PT* 24/25 - DM 8
à rendre le vendredi 29 novembre

Noyaux et Images itérés

Soient f et g deux endomorphismes de E, un espace vectoriel de dimension finie n

1. Prouver une inclusion entre $\ker(g)$ et $\ker(f \circ g)$, ainsi qu'une inclusion entre $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$
3. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$
   On pourra supposer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}(f^{p+1}) < \mathrm{rg}(f^p)$ *et arriver à une contradiction*
   Dans la suite de l'exercice, p gardera cette définition
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$.
5. En déduire que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$
6. Montrer par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{p+k}) = \mathrm{Im}(f^{p+k+1})$
7. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^{p+k}) = \ker(f^{p+k+1})$
8. Montrer que $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E$

Un calcul de A^n

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$
3. Cette formule est-elle encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Noyaux et Images itérés

1. • Montrons que $\ker g \subset \ker(f \circ g)$
   Soit $x \in \ker g$
   On a
   $$g(x) = 0$$
   Comme f est une application linéaire
   $$f(g(x)) = f(0) = 0$$
   ce qui prouve que $x \in \ker(f \circ g)$

   • Montrons que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$
   Soit $x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$
   Il existe donc $y \in E$ tel que
   $$x = (g \circ f)(y) = g(f(y))$$
   Notons $z = f(y)$.
   On a prouvé qu'il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$ ce qui signifie que $x \in \mathrm{Im}(g)$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$
   • D'après Q1, on a avec $g = f^k$
   $$\ker f^k \subset \ker(f \circ f^k) = \ker(f^{k+1})$$
   • D'après Q1, on a avec $g = f^k$
   $$\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k \circ f) \subset \mathrm{Im}\, f^k$$

3. Supposons que $\forall p \in \mathbb{N}, rg(f^{p+1}) < \mathrm{rg}(f^p)$.
   Nous allons pour simplifier l'écriture poser $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \mathrm{rg}(f^p)$
   • La suite (u_p) est une suite d'entiers naturels, car la dimension d'un ev est toujours un entier naturel.
   • La suite (u_p) étant une suite **d'ENTIERS strictement décroissante** ,
   elle tend forcément vers $-\infty$ (exercice sur les suites classiques)

   On aboutit bien à une **contradiction** car la suite (u_p) est positive donc ne peut tendre vers $-\infty$.

   On a ainsi montré qu'il existait un (plus petite) entier p tel que $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$

4. Par définition de p, on a $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$
   Comme on a également $\mathrm{Im}\, f^{p+1} \subset \mathrm{Im}\, f^p$, on peut en déduire que $\mathrm{Im}\, f^{p+1} = \mathrm{Im}\, f^p$

5. On applique le théorème du rang aux endomorphismes f^p et f^{p+1}
   $$\dim E = rg(f^p) + \dim \ker f^p \qquad \dim E = rg(f^{p+}) + \dim \ker f^{p+1}$$
   En faisant la différence, et compte tenu de la question précédente, on a $\dim \ker f^p = \dim \ker f^{p+1}$.
   Comme d'autre part $\ker(f^p) \subset \ker(f^{p+1})$, on en conclut que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$

6. Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ " $\operatorname{Im}(f^{p+k}) = \operatorname{Im}(f^{p+k+1})$
   - **initialisation**
     $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après Q4
   - **hérédité**: On suppose $\mathcal{P}_k$ vrai pour un $k \geqslant 0$ fixé.
     On a donc $\operatorname{Im}(f^{p+k}) = \operatorname{Im}(f^{p+k+1})$.
     On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Im}(f^{p+k+2}) &\iff \exists y \in E, x = f^{p+k+2}(y) \\ &\iff \exists y \in E, x = f(\underbrace{f^{p+k+1}(y)}_{=z}) \\ &\iff \exists z \in \operatorname{Im}(f^{p+k+1}), x = f(z) \\ &\iff \exists t \in \operatorname{Im}(f^{p+k}), x = f(t) \qquad \textit{car } \operatorname{Im}(f^{p+k}) = \operatorname{Im}(f^{p+k+1}) \\ &\iff \exists u \in E, x = f^{p+k+1}(u) \qquad (t = f^{p+k}(u)) \\ &\iff x \in \operatorname{Im}(f^{p+k+1}) \end{aligned}$$

     Cette suite d'équivalence montre que $\operatorname{Im}(f^{p+k+2}) = \operatorname{Im}(f^{p+k+1})$
     On a bien montré que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vrai

7. *(il s'agit de reprendre un raisonnement similaire à Q5)*
   Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Comme $\operatorname{rg}(f^{p+k}) = \operatorname{rg}(f^{p+k+1})$ d'après la quetsion précédente, le théorème du rang appliqué à ces deux endomorphismes donne $\dim \ker(f^{p+k}) = \dim \ker(f^{p+k+1})$.
   Et comme d'après Q2 on a $\ker(f^{p+k}) \subset \ker(f^{p+k+1})$, on en déduit que $\ker(f^{p+k}) = \ker(f^{p+k+1})$

8. Nous allons montrer que $\ker(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont supplémentaires en montrant que
   i) $\ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0\}$
   ii) $\dim \ker(f^p) + \dim \operatorname{Im}(f^p) = \dim E$

   - Montrons que $\ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0\}$
     - $\boxed{\text{On a } \{0\} \subset \ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p)}$
       En effet, on sait que $\ker(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont des sev et donc contiennent le vecteur nul.
     - $\boxed{\text{On a } \ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) \subset \{0\}}$
       En effet,
       Soit $x \in \ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p)$.
       On sait donc $\exists y \in E, x = f^p(y)$ et $f^p(x) = 0$.
       On en déduit que $f^{2p}(y) = 0$, càd que $y \in \ker(f^{2p})$
       Or en Q7, on a montré que

$$\ker(f^p) = \ker(f^{p+1}) = \cdots = \ker(f^{p+p})$$

       et ainsi $y \in \ker(f^p)$.
       ce qui donne $x = 0$ (car $x = f^p(y)$)
   - Montrons que $\dim \ker(f^p) + \dim \operatorname{Im}(f^p) = \dim E$
     Il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme f^p

Un calcul de A^n

1.
   - Le calcul du polynôme caractéristique donne
   $$\chi_A(X) = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$$
   - A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car A ne possède même pas de valeur propre réelle, la pauvre.
   - Sur $\mathbb{C}$, on a $sp(A) = \{i, -i\}$ avec $m(i) = m(-i) = 2$
     - La recherche des sous-espaces propres donne
     $$E_i = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix}) \qquad \text{et} \qquad E_{-i} = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix})$$
     A noter que l'on sait que si la matrice est à coefficients réels, les sous-espaces propres complexes sont conjugués pour des valeurs propres complexes conjuguées
     - Comme $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 4$ et que $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on peut affirmer d'après la cns de diagonalisabilité que A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)
2. D'après ce même théorème on sait que $E_i \oplus E_{-i} = \mathbb{C}^4$ et que la concaténation des bases des sous-espaces propres donnent une base de $\mathbb{C}^4$.
   On a donc $A = P.D.P^{-1}$ avec
   $$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$
   On a donc pour $n \in \mathbb{N}$
   $$A^n = PD^nP^{-1} = P.\begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix}.P^{-1} = i^n.P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.P^{-1}$$
   Le calcul, par exemple avec la méthode du miroir donne
   $$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$
   En effectuant le calcul complet de $P.D^n.P^{-1}$ on trouve au final
   $$A^n = \frac{i^n}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 0 & 0 & i(1-(-1)^n) \\ 0 & 1+(-1)^n & -i(1-(-1)^n) & 0 \\ 0 & i(1-(-1)^n) & 1+(-1)^n & 0 \\ -i(1-(-1)^n) & 0 & 0 & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$$

En distinguant suivant la parité de n cela donne

- pour n impair:

$$A^n = (-1)^{(n-1)/2}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- pour n pair:

$$A^n = (-1)^{n/2}.I_4$$

Remarque: on pouvait aussi procéder de manière plus naïve en remarquant par le calcul que $A^2 = -I_4$ et conclure par une distinction modulo 4

- si $n \equiv 0[4]$ (càd $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$)

$$A^n = (A^2)^{2n} = (-I_4)^{2n} = I_4$$

- si $n \equiv 1[4]$ (càd $n = 4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$)

$$A^n = A^{4k}.A^1 = I_4.A = A$$

- si $n \equiv 2[4]$ (càd $n = 4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$)

$$A^n = A^{4k}.A^2 = I_4.(-I_4) = -I_4$$

- si $n \equiv 3[4]$ (càd $n = 4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$)

$$A^n = A^{4k+2}.A = -I_4.1 = -A$$

3. - On sait que A est un matrice inversible car 0 n'est pas valeur propre.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^{-n} &= (A^{-1})^n \\
&= ((PDP^{-1})^{-1})^n \\
&= (PD^{-1}P^{-1})^n \\
&= (P\begin{pmatrix} i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^{-1} \end{pmatrix}.P^{-1})^n \\
&= P\begin{pmatrix} i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^{-1} \end{pmatrix}^n.P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} (i^{-1})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i^{-1})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ((-i)^{-1})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ((-i)^{-1})^n \end{pmatrix}.P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} i^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^{-n} \end{pmatrix}.P^{-1}
\end{aligned}$$

   Ce qui prouve bien que l'on a la même formule lorsque l'exposant est négatif