1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$?

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale

1 et 3

2. Donner le réel m tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-m \\ -1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ssi $3 - m = 1$

$$m = 2$$

3. Déterminer le réel m pour que 4 soit valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & m \end{pmatrix}$

$$\chi_A(X) = X^2 - (7+m)X + 7m + 18$$

$$\chi_A(4) = 16 - 4(7+m) + 7m + 18 = 6 + 3m$$

$$m = -2$$

4. On considère l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)^2.P' \end{array}}$

OUI • Le polynôme constant 1 est-il vecteur propre de φ?

NON • Le polynôme $X - 1$ est-il vecteur propre de φ?

$$\varphi(1) = 0 = 0.1$$

$$\varphi(X-1) = (X-1)^2$$

5. **Vrai ou Faux?**

- Faux!

- Faux!

- Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables
- Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables

car les matrices n'ont pas la même trace

La matrice I_3 N'est semblable QU'à elle-même

5. **Vrai ou Faux?**

- Une matrice est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre $\boxed{\text{VRAI}}$
- Le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités $\boxed{\text{VRAI}}$

5. Vrai ou Faux?

FAUX

- Une matrice inversible est toujours diagonalisable

FAUX

- Une matrice diagonalisable est toujours inversible

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. On suppose que $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) Donner les valeurs propres de A

   (b) Donner une base de chacun des sous-espaces propres

1 v.p double

$$E_1(A) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} >$$

2 v.p simple

$$E_2(A) = < \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} >$$

7. On suppose que $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ et on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de P

(a) C_1 est-il vecteur propre? Quelle égalité vérifie AC_1 ?

(b) C_2 est-il vecteur propre? Quelle égalité vérifie AC_2 ?

(c) C_3 est-il vecteur propre? Quelle égalité vérifie AC_3 ?

$\boxed{AC_1 = 1.C_1}$ $\boxed{AC_2 = C_1 + C_2}$ $\boxed{AC_3 = 2.C_3}$

8. Déterminer une base de $E_1(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y & = 0 \\ -2x + y + z & = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y & = x \\ z & = x \end{cases}$$

$$E_1(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

A possède une unique valeur propre : 1

Ainsi, SI A était diagonalisable

ALORS A serait semblable à la matrice I_2

Or seule la matrice I_2 est semblable à elle-même!

10. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$
On suppose que $\chi_f(X) = X^2.(X-4)$ et que l'un des sep est $\text{vect}(X+2, X^2)$

(a) Donner la valeur de n

(b) Donner la trace de f

(c) Peut-on savoir si f est diagonalisable? Justifier

$n = 2$ car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

$\text{tr}(f) = 0 + 0 + 4 = 4$

4 valeur propre simple donc $\dim E_4(f) = 1$

D'où $E_0(f) = \text{vect}(X+2, X^2)$ et $\dim E_0(f) = 2$

f diagonalisable car $\dim E_0 + \dim E_4 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$

12. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $m \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\chi_f = (X-1)(X+1)(X-m)$

$\boxed{\text{OUI}}$ • f est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{OUI}}$ • A-t-on l'implication $m \neq \pm 1 \Longrightarrow f$ diagonalisable?

$\boxed{\text{NON}}$ • A-t-on l'implication f diagonalisable $\Longrightarrow m \neq \pm 1$?

$\boxed{\text{NON}}$ • A-t-on l'implication $m = 1 \Longrightarrow f$ symétrie vectorielle?

$\boxed{\text{OUI}}$ • A-t-on l'implication f symétrie vectorielle $\Longrightarrow m = \pm 1$?

entre 5000 et 7500