PT* 24/25 - DM 9
à rendre le vendredi 6 décembre

Réduction et équation différentielle

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
On considère f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$

1. (a) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$. On la note A
   (b) Déterminer les éléments propres de A
   (c) En déduire les éléments propres de f
2. Dans cette question, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note (E_λ) l'équation différentielle

$$(2x+1-\lambda)y(x) - (x^2-1)y'(x) = 0$$

   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,+1\}, \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$
   (b) Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_λ) sur chacun des intervalles : $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
   (c) Pour quelles valeurs de λ toutes les solutions de (E_λ) sont-elles polynômiales sur chacun des intervalles ci-dessus? Peut-on retrouver ainsi les résultats de la question 1(c)?

Un recollement

On considère l'équation (E) : $|x|.y' + (x-1).y = x^3$

1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$
2. Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Un calcul de A^n

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A
2. Vérifier que $\chi_A(A) = 0$
3. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$
   (On pourra considérer la division euclidienne de X^n par χ_A)

Un recollement

- On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x|y' + (x-1)y = x^3$ (E). On remarque que $|x|$ s'annule pour $x = 0$. Nous allons donc répondre à la question en:
  1. Déterminant les solutions sur $]0, +\infty[$
  2. Déterminant les solutions sur $]-\infty,0[$
  3. Résolvant le problème du raccordement en zéro

1. Résolution sur $]0, +\infty[$.
   - Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) équivaut à l'équation $(E'), y' + \dfrac{x-1}{x}y = x^2$. (car $|x| = x$)
   - On a $\int \dfrac{1-x}{x}dx = \ln(x) - x + cste.$
     Donc la solution générale de l'équation homogène associée est $y(x) = Ke^{\ln(x)-x} = K.x.e^{-x}$
   - On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose donc $y(x) = K(x).x.e^{-x}$. En remplaçant dans (E') cela donne $K'(x) = x.e^x$. En réalisant un ipp, on trouve que $K(x) = xe^x - e^x + cste$. Une solution particulière est donc $y(x) = x^2 - x$.
   - Conclusion: $\boxed{\text{la solution générale de } (E) \text{ sur }]0, +\infty[\text{ est } y(x) = x^2 - x + K.x.e^{-x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$
2. Résolution sur $]-\infty,0[$.
   - Sur $]-\infty,0[$, l'équation (E) équivaut à l'équation $(E''), y' + \dfrac{1-x}{x}y = -x^2$. (car $|x| = -x$)
   - On a $\int \dfrac{x-1}{x}dx = x - \ln|x| = x - \ln(-x) + cste$. Donc la solution générale de l'équation homogène associée est $y(x) = Le^{x-\ln(-x)} = L\dfrac{e^x}{-x} = -L\dfrac{e^x}{x}$ avec $L \in \mathbb{R}$.
   - On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose donc $y(x) = -L(x)\dfrac{e^x}{x}$. En remplaçant dans (E'') cela donne $L'(x) = x^3\exp(-x)$. Des intégrations par parties successives (à chaque fois, on dérive le polynôme et on primitive e^{-x}) nous donnent $L(x) = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + cste$. Une solution particulière est donc $x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$
   - Conclusion:

     $$\boxed{\text{la solution générale de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ est } y(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} - L\frac{e^x}{x} \text{ avec } L \in \mathbb{R}}$$
3. Etude du recollement en 0.
   On considère la fonction
   $$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 - x + K.x.e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ M & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x} - L\dfrac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$$
   - On cherche les conditions sur $(K,L,M) \in \mathbb{R}^3$ pour que y soit dérivable en 0.
   - Si l'on veut que y soit dérivable en 0, il faut déjà que y soit continue en 0.
     (car la dérivabilité implique la continuité)
     On sait que y est continue en 0 ssi $\lim\limits_{0^-} y = \lim\limits_{0^+} y = y(0)$.
     - On a sans difficulté $\lim\limits_{0^+} y(x) = \lim\limits_{0^+} x^2 - x + K.xe^{-x} = 0$

- Pour étudier la limite en 0^-, il faut faire plus attention: détaillons!
  - $\lim\limits_{0^-} x^2 + 3x + 6 = 6$ (et ici pas de problème!)
  - $\lim\limits_{0^-} \frac{6}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$.
  - Nous allons utiliser un DL pour l'expression $\frac{6}{x} - L\frac{e^x}{x}$.
    On obtient $\frac{6 - Le^x}{x} = \frac{6 - L - Lx + o(x)}{x} = \frac{6 - L}{x} - L + o(1)$.
    On trouve ainsi que:
    i) si $L > 6$ on a $\lim\limits_{0^-} \frac{6}{x} - L\frac{e^x}{x} = +\infty$.
    ii) si $L < 6$ on a $\lim\limits_{0^-} \frac{6}{x} - L\frac{e^x}{x} = -\infty$.
    iii) si $L = 6$ on a $\lim\limits_{0^-} \frac{6}{x} - L\frac{e^x}{x} = -6$
  - On a prouvé que y possède une limite finie à gauche en 0 ssi $L = 6$, et dans ce cas $\lim\limits_{0^-} y = 6 - 6 = 0$
- Conclusion: $\boxed{\text{on a prouvé que } y \text{ continue en 0 ssi } (L,M) = (6,0)}$
  Dorénavant, on suppose que L et M ont pris ces valeurs.

• Etude de la dérivabilité en 0.
On sait que y sera dérivable en 0 ssi y est dérivable à droite et à gauche en 0, et que ces dérivées sont égales.

- dérivabilité à droite.
  On a pour $x > 0$, $\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x + Kxe^{-x}}{x} = x - 1 + Ke^{-x}$.
  Ainsi $\lim\limits_{0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = K - 1$.
  On a prouvé que y est dérivable à droite en 0 et que $y'_d(0) = K - 1$
- dérivabilité à gauche.
  On a pour $x < 0$, $\frac{y(x) - y(0}{x - 0} = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6 - 6e^x}{x^2} =$
  . $\frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6 - 6(1 + x + x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{x^3 + o(x^2)}{x^2} = x + o(1)$
  (on a réalisé un DL à l'ordre deux de e^x)
  On trouve ainsi que $\lim\limits_{0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$
  On a prouvé que y est dérivable à gauche et que $y'_g(0) = 0$
- Conclusion: $\boxed{y \text{ est dérivable en 0 ssi } K = 1\text{, et dans ce cas } y'(0) = 0}$

4. Conclusion générale: On trouve qu'il existe une et une seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il s'agit de la fonction
$$\boxed{\begin{array}{llll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 - x + x.e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$$

Un calcul de A^n

1. La calcul donne $\chi_A(X) = (X-1)^3$
2. On a $\chi_A(A) = (A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

   Le calcul matriciel donne effectivement $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^3 = 0_3$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$
   - Le théorème de la division euclidienne indique qu'il existe un unique couple de polynômes (Q_n,R_n) tel que $\begin{cases} X^n = (X-1)^3.Q_n + R_n \\ deg(R_n) < 3 \end{cases}$.

     c'est à dire qu'il existe 3 réels (a_n,b_n,c_n) tels que

     $$X^n = (X-1)^3.Q_n + a_n X^2 + b_n X + c_n \qquad (1)$$
   - En remplaçant X par 1 cela donne $a_n + b_n + x_n = 1$
   - En dérivant (1) puis en remplaçant X par 1 cela donne $n = 2.a_n + b_n$
   - En dérivant de nouveau puis en remplaçant X par 1 cela donne $n.(n-1) = 2a_n$
   - La résolution de ce système aboutit à $\begin{cases} a_n & = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ b_n & = n(2-n) \\ c_n & = \dfrac{n^2-3n+2}{2} \end{cases}$

     et ainsi

     $$R_n(X) = \frac{n(n-1)}{2}X^2 + n(2-n)X + \frac{n^2-3n+2}{2}$$
   - En remplaçant maintenant dans (1) l'indéterminée X par la matrice A, on obtient

     $$A^n = \underbrace{(A-I_3)^3}_{=0-3}.Q_n(A) + a_n.A^2 + b_n.A + c_n.I_3 = a_n.A^2 + b_n.A + c_n.I_3$$

     Le calcul de A^2 donne

     $$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

     d'où

     $$\begin{aligned} A^n &= \frac{n(n-1)}{2}.\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} + n(2-n).\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{n^2-3n+2}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -n^2-n+2 & -2n & n^2+3n \\ -n^2+n & -2n+2 & n^2+n \\ -n^2-n & -2n & n^2+3n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Réduction et équation différentielle

1. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Une recherche classique de sep donne

   - $\chi_A = \{-1{,}1{,}3\}$
   - $E_{-1}(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E_1(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad E_3(A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c)
   - Déjà on sait que $sp(f) = sp(A) = \{-1{,}1{,}3\}$
   - Soit λ une valeur propre de f.
     On a les équivalences

$$\begin{aligned} aX^2+bX+c \in E_\lambda(f) &\iff f(aX^2+bX+c) = \lambda.(aX^2+bX+c) \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f(aX^2+bX+c) = \lambda.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(aX^2+bX+c) \\ &\iff A.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

     Ainsi

$$E_{-1}(f) =< X^2-2x+1 > \qquad E_1(f) =< -X^2+1 > \qquad E_3(f) =< X^2+2X+1 >$$

2. (a) Les calculs donnent $a = \dfrac{3-\lambda}{2}$ et $b = \dfrac{\lambda+1}{2}$

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et notons I un des trois intervalles donnés.
   On remarque que sur I on a x^2-1 qui ne s'annule jamais, et donc

$$(E_\lambda \iff y'(x) - \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}y(x) = 0$$

   Notons $a : x \mapsto -\dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}$ et A une primitive de a sur I.

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int^x \frac{2t+1-\lambda}{t^2-1}dt \\ &= -\int^x \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}dt \\ &= -a.\ln|x-1| - b.\ln|x+1| + Cste \end{aligned}$$

   rem: attention à ne pas oublier ici les valeurs absolues!!

   La solution générale de (E_λ) sur I est alors

$$y : x \mapsto K.e^{-A(x)} = K.|x-1|^{\frac{3-\lambda}{2}}.|x+1|^{\frac{\lambda+1}{2}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

   rem: plus précisément, on a

- si $I =]1, +\infty[$
$$y : x \mapsto K.(x-1)^{\frac{3-\lambda}{2}}.(x+1)^{\frac{\lambda+1}{2}}$$
- si $I =]-1,1[$
$$y : x \mapsto K.(1-x)^{\frac{3-\lambda}{2}}.(x+1)^{\frac{\lambda+1}{2}}$$
- si $I =]-\infty, -1[$
$$y : x \mapsto K.(1-x)^{\frac{3-\lambda}{2}}.(-x-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}$$

(c)
- Les solutions de (E_λ) sont polynomiales ssi les exposants a et b sont des entiers positifs (au sens large) càd $\begin{cases} \dfrac{3-\lambda}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda+1}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$
- Notons $q = \dfrac{\lambda+1}{2}$.
On doit donc avoir $\lambda = 2q-1$ avec $q \in \mathbb{N}$.
Et également
$$\frac{3-\lambda}{2} \in \mathbb{N}$$
qui équivaut à
$$2-q \in \mathbb{N}$$
On trouve ainsi trois valeurs de q possibles : $0, 1, 2$
- $\boxed{\text{Cela donne comme valeurs de } \lambda : -1,1,3}$
- *Peut-on retrouver ainsi les résultats de la question 1(c)?*

Oui!!

Car on a
$$(E_\lambda) \iff (2x+1)y(x) - (x^2-1)y'(x) = \lambda y(x)$$
Ainsi déterminer les fonctions polynomiales de (E_λ) revient à déterminer les polynômes tels que
$$(2X+1).P(X) - (X^2-1).P'(X) = \lambda P(x)$$
càd
$$f(P) = \lambda P$$