA 2 (classique)

1. Justifier que $\arcsin(y) - \dfrac{\pi}{6} \underset{1/2}{\sim} \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(y-\dfrac{1}{2})$
2. Justifier que $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin y \underset{y\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}$

ANA 3

Déterminer les équivalents suivants

1. a) $x.\ln(e^x+1)$ en $-\infty$ b)$x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$ c)$\dfrac{\ln(x^2+x+1).\arctan x}{\ln(x+1)}$ en 0 et en $+\infty$
2. a)$\dfrac{(1-\cos x).\tan x}{x.\sin^2(3x)}$ en 0 b) $x^\alpha - 1$ en 1 c) $\dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\dfrac{\pi}{4}$

ANA 4

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1} e^{1/x}$

1. Montrer que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque $x \to +\infty$
2. Etudier la position de l'asymptote par rapport à la courbe. $\mathcal{C}_f$

ANA 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui possède $n+1$ racines disctinctes.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

ANA 6 (continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.
Montrer que f possède un unique point fixe, càd qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$

ANA 7 (continuité)

Soit f une fonction définie et cntinue sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$.
On définit la foncton $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$

1. Montrer que g est une fonction périodique et justifier qu'elle soit bornée sur $\mathbb{R}$
2. En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ainsi qu'un équivalent de f en $+\infty$

ANA 8 (inégalités diverses)

1. Montrer que $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[, |\tan x| \geqslant |x|$
2. Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$
3. Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1, \forall x \geqslant 0, (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha.x$

ANA 9

Etudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-x-2}$ sur son ensemble de définition

ANA 10 (bonne utilisation du théorème de la limite de la dérivée)

On pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $[-1,+1]$
2. Etudier la dérivabilité de f sur $[-1,+1]$ en distinguant éventuellement des cas, et donner sa dérivée.
3. En déduire un expression simple de $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$

FONCTIONS RÉCIPROQUES.

ANA 11 (fonction réciproque)

Soit $f : x \mapsto x.e^{x^2}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera
2. Montrer que f^{-1} admet un DL à l'ordre 4 en 0
3. Déterminer ce DL

ANA 12 (fonction réciproque)

Soit $f : x \mapsto x + x^2 - x^3$

1. Déterminer deux intervalles I et J contenant 0 tels que f réalise une bijection de I sur J
2. On note g la fonction réciproque de la restriction de f à I. Montrer que g admet un DL à l'ordre 4 en 0 et le calculer

ANA 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Réduire le domaine d'étude
3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative
4. Montrer que f réalise une bijection de $I = [0,\pi/4]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la fonction réciproque .
5. Donner les variations de g et représenter sa courbe représentative sur le graphique précédent
6. Justifier que $\forall x \in J, \begin{cases} \cos(g(x)) = \dfrac{1}{x} \\ \sin(g(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$
7. Montrer que g est dérivable sur $J - \{1\}$ et qu'alors $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ÉTUDE DE PROLONGEMENTS.

ANA 14 (prolongement C^1)

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2\pi x}{4\pi \sin \dfrac{x}{2}} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

ANA 15 (prolongement)

La fonction $x \mapsto x^2.\sin(\dfrac{1}{x})$ peut-elle être prolongée en 0 en une fonction dérivable en ce point?

ANA 16 (prolongement et C^∞)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,+1[$

ANA 17
prolongement et C^2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

1. Déterminer la limite l de f en 0, puis un équivalent de $f(x) - l$ lorsque $x \to 0$
2. On pose $f(0) = l$. Etudier si ce prolongement est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? Dérivable? C^1?

ANA 18
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x.e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

1. La fonction f est-elle C^∞ sur son ensemble de définition?
2. La fonction f a-t-elle une parité particulière?
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   Ce prolongement est-il dérivable?

ANA 19

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2.\ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Soit f comme ci-dessus.
La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?

Dérivées $n-$ième

ANA 20

Soit $f : \begin{array}{ccc}]-\pi/2, +\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$

1. Calculer f' et f''
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel
   que $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$
   Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'
3. Trouver le monôme de plus haut degré de P_n

ANA 21 (dérivée $n-$ième)

1. Déterminer la dérivée $n-$ième de $x \mapsto e^x.\cos x$
2. Déterminer la dérivée $n-$ième de $x \mapsto \sin^2 x.\cos x$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$
   Déterminer la dérivée $n-$ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$
   Déterminer la dérivée $n-$ième de $x \mapsto e^{x.\operatorname{ch} a}.\operatorname{ch}(x.\operatorname{sh} a)$

ANA 22
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^{n-1}.e^{1/x}$.
Montrer que f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n)}(x) = (-1)^n.x^{-n-1}.e^{1/x}$ pour tout $x \neq 0$

2 Intégrales I.

ANA 23
Indiquer parmi les intégrales suivantes celles qui font parties du chapitre Intégration I

$$A = \int_0^1 \ln(t)dt \qquad B = \int_1^3 \frac{t-1}{t+2}dt \qquad C = \int_1^2 \frac{t+2}{t^2-4} \qquad D = \int_0^\infty e^{-t}dt$$

ANA 24
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Justifier que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis donner leurs dérivées.

$$G : x \mapsto \int_3^{x^2} f(t)dt \qquad H : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} f(t)dt \qquad J : x \mapsto \int_0^x e^{3x}.f(t)dt$$

ANA 25
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Existe-t-il une primitive F de f sur $[0,1]$ telle que $F(1/2) = 2030$? Est-elle unique?
2. Existe-t-il une primitive G de f sur $[0,1]$ telle que $\lim\limits_{x \to 1^-} G(x) = +\infty$?
3. Existe-t-il une primitive H de f sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 H(t)dt = 0$? Est-elle unique?

ANA 26
Montrer que si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$

ANA 27 (lemme de Lebesgue - très classique)
Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$

fonctions définies par une intégrale:

ANA 28
On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

1. Ensemble de définition de f?
2. Réduction de l'intervalle d'étude?
3. Etudier les variations de f ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition
4. Dessiner l'allure du graphe de f

ANA 29
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et déterminer le signe de g'
2. La fonction g est-elle paire ou impaire? Que vaut $g'(0)$?
3. Pour $x > 0$ donner un encadrement de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{t} - g(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ln 3$
4. Donner l'allure de la courbe représentative de g.
5. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
   puis déterminer une expression de $g(x)$ en fonction de h sans le signe $\int$

ANA 30
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \arctan(t^2)dt$

1. Montrer que g est une fonction impaire
2. Montrer que g est strictement positive sur $]0, +\infty[$
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer g' et montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   (suite autre page)

4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $2x\arctan(x^2) \leqslant g(x) \leqslant 2x\arctan(9x^2)$ puis en déduire que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \pi.x$
5. Montrer que $\forall x > 0, \pi.x - g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \arctan(\frac{1}{t^2})dt$
   En déduire que cette différence tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et que la courbe représentative de g admet une droite asymptote
6. Donner l'allure de la courbe représentative de g

ANA 31

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner $g'(x)$ ainsi que son signe
3. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et dresser le tableau de variation de g
4. Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

ANA 32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $\forall x > 0$, $\ln\dfrac{x+1}{x} \leqslant f(x) \leqslant e\ln\dfrac{x+1}{x}$
4. En déduire les limites de f aux bornes de l'ensemble de défnition
5. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$

ANA 33

On note $H : x \in]0, +\infty[\rightarrow \displaystyle\int_0^x \ln^2(1 + x.t).dt$.

En introduisant la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln^2(1+t)dt$, montrer que H est C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée

ANA 34

Etude des fonctions f_i définies par

$$f_1(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t} \qquad f_2(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-1/t}}{t}dt$$

FORMULES DE TAYLOR:

ANA 35

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et g définie que $[a,b]$ par $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.f(t)dt$

Montrer que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et que $g^{(n)} = f$

ANA 36

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\forall x \in [0,\pi/2], 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

CHANGEMENT DE VARIABLE

ANA 37

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall t \in [a,b], f(a+b-t) = f(t)$

1. Donner l'interprétation géométrique de cette condition
2. Montrer que : $\forall t \in [a,b]$, $\int_a^b tf(t)dt = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$
3. En déduite $\displaystyle\int_0^\pi t.\sin^3(t).dt$

ANA 38

Soit $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{4}]$ fixé.

Calculer $\int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \sin(t).\cos(t).\ln(\tan t)dt$ en posant $x = \dfrac{\pi}{2} - t$

Proposer un autre moyen de justifier ce résultat et le mettre en oeuvre

ANA 39

A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\pi}{4} - x$, calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)$

SOMMES DE RIEMANN

ANA 40

Calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n\alpha + k}(\alpha > 0 \text{ fixé}) \qquad c_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 2kn + n^2}$$

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n}} \qquad e_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k.\exp(-\frac{k}{n}) \qquad f_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n} \qquad g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \qquad i_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{1/n} \qquad j_n = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)\ldots(n+n)}{n^n}}$$

ANA 41 (démonstration de la méthode des rectangles)

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.

On note pour tout $k \in [\![0,n]\!], x_k = a + k.\dfrac{b-a}{n}$

1. Justifier que $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ existe
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)dx$
3. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \dfrac{M.(b-a)^2}{2n}$
4. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + O(\frac{1}{n})$

ANA 42

Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$ en introduisant une somme de Riemann

ANA 43

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant une somme de Riemann, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt = \ln 2$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\right) dt$. Etonnant?

ANA 44
Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \neq 1$.
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt$

3 Suites numériques

AUTOUR DES PREMIÈRES DÉFINITIONS

ANA 45 (bornée à partir d'un certain rang. . .)
Soit une suite réelle (u_n) pour laquelle on sait que $\exists \varepsilon > 0, \forall n \geqslant 3, |u_n - 4| \leqslant \varepsilon$

i) Peut-on dire que la suite (u_n) est convergente?
ii) Peut-on dire que la suite (u_n) est bornée? Si oui, donner un majorant et un minorant.

ANA 46
Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$.

1. Montrer qu'en général on n'a pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$
2. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ ssi $\lim u_n - v_n = 0$

ANA 47
Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall B \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \geqslant B$.

1. A-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier
2. Si l'on suppose de plus que (u_n) est croissante, a-t-on $\lim u_n = +\infty$? Justifier

ANA 48
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers 4.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant 4.3$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $4 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant 4 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

ANA 49 (Toute suite d'entiers convergente est stationnaire, à savoir refaire)
Soit $(k_n)_{n\geqslant 0}$ une suite **d'entiers**.
On suppose qu'elle converge vers la limite k.
Nous allons montrer que la suite (k_n) est nécessairement une suite stationnaire.

1. Rappeler la définition avec les quantificateurs de $\lim k_n = k$
2. Montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geqslant N_1, \forall m \geqslant N_1, |k_n - k_m| \leqslant 2\epsilon$
3. En choisissant judicieusement une valeur de ϵ, montrer que $\forall n \geqslant N_1, k_n = k_{N_1}$
4. Conclure

ANA 50
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim u_n = l > 0$.
Montrer qu'il existe $k > 0$ et $n_0 \geqslant 0$ tels que $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant k$

SUITES EXTRAITES

ANA 51
Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites $((u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2}) convergente vers une même limite l

1. Rappeler la définition de la convergence de ces 3 suites à l'aide de ε.
   (On introduira des rangs notés N_0, N_1 et N_2)
2. $\varepsilon > 0$ étant un réel fixé.
   Justifier qu'il existe $N_4 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N_4, |u_k - l| \leqslant \varepsilon$
3. Que vient-on de justifier?

ANA 52

1. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}),(u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Nous allons montrer qu'alors (u_n) converge aussi. On note $l_1 = \lim u_{2n+1}, l_2 = \lim u_{2n}$ et $l_3 = \lim u_{3n}$
   (a) Rappeler les résultats de cours que vous connaissez relatifs aux suites extraites.
   (b) En considérant la suite (u_{6n}), montrer que $l_2 = l_3$
   (c) Montrer que $l_1 = l_3$
   (d) Conclure
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que (u_{2n}),(u_{2n+1}) et (u_{4n}) convergent?

ANA 53
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\forall n \geqslant 1, \forall p \geqslant 1, 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \dfrac{n+p}{np}$
Etudier la convergence de la suite (u_n)

ANA 54
Soit $u = (u_n)$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{\infty} u_{2n} = l \in \mathbb{R}$.

1. La suite (u_n) est-elle forcément convergente? Justifier.
2. On suppose de plus que (u_n) est croissante.
   Montrer que $\lim u_n = l$

SUITES DÉFINIES DE MANIÈRE EXPLICITE

ANA 55
Soient a et b deux réels. On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|}$

1. Le raisonnement suivant est-il correct? "Lorque n tend vers l'infini, on a $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|}$ qui tend vers l'infini. Or la fonction cos ne possède pas de limite en l'infini, donc la suite (u_n) ne possède pas de limite en l'infini!"
2. Justifier que $\sqrt{|4\pi^2 n^2 + an + b|} = 2\pi n + \frac{a}{4\pi} + o(1)$ lorsque n tend vers l'infini
3. Qu'en conclure quant à la convergence de la suite (u_n)?

ANA 56
On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$.
On considère la fonction $f : x \mapsto \tan\left(\dfrac{x\pi}{5}\right)$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction f
3. La fonction f est-elle bornée? monotone?
4. Justifier que la suite (u_n) ne converge pas

SUITES DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

ANA 57
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$

1. Montrer que (u_n) est monotone, convergente et déterminer la valeur de la limite
2. Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que $(n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n$
3. Déterminer un équivalent (simple) de u_n

ANA 58
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$

1. (a) Calculer I_0 et I_1
   (b) Calculer pour tout entier n, $I_n + I_{n+2}$
   (c) En déduire l'expression de I_n en fonction de n
2. (a) Prouver que $\lim\limits_{\infty} I_n = 0$
   (b) En déduire que : $\ln 2 = \lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et $\dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$

ANA 59
On pose pour tout entier $n \geqslant 0, u_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^n}.dt$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite monotone
2. Etablir que pour tout t de $[0,1]$, on a les inégalités $1 - t^n \leqslant \sqrt{1-t^n} \leqslant 1 - \dfrac{t^n}{2}$
3. En déduire que la suite $(n(u_n - 1)$ est bornée.

ANA 60
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t+t^n}$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2
2. (a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t}$
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente
3. (a) Justifier que $\ln(2) - u_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} dt$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)

ANA 61
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ et $v_n = u_n - \ln 2$

1. Calculer pour tout $x \in [0,1]$ la quantité $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$
2. En intégrant f_n, montrer que $v_n = (-1)^n \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x} dx$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$
4. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ et en déduire $\lim S_n$. Que vient-on de prouver?

ANA 62
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n!} \int_0^1 e^t (1-t)^n dt$

1. Calculer U_1
2. Trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation entre U_n et U_{n-1}
3. En déduire que : $U_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$
4. Démontrer que $0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ pour prouver que : $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$

ANA 63
Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$

1. Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$
2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles

ANA 64
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $p \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) dt$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0
2. Déterminer un développement asymptotique à la précision $o(n^{-p-1})$ de I_n

ANA 65
On pose pour $n \geqslant 1, u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{x^n} dx$

1. Calculer u_1. Montrer que la suite u_n est convergente.
2. Montrer que $\forall y \in [0,1], 1 + y \leqslant e^y \leqslant 1 + (e-1)y$. En déduire $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$la série $\sum (u_n - l)^\alpha$ est-elle convergente?

SUITES DÉFINIES PAR UNE SOMME

ANA 66
Déterminer les limites des suites des (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \qquad v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

ANA 67
On souhaite montrer que $1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)! + n! \underset{\infty}{\sim} n!$ $\quad (*)$

1. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ fixé, donner un équivalent de $\dfrac{k!}{n!}$ quand $n \to \infty$.
   Peut-on en déduire alors facilement $(*)$?
2. Après avoir remarqué que pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$\frac{1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)! + n!}{n!} = \frac{1! + \cdots + (n-2)!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$$

   justifier $(*)$.

ANA 68
Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \ln n$

ANA 69
On pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ pour tout $n \geqslant 1$

1. Montrer que la suite (α_n) converge. On notera γ sa limite.
2. En déduire la limite et un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} q^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ avec $q \in \mathbb{R}^{*+}$ fixé.
   (indic. on pourra écrire que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$)

ANA 70
Démontrer que la suite définie par $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}\right) - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ est convergente.
(On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et vérifier qu'elle est décroissante sur $[3, +\infty[$.)

ANA 71
Soit (p_n) une suite croissante d'entiers telle que $p_0 > 1$. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_0 p_1 \dots p_k}$.

1. Montrer que la suite (S_n) converge vers $l \in]0,1]$
2. Montrer que si (p_n) est stationnaire alors l est un rationnel.

ANA 72
On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ en posant $u(t) = t + 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} t}$

1. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, -1 < \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} < 1$
2. Etudier le signe de $u(t)$.
3. En déduire que pour $x > -1, \ln(1+x) \leqslant \operatorname{sh} x$
4. En déduire que pour $x < 1, -\ln(1-x) \geqslant \operatorname{sh} x$
5. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$ on a $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leqslant \ln 2$
6. En déduire la limite, quand $n \to \infty$, de $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

ANA 73 (théorème de Césaro - classique- A savoir refaire)
Soit (u_n) une suite complexe ou réelle qui converge vers une limite finie l. On pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
Nous allons montrer que la suite (x_n) converge elle aussi vers l.
(On retiendra que si une suite converge vers l alors la suite de ses moyennes arithmétiques converge également vers l)

1. On suppose que $l = 0$.
   (a) On se fixe un $\epsilon > 0$. Justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $k \geqslant n_0, |u_k| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
   (b) Justifier qu'alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$
   (c) Justifier l'existence d'un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$
   (d) En déduire l'existence d'un entier n_2 (que l'on précisera en fonction de n_0 et de n_1) tel que $\forall n \geqslant n_2, |x_n| \leqslant \epsilon$
   (e) conclure
2. Dans le cas où $l \neq 0$, démontrer le résultat voulu en considérant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$

SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

ANA 74

1. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ possède, dans l'intervalle $]0,1]$, une et une seule solution, que l'on notera u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite de terme général u_n, puis justifier que $\lim u_n = 0$
3. Donner un équivalent *simple* de u_n, quand n tend vers l'infini, ainsi que de $v_n = e^n u_n - 1$.

ANA 75
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k^2}$ et $g_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2}$

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$
3. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$ en fonction de $x \in]0,1[$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$. En déduire la limite de u_n

ANA 76
Soit $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{x.\ln x}{1+x}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $a_n \geqslant 1$ tel que $f(a_n) = n$
2. Etudier les variations de (a_n), et montrer que (a_n) n'est pas bornée
3. Donner un équivalent de a_n puis de $a_n - e^n$

ANA 77
Soit $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$ pour $n \geqslant 1$

1. Montrer qu'il existe une unique racine, notée a_n, de P_n sur $]0, +\infty[$
2. En considérant par exemple $P_n(a_{n-1})$, montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$ puis déterminer $\lim a_n$.

SUITES RÉCURRENTES

ANA 78
Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$$

ANA 79 (on devra trouver des expressions simples!)
Soit $\theta \in]0,\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos\theta.u_{n+1} + u_n = 0$$

ANA 80
Soit a un réel différent de deux.
On s'intéresse à la suite (u_n) définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, qui vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = (2+a)u_{n+1} - 2au_n$.

1. Déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de n, a, u_0 et u_1
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

ANA 81
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$

1. Justifier que la suite (u_n) possède une limite.
   Préciser ensuite quelles sont les limites possibles.
2. Dans le cas où $u_0 \leqslant 0$ donner $\lim u_n$
3. Donner le tableau de variation de la fonction $x \mapsto -x^2 + x$
4. Donner alors $\lim u_n$ lorsque $u_0 > 0$

ANA 82
On souhaite déterminer les suites à valeurs complexes qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n + (-1)^n \quad (1)$$

1. Déterminer une suite (x_n) qui vérifie la condition (1).
   (on pourra chercher x_n sous la forme $\lambda.(-1)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$)
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \geqslant 0, v_n = u_n - x_n$.
   Montrer l'équivalence entre les propositions
   i) (u_n) vérifie la condition (1)
   ii) (v_n) vérifie la condition (2) $\forall n \geqslant 2v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n = 0$
3. En déduire toutes les suites qui vérifient la condition (1)

ANA 83
Soit la suite (x_n) définie par $x_1 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{n}{x_n}$

1. Etudier la suite (x_n)
2. Montrer qua $\forall n \geqslant 1, x_n \geqslant n$ puis que $x_n \sim n$
3. Montrer que $x_n = n + o(1)$

ANA 84
On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$ et que $\alpha \in [0,1]$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{e}{4}.|u_n - \alpha|$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^n$, puis que la suite (u_n) converge vers α
5. Trouver un entier n_0 tel que u_{n0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

ANA 85
On considère l'équation $(E) : x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$

1. prouver que (E) a exactement une solution réelle α. Etablir de plus que $\alpha \in [-\frac{1}{3},0] = I$
   Pour déterminer une valeur approchée de α on considère la suite définie par $u_0 = -\frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 1}{u_n^2 + 3}$
2. vérifier que si la suite converge ce ne peut être que vers α
3. on pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$
   (a) prouver que $f(I)$ est inclus dans I. Qu'en déduit-on quant aux termes de la suite (u_n)?
   (b) démontrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant \dfrac{8}{27}$

   (c) prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^n |u_0 - \alpha|$
   (d) en déduire que la suite (u_n) converge vers α. Puis déterminer un entier n à partir duquel on est sûr que u_n approche α à 10^{-9} près.
   (e) existe-t-il un réel β pour lequel la série $\sum(u_n - \beta)$ converge? Justifier.

ANA 86
On s'intéresse à la suite définie par $\begin{cases} & u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1, & u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

On note $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$
On s'intéresse à la suite (u_n) de deux manières différentes.

Justifier tout d'abord que $\sqrt{1+\Phi} = \Phi$

1. Premièrement
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, 1 \leqslant u_n \leqslant \Phi$
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
   (c) Justifier que (u_n) est une suite convergente, et donner sa limite.
2. Secondement.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, |u_{n+1} - f(\phi)| \leqslant \dfrac{1}{2}.|u_n - \phi|$
   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1, |u_n - \Phi| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   (c) En déduire une méthode pour déterminer une valeur approchée de Φ à 10^{-4} près

ANA 87
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{1}{1+u_{n-1}}$

On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $g = f \circ f$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, u_n \in [\frac{1}{2},1] = I$
2. Etudier les variations de f sur I
3. Calculer u_0, u_1 et u_2
4. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés
5. Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Conclure

ANA 88
On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ possède une unique solution α, et que $\alpha \in [0,1]$
2. Montrer que $\forall (a,b) \in [0,1]^2, |\cos a - \cos b| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}.|a-b|$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$ et que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n
4. Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-k} près?

ANA 89
Soit $a \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$.

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + \dfrac{1}{z_n}\right)$

1. On pose $f : z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$
   (a) Montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$
   (b) En déduire que la suite (z_n) est bien définie.
2. On suppose de plus $a \neq -1$. On pose alors pour tout n, $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$.
   Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. (a) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $Re(a) > 0$
   (b) Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim z_n$ lorsque $Re(a) < 0$
   (c) Justifier que le cas $Re(a) = 0$ n'est pas à envisager

ANA 90
On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3.4^n + 5$.
Montrer qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique en donnant la relation de récurrence suivie.

SUITES ADJACENTES

ANA 91
Dans chacun des 2 cas, montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$
2. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

ANA 92 (preuve de l'irrationnalité de e)
On considère les suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Montrer que cette limite n'est pas rationnel (on raisonnera par l'absurde)

4 Séries numériques

ANA 93 (différence entre terme général et somme partielle (fondamental))
1. On considère la série de terme général $u_n = n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Donner la somme partielle d'indice n
2. On considère la série dont la somme partielle d'indice n est $S_n = n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Donner son terme général.

ANA 94
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels ou de complexes.
1. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_n est
2. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_n est
3. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_{2n} est
4. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_{2n} est

DÉTERMINER LA NATURE D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 95
Pour chacune des séries déterminer la somme partielle d'indice n et préciser si la série converge

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 3}(-1)^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0} n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\frac{n}{n+1} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\frac{n+1}{n}$$

ANA 96
Parmi les séries ci-dessous, indiquer celles qui sont grossièrement divergentes

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} n^2 \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} n.\sin\frac{1}{n} \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^{2050}}{2^n} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n.n^2}{n+4}$$

ANA 97
Indiquer la nature précise(CV, DV, ACV, GDV) des séries suivantes:

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum \sqrt{n} \qquad \sum \cos n$$

$$\sum \frac{(-2)^n}{n!} \qquad \sum n! \qquad \sum \frac{2^n}{n^2} \qquad \sum (1 - 10^{-n})^n \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum \ln(\frac{n+1}{n})$$

ANA 98
Soit (u_n) une suite positive et (v_n) une suite négative telles que $\forall n \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \pi + v_n$.
Justifier que la série de terme général u_n converge et que la suite de terme général v_n converge.

ANA 99
Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sin t}{1+t}dt$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

ANA 100
Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$ où a est un réel donné autre que -1

ANA 101
Soit a un nombre complexe.
Etudier la convergence des séries de terme général $u_n = (a^n)^2$ et $v_n = a^{n^2}$

ANA 102 (fondamental)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

ANA 103

Nature des séries de terme général :

1. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$
2. $n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$
3. $\dfrac{2^n.n!}{n^n}$
4. $\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}$
5. $\dfrac{(-1)^n n+2}{n^3+2n^2+1}$
6. $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{2}$
7. $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$
8. $(-1)^n\operatorname{sh}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$
9. $(-1)^n\operatorname{sh}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$
10. $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$
11. $\dfrac{1.4.7.\ldots.(3n-5)(3n-2)}{3^n.n!}$
12. $\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}$
13. $3\ln(n^2+1)-2\ln(n^3+1)$
14. $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
15. $\dfrac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{n^n}$
16. $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
17. $\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}$
18. $\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$
19. $\dfrac{\exp(in)}{n^2+\cos n}$
20. $e^{-\sqrt{n}}$
21. $\dfrac{1}{n^{3+\sin n}}$
22. $\dfrac{1}{(\ln n)^{2024}}$
23. $\dfrac{(\ln n)^{2028}}{n^{1,000000001}}$
24. $\sum\dfrac{(\ln n)^{2038}}{n}$
25. e^{-n^2}
26. $e^{-\sqrt{n}}$
27. $\dfrac{n!}{n^n}$
28. $\sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n})$
29. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{1+2+\cdots+n}\right)$

ANA 104

a,b et α étant deux paramètres réels, nature des séries de terme général :

1. $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an}$
2. $\cos\dfrac{1}{n}-a-\dfrac{b}{n}$
3. $\ln\left(\dfrac{1+n^a}{2+n^b}\right)$
4. $a^n\sin\dfrac{1}{n}$
5. $\dfrac{1+a^n}{n}b^n$
6. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$
7. $\operatorname{ch}^a n-\operatorname{sh}^a n$
8. $\arctan n^\alpha$
9. $\dfrac{1}{n\ln(1+a^n)}$
10. $\dfrac{a^n.2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}$
11. $\tan\pi\sqrt{n^2+an+b}$
12. $\arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}}$
13. $\dfrac{1}{n.\ln^a n}$
14. $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$
15. $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$

ANA 105

Soit a un réel strictement positif. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{(n!)^2.a^n}{(2n)!}$

ANA 106 (le contre-exemple classique qui prouve l'importance du signe stable dans la rde)

.

On pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$
2. La série de terme général v_n est-elle une série alternée?
3. Donner un équivalent de v_n
4. Calculer un développement limité de v_n avec trois termes
5. En déduire que la série de terme général v_n est divergente

ANA 107 (nature de la série $\sum\cos n\theta$)

Soit θ un réel. On note $u_n=\cos n\theta$

1. Dans quels cas simples, peut-on conclure quant à la nature de $\sum u_n$?
2. On considère maintenant que $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.
   (a) Ecrire une égalité entre u_{n+1} et u_n
   (b) On suppose que $\lim u_n=0$. Montrer qu'alors la suite $(\sin n\theta)$ converge elle aussi vers 0. En déduire une contradiction.
   (c) Conclure

   On vient de montrer que la série $\sum\cos n\theta$ est toujours grossièrement divergente.

On aurait pu aussi passer en complexe pour déterminer l'expression explicite de la somme partielle d'indice n

ANA 108

On considère la série de terme général $u_n=\left(\dfrac{3n+1000}{5n-999}\right)^n$.

Montrer que pour n assez grand on a $0\leqslant u_n\leqslant 0.7^n$ puis conclure.

ANA 109

Dans cet exercice nous allons montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2}<(4n)!$ est fini.

1. On pose $u_n=\dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}$. Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
2. En déduire que pour n assez grand $2^{n^2}\geqslant(4n)!$, puis conclure.

ANA 110

Déterminer la nature des séries de terme général $u_n=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_n=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ANA 111 (une v.a. qui possède une variance possède une espérance)

Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n=1$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle tq $\sum p_n.x_n^2$ converge

Montrer que $\sum p_n.x_n$ est une série convergente

ANA 112

Soit (u_n) une suite réelle qui vérifie la relation $u_{n+2}+u_{n+1}+u_n=0$.

Déterminer les suites (u_n) tel que $\sum u_n$ CV

ANA 113

très formateur sur la recherche d'équivalents

1. Soient $\alpha>0$ et $\beta>0$. On pose $u_n=\operatorname{sh}\dfrac{1}{n^\alpha}-\sin\dfrac{1}{n^\beta}$
   Déterminer la nature de $\sum u_n$
2. Soit α un réel. Déterminons la nature de la série de terme général $u_n=\arctan n^\alpha$.

ANA 114 (démonstation de $x^n=o(n!)$)

.

Soit $x>1$ un réel fixé. On note $a_n=\dfrac{n!}{x^n}$ et $S_n=\ln a_n$ pour $n\geqslant 1$

1. Montrer que $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{x}$ pour tout entier n.
2. En déduire que $\lim S_n=+\infty$
3. Justifier que $x^n=o(n!)$

ANA 115

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall n \geqslant 0, \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$

1. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est majorée par une suite géométrique que l'on explicitera.
2. A quelle condition sur k est-t-on sûr que la suite (u_n) CV? Que la série de terme général u_n CV?
3. Dans le cas où $k<1$, déterminer en fonction de k et de u_0 le plus petit entier N pour lequel on est sûr que $|u_N| \leqslant 10^{-5}$

ANA 116

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$

1. la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?
2. en écrivant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$

ANA 117

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$

1. Etudier la suite (u_n)
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   Montrer que $\lim v_n = 1$
3. En utilisant le théorème de Césaro, déterminer un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$

ANA 118

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. Montrer que (v_n) converge vers $1/3$.
3. En utilisant le théorème de Césaro (exercice 73) à la suite (v_n), montrer que $u_n = \sqrt{\dfrac{3}{n}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$

ANA 119

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.
Montrer que les séries suivantes sont convergentes

$$i) \sum \max(u_n, v_n) \qquad ii) \sum \sqrt{u_n v_n}$$

ANA 120

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge

ANA 121

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ pour $n \geqslant 1$
Déterminer la nature de la série de terme général u_n
(On pourra montrer par l'absurde que cette série est divergente)

ANA 122

Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.
Montrer que les séries $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ et $\sum \dfrac{\mathrm{ch}(a_n)-1}{a_n}$ convergent

ÉTUDIER LES SOMMES PARTIELLES OU LE RESTE

ANA 123

Déterminer un équivalent des expressions suivantes lorsque $n \to \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{2030} \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-2030} \qquad U_n = \ln(n!) \qquad V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}$$

ANA 124

On souhaite donner une valeur approchée de $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^3}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$ (on note v_k cette quantité)
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $N > n$, on a $\sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \displaystyle\int_n^N \frac{dt}{t^3}$
3. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < R_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$, et proposer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

ANA 125

Convergence et valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k + 3^k + \cdots + 2024^k}$

ANA 126

Montrer la convergence et déterminer la somme de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 2$

ANA 127

Soit a et b deux paramètres réels. On note $u_n = \sqrt{n} + a.\sqrt{n+1} + b.\sqrt{n+2}$

1. Déterminer une cns sur (a,b) pour que $\sum u_n$ converge
2. Sous cette condition, déterminer la somme de la série ainsi qu'un équivalent simple du reste d'ordre n

ANA 128

1. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$.
2. Encadrer la somme partielle S_n en utilisant deux intégrales, puis en déduire un équivalent.

ANA 129

Soit (λ_n) une suite croissante de réels qui tend vers $+\infty$.
Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n.e^{-\lambda_n}$

DÉTERMINER LA SOMME D'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE

ANA 130

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3-n}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Déterminer la somme partielle d'indice n
2. En déduire la convergence et la somme de la série

ANA 131
Soit x un réel tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{2^n} \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$.
Après avoir exprimé $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan x$ de manière simple en fonction de $\tan(2x)$,
justifier que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{x}{2^n}$ converge et donner sa somme

ANA 132
Nature et somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$ 2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^3}{n!}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n x^{2n+1}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n/2}\cos(n\dfrac{\pi}{4})$ 5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x}{(1+x)^n}$ 6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{n!}$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 8. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$ 9. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$
10. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ 11. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(1-\dfrac{1}{n^2})$ 12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n+(-1)^n}$
13. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{2^{4n-3}}$ 14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ 15. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\cos(\dfrac{1}{2^n})$
16. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n.\sin^3\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ 17. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ 18. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

ANA 133
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.
Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$
Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 134
On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 0, u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n.\sin(\pi.t)dt$

1. Montrer que la série de tg u_n est convergente
2. Montrer l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n.u_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sin(\pi.t)}{1+t}dt$

ANA 135
On pose pour tout $n \geqslant 0, R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

1. Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n$

ANA 136
Nature (et somme éventuelle) des séries de terme général :

$$u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+n+1}) \qquad v_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

(on pourra, pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$, utiliser la formule d'addition (en la démontrant):
$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(\dfrac{a-b}{1+ab})$ *si* $(\arctan(a) - \arctan(b)) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*)*

ANA 137
Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes
2. Montrer que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$

ANA 138
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$ et (w_n) une suite numérique telle que $\lim w_n = 0$.
Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $u_n = aw_n + bw_{n+1} + cw_{n+2}$
Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

ANA 139
On admet dans cet exercice que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

1. convergence et somme de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}$ *(on remarquera $2k^2+2k+1 = k^2+(k+1)^2$)*
2. convergence et somme de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$
   (déterminer les réels a,b,c et d tels que $\dfrac{1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k^2} + \dfrac{d}{(k+1)^2}$*)*

PRODUIT DE CAUCHY

ANA 140
Pour $n \geqslant 0$ on pose $c_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{4^k}{k!}$

1. Montrer que la série de terme général c_n converge
2. Déterminer 2 réels a et b tels que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}\right).\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n\right)$ et en déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$

ANA 141
Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{3^n}$

ANA 142
Soient a et b deux complexes de modules strictement inférieur à un.
Montrer que $\dfrac{1}{1-a}.\dfrac{1}{1-b} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$

PETITS PROBLÈMES

ANA 143
Soit $(t_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $t_1 \in]0,\pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} = \sin t_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < t_n < \pi$
2. Montrer que la suite (t_n) converge vers 0
3. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ diverge
4. En déduire la nature de $\sum t_n^2$ et enfin celle de $\sum t_n$

ANA 144 (série et intégrale)
On considère la série de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.
On note S_N la somme partielle d'indice N

1. Montrer que cette série est convergente
2. Montrer que $S_N = I - J_N$ avec $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$ et $J_N = \int_0^1 \frac{(-t^3)^{N+1}}{1+t^3}dt$
3. Trouver 3 réels a,b,c tels que $\frac{1}{1+X^3} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$
4. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

   (On trouvera $\frac{\sqrt{3}.\pi}{9} + \frac{\ln 2}{3}$*)*

ANA 145 (série et intégrale)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $a_n = \int_0^1 t^n.f(t)dt$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n.a_n$ converge vers $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

ANA 146 (série et intégrale)
Soit $a > 0$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$ on a $\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.t^{ak}\right| \leqslant t^{(n+1)a}$
2. En déduire que $\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{an+1}}$

ANA 147

1. préliminaire : Montrer que si la série de terme général $x_n > 0$ converge alors la série de terme général x_n^2 converge aussi
2. Dans les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} & \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

   Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle
   (c) En utilisant $\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+v_k)$, montrer que la série de terme général v_n est divergente
4. (a) Montrer que $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n

ANA 148
Nous allons montrer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})} \text{ avec } n \geqslant 1$$

et en calculer la somme. Pour cela, on pose $\forall n \geqslant 1, v_n = \sqrt{n}u_n$

1. Après avoir justifié que $u_n = v_{n-1} - v_n$ pour $n \geqslant 2$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - v_n$
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $\ln v_n = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
4. En déduire que $\lim \ln v_n = -\infty$. Donner $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

5 Equations différentielles

PREMIER ORDRE

ANA 149
On s'intéresse l'équation différentielle (E) $y' + a(x).y = b(x)$ où a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés.

1. On note $A : x \mapsto \int_{x_0}^{x} a(t)dt$.
   Que pouvez-vous dire de cette fonction?
2. On pose $y : x \mapsto K(x).e^{-A(x)}$ avec K fonction dérivable sur I.
   (a) Montrer que y est solution de E ssi il existe une constante C telle que $\forall x \in I, K(x) = C + \int_{x_0}^{x} b(t).e^{A(t)}.dt$
   (b) En déduire la forme de la solution générale de (E)
   (c) En déduire que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x).y = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution que l'on déterminera

ANA 150
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x f(t)dt = e^x$

ANA 151
Résoudre sur $I =]-\pi/2,\pi/2[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{y(x)}{\cos^2 x} = 0$

ANA 152 (on pourra chercher une solution particulière évidente)
Résoudre sur $I =]0,+\infty[$ l'équation différentielle $2x.y' + y = \dfrac{1}{x}$.
Quelle est la solution générale sur $I =]-\infty,0[$

ANA 153 (avec recollement)
On considère l'équation $(E) : y'.\cos(x) + 2.\sin(x).y = 1 + \sin^2 x$.

1. résoudre (E) sur $]-\pi/2,+\pi/2[$.
2. résoudre (E) sur l'intervalle du type $]\pi/2,3\pi/2[$
3. résoudre (E) sur $]-\pi/2,3\pi/2[$, pour cela
   On pose $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\pi/2,3\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin x + K.\cos^2 x & \text{si } x < \pi/2 \\ L & = \text{si } x = \pi/2 \\ \sin x + M.\cos^2 x & \text{si } x > \pi/2 \end{cases} \end{array}}$
   (a) Déterminer la cns sur (K,L,M) pour que y soit continue en $\pi/2$
   (b) Déterminer la cns sur (K,L,M) pour que y soit dérivable en $\pi/2$
   Montrer que si cette cns est vérifiée alors la fonction trouvée est bien solution sur $]-\pi/2,3\pi/2[$

ANA 154
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $x^2.y' - y = e^{-1/x}$

ANA 155 (on pourra chercher une solution particulière d'une forme... particulière)
Résoudre $y' + y = \sin^3 x$

ANA 156
Résoudre $y' - y = x^2.(e^x + e^{-x})$

ANA 157
résoudre sur $]0,\pi/2[$, $\tan(x).y' + y = \sin x$

ANA 158
Donner le plus rapidement possible la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

ANA 159 (avec recollement)
On considère l'équation (E) : $x.(x-1).y' - (x-2).y = 0$

1. On note I un intervalle ne contenant ni 0, ni 1.
   Résoudre I sur un tel intervalle
2. On souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
   Pour cela on pose $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} K.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ L & \text{si } x = 0 \\ M.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ N & \text{si } x = 1 \\ P.\frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}}$
   (a) Déterminer une CNS pour que y soit continue en 0
   (b) Déterminer une CNS pour que y soit dérivable en 0
   (c) Mêmes questions en 1
   (d) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$

ANA 160
On considère l'équation (E) : $\quad (1-x^2)y' + xy = 1$

1. Résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant ni 1, ni -1.
2. On souhaite résoudre (E) sur $]-1,+\infty[$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ n'est pas dérivable en 1^+
   (b) Montrer que $x \mapsto x$ est la seule solution de (E) sur $]-1,+\infty[$

ANA 161
Résoudre les équations ci-dessous sur l'intervalle indiqué

1. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ sur $]-1,+1[$ (et sur $\mathbb{R}$ pour les plus fous!)
2. $xy' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}$
3. $x(x+1)y' + y = \arctan(x)$ sur tout intervalle ne contenant ni 0, ni -1.
4. $y' - 2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.y = \operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$
5. $|x|y' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}$
   (pour cette dernière équation, on pourra résoudre sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ puis étudier le recollement

ANA 162

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \ln x$ sur $]0,+\infty[$
2. Tracer la courbe intégrale qui passe par le point $(1,-1)$ puis celle qui passe par le point $(1,0)$. Donner l'allure générale de la famille de toutes les courbes intégrales.
3. Déterminer l'ensemble des points qui sont à tangente horizontale sur les courbes intégrales. Tracer le graphe de cet ensemble.

ANA 163
Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g : t \mapsto f'(t) + tf(t) \end{array}$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ
2. On souhaite trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
   (a) Déterminer Φ^2 et en déduire que $sp(\Phi^2) = \mathbb{C}$ et que tout sep de Φ^2 est de dimension deux
   (b) Soit λ un complexe non nul.
   On note μ un complexe tel que $\mu^2 = \lambda$.
   Déterminer une base de $E_\lambda(\Phi^2)$ en fonction de μ (on pensera à utiliser la question 1)
   (c) Déterminer $E_0(\Phi^2)$
3. résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

ANA 164 (changement de fonction inconnue)
Résoudre sur tout intervalle I ne contenant pas 0 l'équation $xy' - (1 + x)y = e^x(1 + x^2)$.
(on pourra poser $y = e^x.z$)

ANA 165 (un bel exo... de géométrie!)
Soit l'équation $(E) : y' = a(x)y+b(x)$ où a et b sont deux fonctions continues sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$

1. On considère la courbe intégrale passant par le point $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$.
   Donner l'équation de la tangente en ce point.
2. On considère les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0.
   Montrer qu'elles sont toutes parallèles ou concourantes!

ANA 166 (fonctions périodiques)
On considère l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions définies, continues sur $\mathbb{R}$ et $T-$ périodiques.

1. Montrer que si y est solution de (E) alors $x \mapsto y(x + T)$ est aussi solution.
   En déduire que l'ensemble des courbes intégrales est invariant par une transformation géométrique que l'on indiquera.
2. Montrer que si y est solution de (E) et si $y(0) = y(T)$ alors y est $T-$périodique.
   (on pourra considérer la fonction $z : t \mapsto y(t + T)$)

ANA 167 (on pourra procéder par Analyse-Synthèse)
Déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x t.f(t)dt = 0$

ANA 168
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1], g(x) = \int_0^1 \min(t,x)f(t)dt$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ

ANA 169
On considère l'équation différentielle $(E)\,(x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$

1. Montrer que si (E) possède une solution polynomiale alors forcément c'est un polynôme de degré 2, puis déterminer une solution polynomiale P
2. Résoudre (E) sur $]-\infty,-1,]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
3. Montrer que P est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$

ANA 170 (structure)
On considère l'équation différentielle $(E)\,, x^2.y'' + 4.x.y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$
2. En déduire la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. Déterminer la solution telle que $y(1) = y'(1) = 1$

ANA 171
Résoudre $y'' - y = e^x - 2.e^{3x}$

ANA 172
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x^2.y'' - x.y' + y = 1$
On pourra chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$

ANA 173 (gros calculs!)
Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y'' - 2y' + y = \dfrac{2xe^x}{x^2+1}$

ANA 174

1. résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$ fixé.
2. résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = \cos(x)$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$

ANA 175
résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$ sachant qu'il existe une solution polynomiale à l'équation homogène associée.
(On pourra montrer qu'une solution polynomiale non nulle de l'équation homogène est forcément de degré

ANA 176
Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \int_0^\pi f(t)dt$

ANA 177

1. Résoudre $(E) : y'' - 2y' + y = 1$
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \cos(x - t)f(t)dt$
   (a) Montrer que la fonction f est de classe C^1, puis C^2, puis qu'elle est solution de (E)
   (b) Que peut-on conclure?

ANA 178
Soit $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}[X]$
Soit l'application φ définie sur E par $\varphi(f)(x) = f(2x) - f(0) - {}_0^x(x - t)f(2t)dt$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E et que F est stable par φ
2. Si $f \in \ker(\varphi)$, montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2
3. Résoudre cette équation différentielle. En déduire le noyau de la restriction de φ à F

ANA 179
On s'intéresse à l'ensemble $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = y(0)\cos(x)\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel
2. Déterminer tous les éléments de E

ANA 180
Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y''+xy'+4y=0$ à l'aide du changement de variable $x=e^t$.
(écrire les solutions à valeurs réelles)

ANA 181
Déterminer toutes les solutions polynomiales de $(E)\ :\ (1+x^2)y''(x)+xy'(x)-4y(x)=0$

ANA 182
Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)^2y''-2x(1+x^2)y'+2(x^2-1)y=0$ sachant qu'elle possède une solution polynomiale.

ANA 183
On donne l'équation différentielle : $(E) : y''+2y'+y=f$ où y est la fonction inconnue.

et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
2. Soit $m\in\mathbb{R}$. Démontrer que (E) a , sur $\mathbb{R}$, une solution y_m et une seule telle que $y_m(0)=0$ et $y_m'(0)=m$. Puis déterminer y_m.
3. Montrer que y_m admet un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x=0$, suivant les puissances de x. Ecrire ce développement. Existe-t-il un développement limité de y_m (toujours au voisinage de $x=0$ et suivant les puissances de x) à un ordre supérieur à 2 ?

ANA 184
Déterminer les fonctions réelles d'une variable réelle, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x)+f(-x)=xe^x$
(on commencera par montrer qu'une solution est nécessairement de classe C^2 et qu'elle vérifie l'équation différentielle $f''(x)+f(x)=e^x+xe^x-xe^{-x}$)

ANA 185
Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=e^x$
indication:
On va raisonner par analyse-synthese
- Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ alors f est nécessairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ alors on a $f''(x)+f(x)=2\operatorname{ch}x$ pour tout x réel.
- Résoudre l'équation différentielle ci-dessus.
- Répondre enfin à la question posée!

ANA 186
Determiner les fonctions $f\in C^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telles que $\forall x>0\ ,\ f'(\frac{1}{x})=f(x)$

ANA 187
Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(2-x)$

ANA 188 (suites numériques VS équations différentielles)
1. Déterminer l'expression réelle de u_n sachant que $\forall n\geqslant 0, u_{n+2}+4u_n=0$
2. Déterminer l'expression réelle de la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y=0$
3. Soit $\omega\in\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression réelle de la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y=\cos(\omega.x)$

ANA 189
Résoudre l'équation différentielle $(1+\mathrm{e}^x)^2y''-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'-(3\mathrm{e}^x+1)y=0$ en introduisant $z(x)=\frac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}$

ANA 190
Soit $\lambda>0$ et y une solution de $y''+(1+\dfrac{\lambda}{x^2})y=0$.
On souhaite montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, y s'annulle au moins une fois dans l'intervalle $]a;a+\pi[$.
Pour cela on considère $a\in\mathbb{R}$ fixé et la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=\sin(x-a)\ldots)$.
On note également $z=y'\phi-y\phi'$.
1. Vérifier que $z(a+\pi)-z(a)=y(a+\pi)+y(a)$
2. Montrer que z est strictement monotone sur l'intervalle $[a,a+\pi]$
3. En distinguant les cas strictement croissant et strictement décroissant et en utilisant la question 1, aboutir à une contradiction.
4. Le résultat montré dans cet exercice reste-t-il valable sous l'hypothèse $\lambda\leqslant 0$?

ANA 191
Résoudre $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ en posant $t=\arctan x$

ANA 192
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle $(E) : f''+f=g$
1. montrer que la solution générale (à valeurs dans $\mathbb{R}$) de cette équation est
$$f : x\mapsto \int_0^x g(t)\sin(x-t)dt+\lambda\cos x+\mu\sin x \text{ avec}(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$
2. en déduire que si g est positive alors $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+\pi)+f(x)\geqslant 0$

ANA 193
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de $4xy''+2y'-y=0$ avec le changement $t=\sqrt{|x|}$

ANA 194
On souhaite résoudre $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=0\quad(1)$ sur un intervalle I ne contenant pas -1.
1. Montrer qu'il existe une solution de la forme $f(x)=e^{\alpha x}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
2. Donner toutes les solutions de (1) sur I
3. (pour les plus courageux) Vérifier que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un sev de dimension trois.

ANA 195
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E): $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, sachant qu'elle admet une solution de la forme $x\longmapsto e^{ax}$. avec $a\in\mathbb{R}$

ANA 196 (Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)
Résoudre :
1. $y''-2y'+2y=xe^x$ (on pourra chercher une sol part de la forme $x\mapsto(ax+b).e^x$)
2. $y''+3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$
3. $y''+y=P(x)$ où P est un polynôme
4. $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$

ANA 197
On considère l'équation différentielle $(E)\quad(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$
1. Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer les solutions de la forme $x\mapsto e^{ax}$ de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant pas $\dfrac{-1}{2}$

ANA 198
Résoudre sur $]0,+\infty[$ les équations différentielles : $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$ et $y''+2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$(**)

On devra trouver $x\mapsto xe^{-x}\int_1^x \dfrac{e^{2t}}{t}dt-\dfrac{e^x}{x}$

ANA 199
k désigne un paramètre réel. Soit l'équation différentielle : $(E_k)x^2y"+xy'+k^2y=O$ avec $x\in]0,+\infty[$.

1. Intégrer $E(k)$ pour $k=0$
2. Intégrer $E(k)$ pour $k\neq 0$. On utilisera le changement de variable défini par $t=\ln x$.
3. Montrer qu'il existe des valeurs du paramètre k pour lesquelles l'équation $E(k)$ admet des solutions y, différentes de la solution nulle, telles que $y(1)=y(2)=0$. Donner l'expression générale de ces solutions.
4. Soient y_1 et y_2 deux solutions du type précédent, correspondant respectivement à des valeurs k_1 et k_2 distinctes du paramètre k. Calculer l'intégrale $\int_1^2 \dfrac{y_1(x)y_2(x)}{x}dx$

ANA 200
Soit α un réel fixé. A l'aide d'un changement de variable bien choisi,
résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y''+xy'+y=\sin(\alpha\ln x)$

ANA 201
Résoudre :

$$1.)\ y''+y=|x| \qquad , \qquad 2.)\ y''-y=e^{-|x|} \qquad , \qquad 3.)\ y''+y=\sin^2\frac{x}{2}$$

(On commencera par justifier que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace ... de dimension deux)

ANA 202
Soit f la solution de l'équation différentielle $y''+xy'+y=0$ avec les conditions de Cauchy $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

1. montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a
$$\forall n\geqslant 2, f^{(n)}+xf^{(n-1)}+(n-1)f^{(n-2)}=0$$
2. montrer que f admet un développement limité en zéro à tout ordre, et donner celui à l'ordre $2n+2$
3. f est-elle une fonction impaire? justifier votre réponse.

ANA 203 (équations d'Euler)
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.
On considère l'équation différentielle $x^2y''+axy'+by=0$ sur $]0,+\infty[$

1. montrer que le changement de variable $x=e^t$ nous ramène à la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.
2. application: résoudre $x^2y''+xy'+4y=0$ (on cherche les sol. à val. réelles)

ANA 204
résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de fonction indiqué

1. $xy''+(2+x)y'+y=0$ (poser $y=\dfrac{z}{x}$)
2. $x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=1$ (poser $y=\dfrac{z}{x^2}$)
3. $y'=(y-1)(xy-x-y)$ (poser $y=1+\dfrac{1}{z}$)
4. $xy'-x=y^2-x^2$ (poser $y=x+z$ puis $u=1/z$)

ANA 205
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x)=1$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. *(On pourra utiliser le changement de fonction $u=x^2y$.)*
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

ANA 206

1. trouver un polynôme solution de $x^2y''-3xy'+4y=0$
2. résoudre $x^2y''-3xy'+4y=x^3$
3. résoudre $x^2y''-3xy'+4y=1$

ANA 207 (une équation hors programme)
On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y''+|y|=0 \text{ avec } y(0)=a \text{ et } y'(0)=0.$$

On admettra qu'il possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ que l'on notera y.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, y(x)\leq a$.
2. Déterminez y lorsque $a\leq 0$.
   Pour la suite, on suppose que $a>0$.
3. Déterminer au voisinage de 0 l'expression de y et montrer que y s'annule en deux points $b_-<0$ et $b_+>0$ que l'on déterminera.
4. Achever la résolution de l'exercice.

ANA 208

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ déjà $\begin{cases}(1+x^2)y''-2xy'+2y &=0\\ y(x_0)=y'(x_0)=0\end{cases}$ puis $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)y''-y'-xy=e^{-x}$

ANA 209
On se donne une fonction q définie, décroissante et de classe C^1 sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$.
On considère également une fonction z de classe C^2 sur I et solution sur I de l'équation différentielle $z''(x)+q(x)z(x)=0$

1. On note $u: x\mapsto q(x)z^2(x)+(z'(x))^2$.
   Démontrer que la fonction u est décroissante sur I.
2. En déduire que s'il existe un réel $q_0>0$ tel que $\forall x\in I, q(x)\geqslant q_0$ alors z est bornée sur I.
3. Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur I vérifiant $\forall x\in I, xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0$
   (a) Soit z la fonction définie sur I par $z(x)=\sqrt{x}y(x)$.
   Déterminer une fonction q telle que $\forall x\in I, z''(x)+q(x)z(x)=0$
   (b) En déduire qu'il existe un réel $M>0$ tel que $\forall x\in I, |f(x)|\leqslant\dfrac{M}{\sqrt{x}}$

ANA 210

1. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   de fonction réciproque $x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
2. Résoudre $(E)\ :(x^2+1)y''+xy'-q^2y=0$, où $q>0$, à l'aide d'un changement de variable judicieux

ANA 211
résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation $x^2y''-3xy'+4y=x+4$ avec le changement de variable $t=\ln(|x|)$

ANA 212
résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ avec le changement de variable $x=\cos t$

ANA 213
On considère l'équation différentielle $(E)\quad x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z=x^2.y$
2. Etudier le recollement en 0

ANA 214
On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y=0$.
On se propose de la résoudre sur $\mathbb{R}$ de différentes manières...

1. Cela ne servira pas ! montrer que si y est solution de (E) alors $x\mapsto y(-x)$ et $x\mapsto -y(-x)$ le sont aussi.
2. Un coup pour rien ! Déterminer les polynômes solutions de (E). Que peut-on conclure?
3. Un coup de bol ! Chercher les solutions de la forme $x\mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{1+x^2}$ où a,b,c sont trois constantes réelles. Conclure !
4. Méthode classique ! sachant que $x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est solution de (E), résoudre complètement (E).
5. Changement de variable ! Soit φ une fonction bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ de classe C^2.
   On considère la fonction z définie sur $\varphi(\mathbb{R})$ par $z(t)=z(\varphi(x))=y(x)$
   (a) montrer que
   $$(1+x^2)^2.\varphi'^2(x).z''(\varphi(x))+(1+x^2)\left((1+x^2)\varphi''(x)+2x\varphi'(x)\right)z'(\varphi(x))+4z(\varphi(x))=0$$
   (b) déterminer une fonction φ telle que l'équation ci-dessus soit à coefficients constants.
   (c) résoudre alors (E) .

ANA 215 (exemple très riche en calculs!)
On veut résoudre sur $]\sqrt{e},\infty[$, l'équation $x(1-2\ln x)y''+(1+2\ln x)y'-\dfrac{4}{x}y=(1-2\ln x)^2$

1. (a) déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{5-6X}{1-2X}=a+\dfrac{b}{1-2X}$
   (b) à l'aide d'un changement de variable judicieux, déterminer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{x}\dfrac{5-6\ln x}{1-2\ln x}$
   (c) déterminer une primitive de $x\mapsto \dfrac{1-2\ln x}{x^2}$ et de $\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
2. chercher une solution de l'équation homogène sous la forme $y(x)=x^\alpha$
3. poser $y=x^2z$ et déterminer l'équation différentielle satisfaite par z'
4. montrer que $z' : x\mapsto \dfrac{1-2\ln x}{x^2}+A\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
5. en déduire que $y : x\mapsto x(1+2\ln x)+A\ln x+Bx^2$

ANA 216 (pour 3, on pourra poser $x=e^t$)
Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi_n : P\mapsto X^2P''(X)+XP'(X)$
2. $E=\mathbb{R}[X]$ et $\varphi : P\mapsto X^2P''(X)+XP'(X)$
3. $E=C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\varphi : f\mapsto g$ avec $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=x^2f''(x)+xf'(x)$

ANA 217
Déterminer les solutions dse des équations suivantes

1. $y''+xy'+y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$
2. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=2$

ANA 218
Soit $(E) : (1+x^2)^2y''-2x(1+x^2)y'+2(x^2-1)y=0$

1. Déterminer les solutions développables en série entière
2. En déduire la solution générale de (E)

ANA 219
On note $E=\mathbb{R}_2[X]$.
On considère f l'endomorphisme de E défini par $f(P)=(2X+1)P(X)-(X^2-1)P'(X)$

1. (a) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$. On la note A
   (b) Déterminer les éléments propres de A
   (c) En déduire les éléments propres de f
2. Dans cette question, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on note (E_λ) l'équation différentielle
   $$(2x+1-\lambda)y(x)-(x^2-1)y'(x)=0$$
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,+1\}, \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$
   (b) Déterminer, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_λ) sur chacun des intervalles : $]-\infty,-1[,]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
   (c) Pour quelles valeurs de λ toutes les solutions de (E_λ) sont-elles polynômiales sur chacun des intervalles ci-dessus? Peut-on retrouver ainsi les résultats de la question 1(c)?

ANA 220
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère sur $I=]-1,1[$ l'équation différentielle
$$(1-x^2)y''-\alpha xy'+\alpha y=0\quad (E_\alpha)$$

1. On suppose dans cette question que $\alpha=2$.
   Déterminer les solutions de (E_2) développables en séries entières.
   Après avoir calculé leur rayon de convergence, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires. A-t-on toues les solutions?
2. On suppose dans cette question que $\alpha=3$.
   Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P)=(1-X^2)P''-3XP'$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
   (b) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
   (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
   En déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3)
3. On suppose dans cette question $\alpha=1$.
   Résoudre l'équation (E_1) à l'aide du changement de variable $x=\sin t$

ANA 221

On considère l'équation différentielle $(E) : \ xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$

1. Montrer par récurrence que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Justifier sans calcul l'existence et l'unicité d'une solution φ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi(1) = 2$ et $\varphi'(1) = -2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \varphi^{(n)}(1)$.
   En dérivant n fois la relation $x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0$,
   montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$
4. Justifier que φ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1.
   Déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
5. Soit Γ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées $(1,2)$ et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

ANA 222

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : \quad xy'' + (x-1)y' - y = 0$

1. Déterminer les solutions de (E) développable en série entière (on reconnaitra des séries que l'on sait exprimer à l'aide de fonction usuelles)
2. Sans autre calcul, donner la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$

ANA 223

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : \quad x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0$

1. Déterminer les solutions de (E) développable en série entière (on reconnaitra des séries que l'on sait exprimer à l'aide de fonction usuelles)
2. Sans autre calcul, donner la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$

ANA 224

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : \quad x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

1. Montrer que $y(x) = \sum a_n x^n$ est solution de (E) sur un intervalle $]-R, +R[$ ave $R \neq 0$
   ssi $\begin{cases} a_0 & = 0 \\ \forall n \geqslant 1, (n-2)(n-1)a_n + (n-2)^2 a_{n-1} & = 0 \end{cases}$
2. En déduire une expression simple de $y(x)$ (lorsqu'elle est dse) à l'aide des fonctions usuelles

ANA 225

Résoudre les équation différentielles suivantes (m est un paramètre réel)

1. $y'' - 2y' + y = e^{mx}$
2. $y'' - 2y' + y = xe^{mx}$
3. $y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^x \sin x$
4. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2x)$
5. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(mx)$
6. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2+1}$
7. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-mx}}{x^2+1}$

6 Intégrales généralisées

ANA 226
a, b et c sont trois réels. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2} dt$

ANA 227
Déterminer la nature de intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t \ln t} \quad I_2 = \int_1^3 \frac{dt}{3-t} \quad I_3 = \int_3^4 \frac{dt}{\sqrt{t-3}} \quad I_4 = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)}$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \tan(t) dt \quad I_6 = \int_0^1 \arctan(\sqrt{1-t}) dt \quad I_7 = \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(t) dt$$

ANA 228
Prouver la convergence des intégrales ci-dessous, et déterminer leur valeur.

$A = \int_1^{+\infty} \dfrac{9dt}{t^2(t^2+1)(t+3)} = 3 - \dfrac{13}{20}\ln 2 - \dfrac{27}{40}\pi$	$B = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2} dt = 1$
$C = \int_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \arctan \dfrac{1}{t}\right) dt = -1 + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$	$D = \int_{-\infty}^0 t e^t \sin t dt = \dfrac{1}{2}$
$E = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\ln 2$	$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{5 \operatorname{ch} t + 3 \operatorname{sh} t + 4} = \dfrac{1}{2}$

ANA 229
convergence et valeur de :

$A = \int_0^{\infty} \dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2} dt = \dfrac{3\pi}{4}$	$B = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{3\tan t + 2} = \dfrac{\pi + 3\ln(3/2)}{13}$	$C = \int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2 + \sin t} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$
$D = \int_0^1 \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2} = -2\ln 2$	$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \int_0^{\infty} \dfrac{2t^2 dt}{1+t^4} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$	$F = \int_0^1 \sqrt{\dfrac{t}{1-t}} dt = \dfrac{\pi}{2}$
$G = \int_0^{\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{t^2}) dt = a\pi$	$H = \int_0^{\infty} \dfrac{\ln t}{1+t^2} dt = 0 (u = 1/t)$	$I = \int_0^{\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

ANA 230
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n . e^{-t} dt$.
On souhaite prouver la convergence de I_n et donner sa valeur.

1. Montrer que I_0 converge et donner sa valeur.
2. Montrer par récurrence que I_n converge et que $I_n = n!$

ANA 231
Soit $0 < a < \pi$.
On s'intéresse à l'intégrale $I_a = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2 - 2t\cos a + 1}$

1. préambule: justifier que $\forall x \neq 0$, $\arctan \dfrac{1}{x} + \arctan x = sg(x). \dfrac{\pi}{2}$
2. Montrer que I_a converge et vaut $\dfrac{1}{\sin a}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan \dfrac{\cos a}{\sin a}\right)$
3. Justifier que $I_a = \dfrac{\pi - a}{\sin a}$

ANA 232
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que la fonction $t \mapsto e^{zt}.e^{-|t|}$ appartienne à $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

ANA 233
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
On note pour tout x réel positif $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)$ et pour tout entier n, $S_n = \displaystyle\int_0^n f(t)dt$

1. Quel est le sens de variation de la fonction F? de la suite (S_n)?
2. Montrer l'équivalence

   la suite (S_n) converge ssi la fonction F possède une limite finie en $+\infty$

3. Ce résultat reste-t-il vrai si on retire l'hypothèse "f positive" ?
4. On suppose f seulement continue sur $[0, +\infty[$.
   Montrer les implications vraies et donner un contre-exemple pour les fausses!
   (a) (F fonction bornée $\Rightarrow$ (S_n) est une suite bornée) (c). $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ existe
   (b) ((S_n) est une suite bornée$\Rightarrow$ F fonction bornée) (d). $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ existe

ANA 234
En utilisant la règle des équivalents, déterminer la nature de intégrales suivantes (α paramètre réel):

$$I_1 = \int_1^{\infty} \sin^2(\frac{1}{t}) dt \quad I_2 = \int_1^{\infty} \sqrt{t^2+4t+1} - \sqrt{t^2+4t-1} dt \quad I_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\arcsin(\tan t)} \quad I_4 = \int_1^4 \frac{dt}{(\ln t)^{\alpha}}$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{e^t - e - e.\ln t}{(t-1)^{\alpha}} dt \quad I_6 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\pi - 4t}}{2\cos t - \sqrt{2}} dt \quad I_7 = \int_1^3 \frac{t^2+3}{(3-t)^{\alpha}} dt$$

ANA 235
Pour tout $t > 0$ on note $f(t) = \ln(\operatorname{th}(t))$

1. Montrer que $f \underset{+\infty}{\sim} -2.e^{-2t}$ et $f \underset{0^+}{\sim} \ln t$
2. En déduire la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$.

   Préciser alors la nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$

ANA 236
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$A = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{dt}{t^2 e^{-t}}$	$B = \displaystyle\int_0^{\infty} \ln \dfrac{1+t^2}{1+t^3} dt$	$C = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1-\sqrt{t}}$
$D = \displaystyle\int_1^{\infty} \dfrac{e^{\sin t}}{t} dt$	$E = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{\arccos t}$	$F = \displaystyle\int_0^{\infty} \left(2 + (t+3)\ln \dfrac{t+2}{t+4}\right) dt$
$G = \displaystyle\int_1^{\infty} \dfrac{dt}{t^2 \operatorname{ch} t}$	$H = \displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \dfrac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)}$	$I = \displaystyle\int_0^1 \sin \dfrac{1}{t}.e^{-1/t}.t^{-n} dt (n \in \mathbb{N})$

ANA 237
Soit $f \in C^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ tel que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$
   Montrer que $\lim J_n = 0$
2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$

ANA 238
Nous allons montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.

Pour tout $x \geqslant \pi$, on note $F(x) = \displaystyle\int_\pi^x \frac{|\sin t|}{t}dt$

1. Simplifier pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|$
2. (a) Montrer que pour tout entier k on a $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = 2$
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 2, F(n\pi) \geqslant \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_\pi^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$

ANA 239
α et β désignant des paramètres réels, étudier la convergence des intégrales :

$A = \int_0^\infty \dfrac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}$	$B = \int_0^\infty \dfrac{\ln \arctan t}{t^\alpha}$	$C = \int_0^\infty t^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{t}})dt$
$D = \int_0^1 \dfrac{\lvert\ln t\rvert^\beta}{(1-t)^\alpha}dt$	$E = \int_0^\infty \dfrac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$	$F = \int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}dt$
$G = \int_1^\infty \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}dt$	$H = \int_1^\infty (\sqrt{1+t^2}-t)^\alpha dt$	$I = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$

ANA 240

1. déterminer la nature des intégrales suivantes :
   $$I_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \quad ; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln(1+t)}} \quad ; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{dt}{\ln(1+t)}$$
2. déterminer les limites suivantes:
   $$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{\ln(1+t)}}$$
3. On considère la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - \dfrac{1}{t}$.
   Montrer que g est intégrable sur $[1,+\infty[$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to\infty} \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$
4. On considère la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}$.
   Montrer que $\int_0^1 h(t)dt$ est une intégrale convergente, puis en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+t)}$

ANA 241 (intégrales de Bertrand (HP))

1. Déterminer la nature de
   $$I_0 = \int_2^\infty \frac{\ln^{2020}(t)}{t^2}dt \quad I_1 = \int_2^\infty \frac{dt}{t^3.\ln t} \quad I_2 = \int_2^\infty \frac{dt}{t.\ln t} \quad I_3 = \int_2^\infty \frac{dt}{t.\ln^2 t} \quad I_4 = \int_2^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}.\ln^5 t}$$
2. α et β étant deux réels fixés. Nous allons établir que
   $$\boxed{\text{L'intégrale } I_{\alpha,\beta} = \int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \text{et } \beta \text{ quelconque} \\ \text{ou} & \\ \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \end{cases}}$$
   i) *Etudier le cas où $\alpha = 1$*
   ii) *Montrer si $\alpha < 1$ alors $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.(on pourra mq pour t assez grand $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{t}$*
   iii) *Montrer si $\alpha > 1$ alors $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.*

ANA 242

1. Justifier que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2} dt$
   (on pourra réaliser une intégration par parties)
2. A l'aide d'un changement de variables $t = 2\theta$, montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

ANA 243
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sh}(t^2) + \lambda.\sin t}{t\sqrt{t}}dt$

ANA 244
On considère $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles, au voisinage de 0, on a $f(t) = o(\dfrac{1}{t^\alpha})$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$
3. Soit $\lambda < 1$.
   Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\lambda}dt$ est convergente

ANA 245 (vocabulaire)
Justifier que

1. la fonction $f : t \mapsto \ln t.e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
2. la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\cos(t^2)}{t^2}$ est dans $L^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$
3. la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\cos t}{\text{ch}\, t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

ANA 246
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$,

1. la fonction $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^\alpha}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?
2. l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha}dt$ est-elle convergente?

ANA 247
On s'intéresse à l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^2)dt$

1. A l'aide d'un changement de variable judicieux, montrer I et $J = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta$ sont de même nature
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que J et $K = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}}d\theta$ sont de même nature
3. En déduire la nature de I

ANA 248
On note $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^4}$ et $g : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{\infty} f$, de $\displaystyle\int_0^1 f$ puis de $\displaystyle\int_0^{\infty} f$
2. (a) Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 g$
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} g$ converge
   (c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

ANA 249
Soit $\alpha > 0$ et β un réel non nul.
Nous allons montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{it\beta}}{t^{\alpha}}dt$ est une intégrale convergente.

1. Déterminer les valeurs de (α,β) pour lesquelles la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it\beta}}{t^{\alpha}}dt$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
2. Pour tout $x \geqslant 1$, on pose $F_{\alpha}(x) = \int_1^x \dfrac{e^{it\beta}}{t^{\alpha}}dt$
   (a) Montrer que $F_{\alpha}(x) = \dfrac{\alpha}{i\beta}F_{\alpha+1}(x) + \dfrac{1}{i\beta}.\dfrac{e^{i\beta x}}{x^{\alpha}} - \dfrac{e^{i\beta}}{i\beta}$
   (b) Conclure
3. En déduire que $\boxed{\forall\alpha > 0, \forall\beta \neq 0 \text{ les intégrales } \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^{\alpha}}dt \text{ et } \int_1^{\infty} \frac{\cos(\beta t)}{t^{\alpha}}dt}$ sont convergentes.

ANA 250
Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$

1. justifier l'existence de $f(x)$
2. montrer que f est de classe C^{∞} sur $]0,+\infty[$, et donner f'
3. déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$
4. On s'intéresse au comportement de f au voisinage de 0^+
   (a) Montrer que $\forall t \in [0,\pi/2], \sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$, puis en déduire que $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^1 \dfrac{\sin t}{t^2}dt - \ln x$ possède une limite finie lorsque $x \to 0^+$
   (c) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+
5. montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

ANA 251
Soit $x > 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t^4}dt$ converge. (On note $h(x)$ sa valeur)
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
3. Montrer que $h(x) = o(\dfrac{1}{x^2})$ lorsque $x \to +\infty$

ANA 252 (intégrale de Fresnel)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{i.t^2}dt$ converge sans être absolument convergente
2. En déduire que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(t^2)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t^2)dt$ convergent

ANA 253
Soit $\lambda > 0$ et la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n}dt$
3. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^{\lambda}}$

ANA 254
Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0,+\infty[$
Soit h un réel strictement positif
On considère la fonction $g : t \mapsto f(t.h)$ et on note $S(h) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g(k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k.h)$

1. Montrer que la fonction g est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$
2. En déduire que la série de terme général $g(k)$ est bien convergente,
   et rappeler un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(k)$ à l'aide de 2 intégrales.
3. En déduire à l'aide d'un changement de variable judicieux que $\displaystyle\int_h^{\infty} f(t)dt \leqslant h.S(h) \leqslant \int_0^{\infty} f(t)dt$
4. Que dire de $\lim\limits_{h\to 0^+} h.S(h)$?

ANA 255

1. Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie l en $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t+a) - f(t)dt = \int_x^{a+x} f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$
   (b) i. Justifier que $\forall\epsilon > 0, \exists M > 0, \forall t \geqslant M, |f(t) - l| \leqslant \dfrac{\epsilon}{a}$
   ii. En déduire que $\forall\epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \geqslant M, |\displaystyle\int_x^{a+x} f(t)dt - al| \leqslant \epsilon$
   (c) En déduire que, pour tout $a \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} (f(t+a) - f(t))dt$ converge (vers $a.l - \displaystyle\int_0^a f(t)dt$)
2. (a) Calcul de $\int_0^1 \arctan t dt$
   (b) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \arctan(t+1) - \arctan t dt$

ANA 256 (fonction de carré intégrable)
Montrer que $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)^2dt \text{ converge}\}$ est un sev de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$

ANA 257

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}dt$ converge.
2. Soit $f :]0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$. Etudier le sens de variation de f
3. Soit $0 < a < b$ deux réels. On note $F_{a,b}(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}dt$.
   (a) En utilisant un encadrement judicieux, montrer que $\lim_{x\to 0^+} F_{a,b}(x) = \ln\frac{b}{a}$
   (b) Etudier la parité de $F_{a,b}$
   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0} F_{a,b}(x) = \ln\frac{b}{a}$
   (d) Pour $\epsilon > 0$, on note $I(\epsilon) = \int_\epsilon^\infty \frac{\sin^3 t}{t^2}dt$. Montrer que $I(\epsilon) = kF_{1,3}(\epsilon)$ où k est une constante que l'on déterminera.
   (e) En déduire la valeur de I

ANA 258
On considère $I = \int_0^\infty \frac{e^{-5t} - e^{-7t}}{t}dt$ et $I_{a,b} = \int_a^b \frac{e^{-5t} - e^{-7t}}{t}dt$ avec $0 < a < b$

1. Montrer que I est une intégrale convergente
2. Montrer que $I_{a,b} = \int_{5a}^{7a} \frac{e^{-u}}{u}du - \int_{5b}^{7b} \frac{e^{-u}}{u}du$
3. Montrer que $\lim_{b\to\infty} \int_{5b}^{7b} \frac{e^{-u}}{u}du = 0$
4. Montrer qu'il existe une fonction g bornée au voisinage de 0 telle que $\forall a > 0$,
$$\int_{5a}^{7a} \frac{e^{-u}}{u}du = \ln\frac{7}{5} + \int_{5a}^{7a} g(u)du$$
5. En déduire la valeur de I

ANA 259
Nous allons montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \sin(\sin(t))dt$ est divergente.

1. Justifier que $\int_0^{2\pi} \sin(\sin(t))dt = 0$
2. Justifier que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} \sin(\sin(t))dt = 0$
3. Justifier que $\int_0^{\pi} \sin(\sin(t))dt > 0$
4. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty \sin(\sin(t))dt$ est convergente.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \int_0^x \sin(\sin(t))dt$
   (a) Que vaut $F(2n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
   (b) Que vaut $F((2n+1)\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
   (c) Conclure

7 Séries entières

ANA 260
Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon R.
Dans chacun des cas suivants, indiquer ce que l'on en déduit sur R

1. La suite $(\frac{a_n}{2^n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 0
2. La suite $(\frac{a_n}{2^n})_{n\geqslant 0}$ ne possède pas de limite
3. La série $\sum a_n.(-3)^n$ est convergente
4. La série $\sum a_n.(2i)^n$ est divergente.
5. La série $\sum a_n.(-1)^n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

ANA 261
A l'aide de la définition, déterminer le rayon et l'intervalle de convergence des séries entières suivantes

$$i) \sum \frac{z^n}{n.\ln n} \qquad ii) \sum \frac{n^2}{\ln^9 n}z^{3n} \qquad iii) \sum (3 + (-1)^n)^n.z^n$$

ANA 262
Soient α et β deux nombres réels.

1. Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{n!}z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha+\beta)}{n!}z^n$ convergent pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Qu'en déduit-on sur le rayon de ces séries entières?
2. Calculer $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha+\beta)}{n!}z^n$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha+\beta)}{n!}z^n$ pour $z \in \mathbb{R}$

ANA 263 (reconnaître des SE de référence)
Déterminer le rayon et la fonction somme des séries entières suivantes sur l'intervalle ouvert de convergence

$$i) \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n+1}z^n}{n!} \quad ii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(2n)!} \quad iii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} \quad iv) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n)!} \quad v) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$vi) \sum_{n\geqslant 0} 2^{n+3}.x^n \quad vii) \sum_{n\geqslant 1} 2^{2n-2}.x^{3n+1} \quad viii) \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{4n} \quad ix) \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n.x^{n+2}}{n+1} \quad x) \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n-1}.x^{4n+1}}{n+3}$$

ANA 264
Soient α et β deux nombres réels. Calculer pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$ les sommes $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\alpha+\beta)z^n$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\alpha+\beta)z^n$

ANA 265
Déterminer le rayon et faire l'étude de la convergence en $\pm R$ pour les séries entières suivantes:

$$1. \sum \frac{x^n}{2^n.n^2} \quad 2. \sum (1+\frac{1}{n})^n x^n \quad 3. \sum n3^{-n}x^n \quad 4. \sum \frac{n^2+3n-2}{2n^4-3n+1}x^n \quad 5. \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad 6. \sum \frac{\ln n}{n}x^n$$

ANA 266
En utilisant la règle de D'Alembert pour les séries numériques, déterminer le rayon des séries entières suivantes:

$$i) \sum_{n\geqslant 0} (n^2 + 3(-2)^n + 1)z^{2n} \qquad ii) \sum_{n\geqslant 0} n!z^n \qquad iii) \sum_{n\geqslant 0} 2^n n z^{n!}$$

ANA 267
Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2(n).x^n$

ANA 268
Soient a et b deux complexes non nuls.
1. Déterminer le rayon de $\sum a^n.z^n$ et de $\sum a^n.z^{3n}$
2. En déduire le rayon de $\sum (a^n + b^n).z^n$
3. On suppose que pour n assez grand, on a $2^n \leqslant c_n \leqslant 3^n$.
   Que dire de $Rayon(\sum c_n.z^n)$?

ANA 269
1. Déterminer le rayon et la somme des séries entières suivantes:
$$S_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{2p} \qquad S_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \qquad S_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{2p}$$
2. On s'intéresse à la série entière $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$
   (a) Déterminer son rayon.
   (b) A l'aide des séries précédentes, déterminer $S(x)$

ANA 270
1. On considère $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln n.x^n$. Donner l'ensemble de définition de la fonction S?
2. On considére la suite (a_n) définie par $a_1 = -1$ et $\forall n \geqslant 2, a_n = -\ln(1 - \dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{n}$.
   On pose $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Donner l'ensemble de définition de T.
3. Déterminer une égalité liant S et T?

ANA 271 (classique)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   A l'aide de factorielles, exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ et $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$
2. Vérifier que $\forall x \in]-1,+1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} \dbinom{2n}{n} x^n$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)} \dbinom{2n}{n} x^n$

ANA 272
On pose pour tout n entier $a_n = \tan \dfrac{n\pi}{5}$
1. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est bornée. *(on pourra considérer a_{n+5})*
3. Montrer que $a_1 = -a_4$ et $a_2 = -a_3$
4. On considère la série entière $\sum a_n x^n$.
   (a) Déterminer son rayon
   (b) Etudier la convergence pour $x = R$ et pour $x = -R$
   (c) Calculer $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ pour tout $x \in]-1,+1[$

ANA 273
Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln(1-t^3)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n.(3n+1)}$

ANA 274
Rayon et fonction somme de
$$i) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!} x^n \qquad ii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n-4}{(n+1)!} x^n \qquad ii) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{(n+1)!} x^n$$

ANA 275
Exprimer les fonctions suivantes au voisinage de 0 comme des sommes de séries entières, et préciser l'intervalle de validité
$$f_1 : x \mapsto \ln(1+3x^2) \qquad f_2 : x \mapsto \ln(2+3x^2) \qquad f_3 : x \mapsto \cos^2 x \qquad f_4 : x \mapsto \cos^3 x$$

ANA 276 (produit de Cauchy)
On considère la suite (c_n) définie par $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!}$
Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$

ANA 277
Déterminer le rayon des séries entières du type $\sum \dfrac{z^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

ANA 278
Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-2)^n}{2n+1}.x^{2n+1}$

ANA 279
Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $f^{(n)}(0)$.

ANA 280
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \text{ch}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $f^{(n)}(0)$.

ANA 281 (une justification de l'existence d'un DSE)
On note $f(x) = \text{ch}(x).\cos(x)$
1. Montrer que f est DSE. Quel est le rayon de sa série entière?
2. Déterminer le DSE de f en utilisant les complexes.

ANA 282
1. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$? Pourquoi?
2. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout réel x tel que $|x| < R$
   la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) x^n$
   (On pourra calculer d'abord le produit $(1+x)S(x)$)
3. Etudier la convergence de la série entière en $\pm R$

ANA 283 (une fonction C^∞ mais non DSE!)
Nous allons montrer que la fonction $f : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
2. Montrer par récurrence sur n qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.
   (on pourra établir une formule de récurrence entre P_{n+1} et P_n)
3. En déduire que f est infiniment dérivable en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n
4. Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0

ANA 284 (équation différentielle)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + xy = 1$
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S
   Montrer que S vérifie (E) sur $]-R, +R[$ ssi $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -\dfrac{n}{n+1}a_{n-1}$
3. Démontrer que si f est DSE alors $\forall n \geqslant 0, a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$
4. Conclure que f est DSE.
5. f est-elle une fonction impaire?

ANA 285
Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{n+p}{p} x^n$

1. Déterminer le rayon de cette série entière.
2. Justifier que f vérifie sur $]-1, +1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$
3. En déduire une expression simple de f

ANA 286
Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 2, (n+1)a_{n+1} = na_n + \dfrac{1}{2}a_{n-2}$.

On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$ et on note $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.

1. Montrer que pour tout entier n, on a $a_n \in [0,1]$
2. Montrer la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante
3. Déterminer le rayon R
4. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S.
   Puis en déduire S.

ANA 287 (DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (démo de cours))
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout x réel on note $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, donner le DSE de f_α et son rayon.
   Dans la suite on supposera que $\alpha \notin \mathbb{N}$
2. Déterminer la série de Taylor de f. Quel est le rayon de cette série entière?
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_α et montrer que sa série de Taylor vérifie la même équation différentielle. (on précisera sur quel intervalle)
4. Justifier que f_α est DSE et retrouver le résultat de cours

ANA 288
α et β étant deux réels, trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec :

1. $a_n = \dfrac{n^{\alpha n}}{n!}$ 2. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 3. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 4. $a_n = \cos n$
5. $a_n = \arccos(1 - \dfrac{1}{n^2})$ 6. $a_n = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(\dfrac{n-1}{n})$ 7. $a_n = e^{\sqrt{n}}$ 8. $a_n = n^{n+1}$
9. $a_n = \arctan(n^\alpha)$ 10. $\left(\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^n$ 11. $\dfrac{n^2}{4^n+n}$ 12 . $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$
13. $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ 14. $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ 15. $\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$ 16. $\dfrac{\cos^2 n}{n}$

ANA 289
On suppose que les séries entières $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence noté R. Montrez que R est aussi le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

ANA 290
($\theta \in \mathbb{R}$) Déterminer rayon, intervalle de convergence et fonction somme(sur l'intervalle ouvert de convergence) des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2x^n$ 2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{ch}(n)x^n$ 4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{sh}(n)x^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(n\theta)x^n$ 6. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n\theta)x^n$ 7. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n+3}{2n+1}x^n$ 8. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1}.n.x^{2n+1}$
9. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+1}{n+1}x^n$ 10 $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{nx^n}{(2n+1)!}$ 11. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)(2n+1))}$ 12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-n-1}{(n+1)!}x^n$
13. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^3x^n$ 14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{n+1}x^{3n}$ 15. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n(n+2)!}x^{2n}$ 16. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$
17. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ 18. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\operatorname{ch} n}{n!}x^n$ 19. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n^2+1)x^n$ 20. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3.x^n}{(n+3)!}$
21. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1}$ 22. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+n+1}{2^n}x^n$ 23. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3+n+1}{n+1}x^n$ 24. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(\dfrac{2n\pi}{3})x^n$

ANA 291
On souhaite développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{dt}{1-xt+xt^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 4[$, $f(x)$ est bien définie.
2. On note $J_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$. Calculer $J_{p,q}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$
3. On note $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}(t-t^2)^{n+1}}{1-xt+xt^2}dt$. Montrer que l'on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!}x^k + I_n$
4. Montrer que pour $|x| < 4$, on a $\lim I_n = 0$. Conclure.

ANA 292
On conisidère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$

1. Déterminer son rayon et sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
2. La série est-elle convergente pour $x = 1$ et $x = -1$?
   Dans ce cas, donner la valeur des sommes de ces séries

ANA 293

1. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.
2. Calculer , de deux manières différentes, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

   on rappelle le développement asymptotique $T_n = \sum_{k=1}^{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ désigne une constante réelle, la constante d'Euler.

ANA 294

Développement en série entière de la fonction f définie par

1. $f(x) = e^{\arcsin x}$	2. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $f(x) = \arctan\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$
4. $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	5. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$	6. $f(x) = \cos^3 x$
7. $f(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3}$	8. $f(x) = (\arcsin x)^2$	9. $f(x) = \cos(x+1)$
10.$f(x) = (x+1)\ln(x+1)$	11.$f(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$	12.$f(x) = (\arctan(x))^2$
13. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$	14. $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$	15. $f(x) = \mathrm{sh}(x)\cos(x)$
16. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)$	17. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)$	18. $f(x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)$

ANA 295

Soit $\theta \in]0,\pi[$. Développer en série entière la fonction $f : x \to \frac{\sin\theta}{1-2x\cos(\theta)+x^2}$

ANA 296

On considère la SE $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

1. Vérifier que $\forall\ n \geq 1$, $(2n+1)a_n - 2na_{n-1} = 0$.
2. En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f et une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.*(on trouvera $(1-x^2)y' - xy = 1$)*

ANA 297

Soit (a_n) la suite de réels définie par $a_0 = a_1 = 1$ et la relation $a_{n+1} = a_n + 2\frac{a_{n-1}}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

1. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$
2. En déduire le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$
3. Prouver que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie une équation différentielle du premier ordre à déterminer.
   (on trouvera $(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = 0$)
4. En déduire la valeur de la somme de cette série entière.
5. A partir de l'expression de S ainsi trouvée, démontrer que $a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2)^{n-p}}{(n-p)!} \cdot \frac{(p+2)(p+1)}{2}$

ANA 298

1. Déterminer les solutions de $y'' + xy' + y = 0$ qui sont développables en série entière.
2. Reconnaître parmi ces solutions la fonction $x \mapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$
3. Toutes les solutions de l'équation différentielle sont-elles développables en série entière?

ANA 299

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et on note $S(x)$ sa fonction somme.

préliminaire: donner le DSE de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ ainsi que son rayon.

1. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 3^n$ pour tout entier n.
2. En déduire que la série entière a un rayon non nul (que l'on appellera R). Peut-on donner un minorant de R?
3. Montrer que $\forall x \in]-R,+R[, S(x) = 2xS(x) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$
4. Déterminer les trois réels a, b et c tels que $\frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{a}{1-2X} + \frac{b}{1-X} + \frac{c}{(1-X)^2}$
5. En déduire l'expression explicite de a_n en fonction de n.

ANA 300

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.x^n$ avec $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt$

1. Etablir la relation $2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n$
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$
3. Montrer que f est solution de $2(1-x)y' - y = 0$
4. En déduire $f(x)$ et u_n

ANA 301

Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}$

1. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner $f'(x)$
2. Factoriser $1 - X^3$. En déduire que f est dse et donner son dse

ANA 302

Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} a_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant a_n \leqslant 4$
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$
3. Calcule sa somme $S(x)$en exprimant $S'(x)$ en fonction de x et de $S(x)$, puis en résolvant l'équation différentielle

8 Intégrales à paramètres

ANA 303
Pour tout x réel, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+2t+1+x^2}$.

1. Montrer que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier,
   c'est à dire que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{dt}{t^2+2t+1+x^2}$ est convergente pour tout réel x.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. On souhaite, de deux manières différentes, prouver la continuité de g
   (a) En calculant $g(x)$, montrer que g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant le théorème ad hoc, montrer que g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
4. On souhaite montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en utilisant le calcul de 3(a).
   (a) Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Déterminer le développement en série entière de la fonction arctan.
   (c) En déduire que g est aussi développable en série entière.
   (d) Justifier que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et donner $g^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

ANA 304 (très classique, à savoir refaire)
On note pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ et $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(t^2+1))}{t^2+1}dt$

1. Justifier que F est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$. Donner F'.
2. Justifier que G est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$. Donner G'.
3. Montrer que la fonction F^2+G est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Déterminer cette constante.
4. Après avoir montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, en déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

ANA 305
On pose $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(t+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g
2. Montrer que g est continue sur $]0,1[$. (indication: on pourra montrer que g est continue sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,1[$)

ANA 306
On note pour tout x réel $g(x) = \int_0^1 \arctan(xt)dt$.

1. Montrer que g est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g vérifie l'équation différentielle $(E)\ xy' + y = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. Montrer que g est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$

ANA 307
On pose $g(x) = \int_0^1 e^{-x/t}dt$

1. Montrer que g est définie sur $[0,+\infty[$
2. Montrer que g est C^2 sur $]0,+\infty[$ et vérifier que $\forall x > 0, g''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

ANA 308
On pose $g(x) = \displaystyle\int_{[0,\infty[} \frac{\sin(tx)}{1+t^3}dt$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$
3. La fonction g est-elle paire? impaire?

ANA 309
Pour $x > 0$ on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}dt$

1. (a) Sans utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral, montrer que la fonction g est définie et croissante sur $]0,+\infty[$.
   (b) Déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$
2. (a) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ sont intégrables sur $]0,1]$?
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$
   g est-elle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
   (c) Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln^2 x}{2} + g(x) + g(1/x)$?

ANA 310 (extrait de la banque PT 2007)
On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} \end{array}$ et $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}dt$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$?
2. Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[, |f(x,t)| \leqslant \dfrac{2}{e^t}$
3. g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (on énoncera le théorème utilisé)

ANA 311
On pose $g(x) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire
2. montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
3. montrer que g vérifie l'équation différentielle $2y'(x) + xy(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
4. en admettant que $g(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$

ANA 312 (cas d'une intégrale non généralisée)
On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{[0,\pi]} \cos(x\sin(\theta))d\theta$

1. Montrer que g est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$
3. En déduire que g est développable en série entière: donner ce développement et le rayon

ANA 313
On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que g est définie sur $]0,+\infty[$ et justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
2. Montrer que g est de classe C^2 sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\forall x > 0, g''(x) + g(x) = \dfrac{1}{x}$

ANA 314
On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{\infty} \exp(-x.t).\arctan(t).dt$
Montrer que g est continue sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.
En déduire que g est continue sur $]0,+\infty[$.

ANA 315
i) Montrer que $g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{1+t^2}dt$ est C^∞ sur un intervalle que l'on précisera.
ii) Montrer que $h : x \mapsto \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{sh}\, t}{t}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$

ANA 316
On pose, lorsque cela est possible

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. En justifiant son existence, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
3. Calculer $g(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi\ :\ u > 0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.
4. Calculer $g(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
5. Vérifier que g est positive sur I.
6. Montrer que g est décroissante sur I.
7. Prouver que g est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $g'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.
8. Soit $x \in I$. Démontrer la relation
$$g(x+2) = \frac{x}{x+1}g(x)$$
On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $g(2p)$ à l'aide de factorielles.
10. Pour tout réel $x > 0$, on pose
$$\phi(x) = xg(x)g(x+1)$$
Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $g(x)$ quand $x \to 0^+$.
12. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)g(n+1) = \frac{\pi}{2n}$. En déduire que
$$g(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
13. En utilisant des parties entières, prouver que
$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$
14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de g sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
15. Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

ANA 317
On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 e^{x.t^2}.dt$
1. Montrer que g est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$.
2. Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. g est-elle bornée?

ANA 318
On pose $g : x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}dt$
1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner g' sous forme intégrale
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
4. En déduire une expression très simple de g

ANA 319
On pose $g :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\, dt$
1. Etudier les limites de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ en 0^+ et en 1^-
2. Vérifier que g est une fonction bien définie sur $]-1,+\infty[$
3. Montrer que g est de classe C^1 sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$
4. En déduire que g est C^1 sur son ensemble de définition, et donner une expression de g' sans intégrale
5. En déduire une expression de g à une constante additive près
6. Montrer que $\forall t \in]0,1[, 0 \leqslant \frac{t-1}{\ln t} \leqslant 1$
7. En déduire que $\forall x > -1, 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$
8. En déduire l'expression de g

ANA 320
1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim u_n$ avec $u_n = \int_0^{1/n} \frac{n.\cos t}{1+n^2t^2}dt$

ANA 321
On note $\quad g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$
1. Montrer que $g(x)$ existe pour tout $x > 0$
2. Montrer que g est continue sur $]0,+\infty[$ (on majorera sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$)
3. Calculer $g(x) + g(x+1)$ pour $x > 0$
4. Donner un équivalent de g en 0^+ et préciser sa limite $+\infty$

ANA 322
On considères les intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t.dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2.dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

1. Justifier l'existence des intégrales I_1 et I_2 et les calculer
2. Justifier l'existence de I_3 et la calculer en introduisant la fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$
3. On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt$
   (a) Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) Démontrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$
   (c) Démontrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, xg''(x) + g'(x) + xg(x) = 0$$

ANA 323

On note $g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}dt$

1. Montrer que $g(x)$ est bien défini pour $x \geqslant 0$
2. Montrer que g est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$
3. Justifier que $\forall n \geqslant 0, g^{(n)}(0) = (-1)^n.(n!)^2$

ANA 324

On pose $g(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(tx)}{t^2}e^{-t}dt$ Montrer que : $g(x) = x\arctan x - 1/2\ln(1+x^2)$

ANA 325

Etudier et représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \sqrt{x+t^3}dt$

ANA 326 (Transformée de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt$.

1. Démontrer que g est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que si f est une fonction paire alors g l'est aussi et que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2.\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(xt)dt$. Quel résultat obtient-on si f est impaire?
3. On considère désormais $f : t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2})$
   (a) Montrer que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$
   (b) Calculer g' et en déduire g.
   On admettra que $\int_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ANA 327 (fonction Γ, fonction très populaire en mathématique!)

On note $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

Pour $0 < a < b$, on pose $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{a-1}.e^{-t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ t^{b-1}.e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$
2. En déduire que Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$
3. Calculer la valeur de $\Gamma(1/2)$ sachant que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
4. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$
5. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
6. Montrer, à l'aide d'une domination locale, que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que
$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t).t^{x-1}.e^{-t}.dt$$

ANA 328 (fonction Γ, fonction très populaire en mathématique!)

On note $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$
2. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. (a) Calculer $\Gamma(1)$
   (b) En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. Montrer que Γ est une fonction de classe C^1, puis C^2, sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$
5. Démontrer, par récurrence, que Γ est une fonction de classe C^k sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

ANA 329 (Transformée de Laplace)

On appelle transformée de Laplace d'une fonction f en p l'intégrale, lorsqu'elle converge:
$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}.dt$$

1. On note H l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^{*+}$, prolongeables par continuité à droite en 0 et telles que pour tout réel $A > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-At}f(t) = 0$
   (a) Montrer que si $f \in H$ alors pour tout réel $p > 0$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p)$
   (b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$.
   Montrer que si $f \in H$ et $f' \in H$ alors on a
$$\mathcal{L}(f')(p) = p.\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$
   où $f(0^+)$ désigne la limite de f à droite en 0
2. Dans chaque cas, montrer que $f \in H$ et calculer $\mathcal{L}(f)(p)$:
   (a) $f(t) = U(t)$, où $U(t) = 1$ si $t > 0$ et $U(t) = 0$ sinon;
   (b) $f(t) = t^n.U(t)$, où $n \in \mathbb{N}$;
   (c) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi).U(t)$, où $(\omega,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi]$;
   (d) $f(t) = t.\sin(t).U(t)$ (on pourra utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\int$)
3. A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre $\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

ANA 330

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. Etude de g
   (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que g admet un DL en 0 à l'ordre un.
   En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $g'(0)$
   (c) Déterminer le signe pour $t \in \mathbb{R}$ de $(1+t)e^{-t} - 1$
   (d) Dresser le tableau de variations de g et tracer le graphe de g
   (e) i. Donner le DSE au voisinage de 0 de la fonction g, préciser le rayon de convergence.
   ii. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout $k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(0)$ (énoncer le (ou les) théorème(s) utilisé(s))
2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)dt$
   (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties)
   On notera alors α la valeur de cette intégrale et on pourra écrire $h(x) = \alpha - \int_0^\infty e^{-xt}.\frac{\sin t}{t}dt$
   (b) En déduire que h est définie sur $[0,+\infty[$. Que vaut $h(0)$?
   (c) Montrer que h est de classe C^1 sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$, en déduire que pour tout $x > 0, h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(d) Montrer que pour tout $x > 0, h(x) = \int_0^\infty g(u)\sin\left(\frac{u}{x}\right) du$

(e) En déduire que pour tout $x > 0, h(x) = x + x\int_0^\infty g'(u)\cos\left(\frac{u}{x}\right) du$

(f) En déduire que pour tout $x > 0, |h(x)| \leqslant 2x$

(g) Montrer que h est continue sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geqslant 0, h(x) = \arctan x$

(h) En déduire que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

ANA 331 (transformée de Laplace)

f étant une fonction définie sur $[0, +\infty[$, on appelle *transformée de Laplace* de f, et on note L_f, la fonction définie par $L_f(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$

1. Montrer que si f est une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, alors L_f est définie et continue sur $]0, +\infty[$
2. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes

$$t \mapsto \cos\omega t\,(\text{avec } \omega \neq 0) \qquad t \mapsto t \qquad f_n : t \mapsto t^n(\text{avec } n \geqslant 1)$$

3. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$ telles que

$$\exists A > 0, \exists M > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \forall t \geqslant A, |f(t)| \leqslant M.e^{at}$$

(a) Montrer que E est un espace vectoriel

(b) Montrer que si $f \in E$ alors L_f est définie et continue sur $]a, +\infty[$

4. Montrer que $L : f \mapsto L_f$ est une application linéaire sur E
5. Montrer que lorsque f et f' sont dans E, on a $L_{f'} = xL_f - f(0)$
6. On note F l'ensemble des fonctions f C^∞ sur $[0, +\infty[$ telle que $\exists A > 0, \exists M > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall t \geqslant A, |f(t)| \leqslant M.t^n.e^{at}$

(a) Montrer que F est un ev.

(b) Montrer que si $f \in F$ alors $t \mapsto tf(t)$ est encore dans F

(c) Montres que si $f \in F$ alors L_f est une fonction de classe C^1 sur $]a, +\infty[$. Donner $(L_f)'$. (indic. on pourra montrer que L_f est de classe C^1 sur tout segment inclus dans $]a, +\infty[$)

ANA 332 (transformée de Fourier)

A toute fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, on associe sa transformée de Fourier

$$\boxed{\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt}$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que si f est une fonction paire alors $\hat{f}$ l'est aussi et que $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(xt)dt$. Quel résultat obtient-on si f est impaire?
3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$

(a) Justifier que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x)$

ANA 333

On pose $g(x) = \int_0^\infty \dfrac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2}dt$ pour $x > 0$, montrer qu'on a $g(x) = \pi\ln(1 + x)$

ANA 334

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$.
On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,dt$.

1. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ (on pourra majorer localement)
2. Montrer que F est C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$
3. Calculer F dans le cas où $f : t \mapsto \sin(t)$

ANA 335

Pour $x > -1$ on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2(t))dt$

1. Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ sour forme d'intégrale
3. A l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, déterminer explicitement $f'(x)$ (on distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$)
4. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x > -1$

ANA 336

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
2. Montrer de même que la fonction

$$g_k : x \to \frac{f(x) - f(0) - xf'(0) - \cdots - \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)}{x^k}$$

se prolonge en une fonction de classe C^∞ en 0.

ANA 337 (produit de convolution)

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, a et b deux réels. On pose $h(x) = \int_a^b f(t)g(x - t)dt$.

1. Montrer que h est continue
2. Montrer que si g est C^k alors h l'est aussi
3. Montrer que si f est C^1 et g seulement continue alors h est C^1