PT* 2024-25
DS 2 du 4 novembre 2024
durée 4h
(sortie autorisée à partir de 16h30)

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**

- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**

- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite.
  (Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)

- Ce devoir est composé de deux exercices et un problème, totalement indépendants.

$\boxed{\textbf{EXERCICE 1}}$

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b & c+b \\ c+b & a & b \\ b & c+b & a \end{pmatrix} \end{array}$

On note $E = \{f(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$

1. Justifier que f est un application linéaire et déterminer son noyau.
2. L'application f est-elle bijective? Justifier.
3. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de dimension 3
4. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer J^2 puis J^3. La matrice J est-elle inversible?
   (b) Donner J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (c) Montrer que (I_3, J, J^2) est une base de E
   (d) En déduire que E est stable par le produit matriciel. *(càd montrer que le produit de 2 matrices de E est encore une matrice qui appartient à E)*

$\boxed{\textbf{EXERCICE 2}}$

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Dans cette question, on s'intéresse à la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + xy = 1$
   1.1 Montrer que Γ est une courbe régulière
   2.2 Montrer que l'axe (Ox) n'est pas un axe de symétrie de Γ
   3.3 Montrer que Γ est symétrique par rapport au point O
   4.4 Déterminer les points en lesquels les tangentes à Γ sont soient horizontales, soient verticales
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Dans cette question, on s'intéresse à la courbe Γ_λ d'équation cartésienne $\lambda.x^2 + 4.y^2 + 2\lambda.x - 3\lambda = 0$
   2.1 2.1.1 Combien de courbes Γ_λ passent par le point $(1,0)$? Par le point $(1,1)$?
   2.2.2 D'une manière générale, indiquer le nombre de courbes qui passent par un point $M_0(x_0,y_0)$ fixé
   2.2 Déterminer en fonction de λ la nature de Γ_λ.
   On précisera notamment
   - *les 4 sommets lorsque la conique est une ellipse*
   - *les 2 asymptotes lorsque la conique est une hyperbole*

   2.3 Sur un même dessin, tracer Γ_{-4}, Γ_4 et Γ_1
   On choisira judicieusement l'échelle pour avoir un joli dessin

PROBLEME

Les parties I, II et III de ce problème sont très largement indépendantes.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE I: étude de la courbe et de sa développée

Dans cette partie, on considère $\mathcal{C}$ la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) & = \cos^3(t) = (\cos t)^3 \\ y(t) & = \sin^3(t) = (\sin t)^3 \end{cases} \quad \text{avec } t \in [-\pi,\pi].$$

On note $M(t)$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ associé au paramètre t.

1. **Etude du point** $M(0)$
   Le point $M(0)$ est-il un point singulier? Déterminer précisément sa nature.
2. **Dessin de la courbe** $\mathcal{C}$
   - 2.1 Montrer que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. Quelle symétrie doit-on ensuite effectuer pour obtenir toute la courbe?
   - 2.2 Montrer que l'on peut réduire de nouveau l'étude à $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis à $[0,\frac{\pi}{4}]$. On précisera à chaque fois la symétrie associée.
     On note $\mathcal{C}_0$ la restriction de $\mathcal{C}$ obtenue pour $t \in [0,\frac{\pi}{4}]$
   - 2.3 Faire le tableau de variation conjoint de $(x(t),y(t))$ pour $t \in [0,\pi/4]$.
     En déduire la représentation graphique de $\mathcal{C}_0$, puis celle de $\mathcal{C}$
3. **Etude de la développée**
   - 3.1 On se place dans cette question sur l'intervalle $I =]0,\frac{\pi}{2}[$.
     - 3.1.1 Déterminer le repère de Frenet au point $M(t)$
     - 3.2.2 Déterminer le paramètre angulaire ainsi que la courbure
     - 3.3.3 En déduire les coordonnées du centre de courbure
       (on ne cherchera pas à donner une expression simplifiée)
   - 3.2 Reprendre les questions précédentes avec $I =]-\frac{\pi}{2},0[$

PARTIE II: des propriétés intéressantes

1. Montrer que pour tout $t \in]0,\pi/2[$ la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$ a pour équation cartésienne $x.\sin t + y.\cos t = \sin t.\cos t$
   On note $T_{M(t)}$ cette droite.
2. Pour $t \in]0,\pi/2[$, déterminer les coordonnées de A_t, point d'intersection de $T_{M(t)}$ avec l'axe des abscisses et de B_t, point d'intersection de $T_{M(t)}$ avec l'axe des ordonnées.
   Calculer la longueur du segment $[A_tB_t]$
3. Pour $t \in]0,\pi/2[$, on définit le point C_t par $\overrightarrow{OC_t} = \overrightarrow{OA_t} + \overrightarrow{OB_t}$
   - 3.1 Indiquer la nature du quadrilatère $OA_tC_tB_t$
   - 3.2 Déterminer le projeté orthogonal du point C_t sur la droite (A_tB_t).
     Que remarque-t-on?

4. Dans cette question, on étudie un lieu particulier.
   t désigne encore un réel dans l'intervalle $]0,\pi/2[$
   4.1 Déterminer l'équation cartésienne de la droite Δ_t qui passe par O et qui est perpendiculaire à (A_tB_t).
   4.2 Déterminer les coordonnées de $P(t)$, le point d'intersection de Δ_t et de la droite (A_tB_t).

   4.3 On note I_t le milieu du segment $[A_tB_t]$
   Donner les coordonnées de I_t puis vérifier que c'est aussi le milieu du segment $[M(t)P(t)]$.
   Reconnaître le lieu du point I_t lorsque t varie dans $]0,\pi/2[$
5. On note $H_{t_0} = (\dfrac{\cos t_0}{2}, \dfrac{\sin t_0}{2})$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
   5.1 Montrer qu'en général il passe par H_{t_0} quatre tangentes à $\mathcal{C}$
   (On admettra que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$ est toujours donnée par l'équation $x.\sin t + y.\cos t = \sin t.\cos t$)
   5.2 Montrer que trois de ces tangentes font entre elles deux à deux des angles égaux

PARTIE III: des transformation géométriques

Dans cette partie, on considère

- l'arc Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) & = 3\cos(t) + \cos(3t) \\ y(t) & = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- l'arc Γ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) & = 6\cos(t) - 2\cos(3t) \\ y(t) & = 6\sin(t) + 2\sin(3t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On note

- $N(t)$[resp. $Q(t)$] le point de Γ[resp. Γ_1] de paramètre t.
- $z_N(t) = Aff(N(t))$ et $z_Q(t) = Aff(Q(t))$

1. Donner une expression très simple de $z_N(t)$ en fonction d'exponentielles
2. Donner une expression très simple de $z_Q(t)$ en fonction d'exponentielles
3. On conidère f la composée de la rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{4}$ et de l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $f(Q(t + \pi/4)) = N(t)$ pour tout t réel.
4. En déduire une transformation géométrique qui permet de passer de Γ_1 à Γ.

5. Après avoir linéariser $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$, expliquer le lien entre la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe Γ

$\boxed{\text{EXERCICE 1}}$

1. • Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $v = (a',b',c') \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' + \lambda b + b' \\ \lambda c + c' + \lambda b + b' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' + \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a & b & c+b \\ c+b & a & b \\ b & c+b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c'+b' \\ c'+b' & a' & b' \\ b' & c'+b' & a' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est une application linéaire

• On a

$$f(a,b,c) = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b & c+b \\ c+b & a & b \\ b & c+b & a \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c+b & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}$$

Conclusion $\boxed{\ker(f) = \{0\}}$

2. Comme $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = 9$, l'application f N'est PAS bijective

3. • Le plus simple pour justifier est un sev est de reconnaitre que $E = \mathrm{Im}(f)$ et de rappeler que par théorème l'ensemble image d'une application linéaire est toujours un sev!

• On peut ensuite appliquer le théorème du rang à f

$$\dim \mathbb{C}^3 = \mathrm{rg}(f) + \dim \ker(f) = \mathrm{rg}(f) + 0$$

et ainsi $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$. Càd $\boxed{\dim E = 3}$

• Une solution plus calculatoire est la suivante

$$\begin{aligned} E &= \{ \begin{pmatrix} a & b & c+b \\ c+b & a & b \\ b & c+b & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \} \\ &= \{ a. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \} \} \\ &= \mathrm{vect}(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=K}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=L}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont une famille génératrice est $\mathcal{F} = (I_3, K, L)$.

On vérifie que cette famille est libre.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a.I_3 + b.K + c.L = 0$

Cela donne $\begin{pmatrix} a & b & c+b \\ c+b & a & b \\ b & c+b & a \end{pmatrix} = 0$ et donc $\begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c+b & = 0 \end{cases}$ ce qui donne $a = b = c = 0$

Conclusion: $\boxed{(I_3, K, L) \text{ est une base de } E, \text{ et donc } \dim E = 3}$

4. (a) Le calcul donne $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I_3$.

Comme $J.J^2 = J^2.J = I_3$, on en déduit que $\boxed{J \text{ est inversible et que } J^{-1} = J^2}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On fait une discussion suivant la congruence de n modulo 3

- si $n \equiv 0[3]$.
  Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3p$.

$$J^n = (J^3)^p = I_3^p = I_3$$

- si $n \equiv 1[3]$.
  Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3p + 1$.

$$J^n = (J^3)^p.J = I_3^p.J = J$$

- si $n \equiv 2[3]$.
  Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3p + 2$.

$$J^n = (J^3)^p.J^2 = I_3^p.J^2 = J^2$$

(c) Notons $\mathcal{F} = (I_3, J, J^2)$

- $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.
  En effet:

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, f(a,b,c) = a.I_3 + b.J + (b + c).J^2$$

- $card(\mathcal{F}) = 3 = \dim E$

Donc par théorème $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } E}$

(d) Soit M_1 et M_2 deux matrices de E.
Comme (I_3, J, J^2) est une base de E, on sait que l'on peut écrire

$$M_1 = \alpha_1.I_3 + \beta_1.J + \gamma_1.J^2 \qquad M_2 = \alpha_2.I_3 + \beta_2.J + \gamma_2.J^2$$

On a ainsi

$$M_1.M_2 = \alpha_1\alpha_2.I_3 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).J + (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_1).J^2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1).J^3 + \gamma_1\gamma_2.J^4$$

or $J^3 = I_3$ et $J^4 = J$ donc

$$M_1.M_2 = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1).I_3 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2).J + (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_1).J^2$$

ce qui prouve que $M_1.M_2 \in \operatorname{vect} \mathcal{F} = E$. cqfd

$\boxed{\text{PROBLEME}}$

PARTIE I

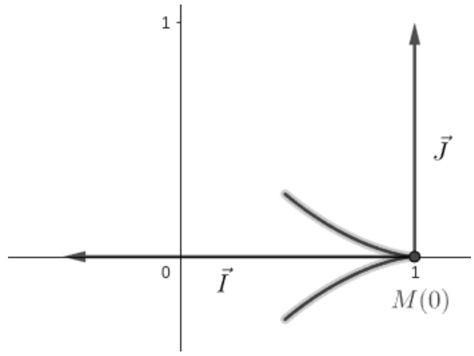
1. • x et y sont de classes C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{M'(t)} = \begin{pmatrix} -3\sin(t)\cos^2(t) \\ 3\cos(t)\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{M'(0)} = \vec{0}$, $\boxed{\text{le point } M(0) \text{ est un point singulier}}$

• Pour déterminer la nature du point on va effectuer un DL

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3)$$
$$y(t) = \left(t + o(t^3)\right)^3 = t^3 + o(t^3)$$
$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3) \\ t^3 + o(t^3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=M(0)} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{I}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{J}} + o(t^3)$$



$\boxed{\text{Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce}}$

2. 2.1 La fonction x est paire et la fonction y est impaire; les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe (Ox) et l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$

2.2 • $\forall t \in [0,\pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) &= (-\cos t)^3 = -x(t) \\ y(\pi - t) &= (\sin t)^3 = y(t) \end{cases}$

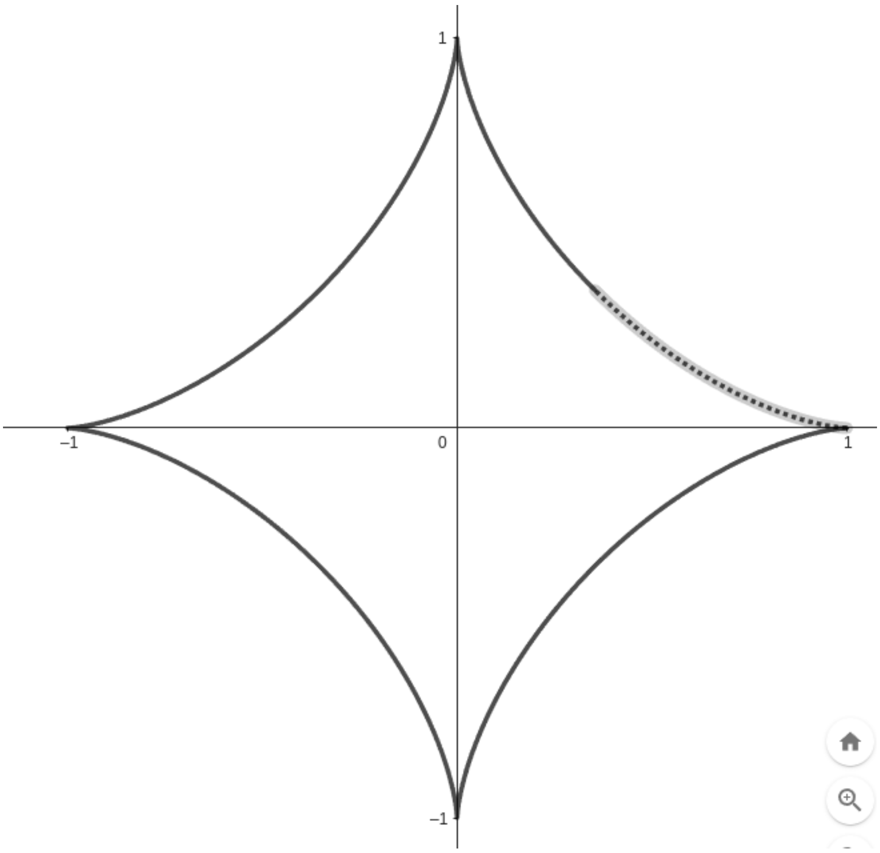
Ainsi **les points $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).**
On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi/2]$

• $\forall t \in [0,\pi/2]$, $\begin{cases} x(\pi/2 - t) &= (\sin t)^3 = y(t) \\ y(\pi/2 - t) &= (\cos t)^3 = x(t) \end{cases}$

Ainsi **les points $M(\pi/2 - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.(la première bissectrice)**
On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi/4]$

2.3

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$-$	



3. 3.1 On se place sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

3.1.1
- On a vu que $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 3\sin(t).\cos(t).\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

  ainsi
  $$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\right\| = 3.|\sin t|.|\cos t|.\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3.\sin t.\cos t$$
  car sur I on a $\cos t \geqslant 0$ et $\sin t \geqslant 0$
- $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$

3.2.2 • il est clair que $\alpha = \pi - t$

• $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}.\dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}} = \dfrac{-1}{3\sin t\cos t}$

3.3.3 $C = M + \dfrac{1}{\gamma}\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}\cos^3 t + 3\cos^2 t\sin t\\ \sin^3 t + 3\sin^2 t\cos t\end{pmatrix}$

3.2 On se place sur $I =]-\dfrac{\pi}{2},0[$, et on reprend les points précédents

• Comme sur I on a $\cos t \geqslant 0$ et $\sin t \leqslant 0$, on a

$$\frac{ds}{dt} = -3.\sin t.\cos t$$

• $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

• $\alpha = -t$ et $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}.\dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{3\sin t\cos t}$

• $C = M + \dfrac{1}{\gamma}\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}\cos^3 t + 3\cos^2 t\sin t\\ \sin^3 t + 3\sin^2 t\cos t\end{pmatrix}$

PARTIE II

1. • Pour $t \in]0,\pi/2[$, on a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 3\sin(t).\cos(t).\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \neq \vec{0}$.
et ainsi $M(t)$ est un point régulier

• $T_{M(t)}$ est la droite qui passe par le point $M(t)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$,
elle a donc pour équation cartésienne $\begin{vmatrix}x-\cos^3 t & -\cos t\\ y-\sin^3 t & \sin t\end{vmatrix} = 0$,
càd $\sin t.x + \cos t.y - \cos t.\sin(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0$
Conclusion : $\boxed{T_{M(t)} \text{ a pour bien pour équation } \sin t.x + \cos t.y = \sin t.\cos t}$

2. Soit $t \in]0,\pi/2[$

• L'intersection de $T_{M(t)}$ avec l'axe $(0x)$ est caractérisée par le système

$$\begin{cases}\sin t.x + \cos t.y = \sin t.\cos t\\ y = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x &= \cos t\\ y &= 0\end{cases}$$

• L'intersection de $T_{M(t)}$ avec l'axe $(0y)$ est caractérisée par le système

$$\begin{cases}\sin t.x + \cos t.y = \sin t.\cos t\\ x = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x &= 0\\ y &= \sin t\end{cases}$$

• Conclusion: $\boxed{A_t(\cos t,0) \text{ et } B_t(0,\sin t)}$

• Pour tout t, $\boxed{A_tB_t = ||\overrightarrow{A_tB_t}|| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1}$

3. 3.1 On a $C_t(\cos t, \sin t)$. Le quadrilatère est un rectangle.

   3.2 Notons K_t le projeté orthogonal de C_t sur (A_tB_t).
   En utilisant par exemple la formule du projeté orthogonal

$$\begin{aligned}
K_t &= A_t + \frac{<\overrightarrow{A_tC_t}, \overrightarrow{A_tB_t}>}{||\overrightarrow{A_tB_t}||^2} . \overrightarrow{A_tB_t} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{<\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}>}{1} . \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + \sin^2 t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-\sin^2 t). \cos t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \\
&= M(t)
\end{aligned}$$

   On remarque que c'est le point $M(t)$

4. 4.1 Δ_t est la droite qui passe par le point $O(0,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{A_tB_t} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,
   son équation cartésienne est $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 0$
   càd $\boxed{x. \cos t - y. \sin t = 0}$

   4.2 les coordonnées de $P(t)$ sont caractérisées par le système $\begin{cases} x. \cos t - y. \sin t &= 0 \\ x. \sin t + y. \cos t &= \sin t. \cos t \end{cases}$

   On trouve $\boxed{P(t) = (\sin^2 t. \cos t, \cos^2 t. \sin t}$

   4.3
   - $I_t = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{2} \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix}$
   - Notons $I'_t = Mil[M(t)P(t)]$

$$I'_t = \begin{pmatrix} \frac{x_M + x_P}{2} \\ \frac{y_M + y_P}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^3 t + \sin^2 t. \cos t}{2} \\ \frac{\sin^3 t + \cos^2 t. \sin t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t). \cos t}{2} \\ \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t). \sin t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{2} \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix} = I_t$$

   - $\boxed{\text{Lorsque } t \text{ varie dans }]0, \frac{\pi}{2}[, I_t \text{ décrit un quart de cercle(ouvert) de centre } O \text{ et de rayon } \frac{1}{2}}$

5. 5.1 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
Le nombre de tangentes qui passent par H_{t_0} correspond au nombre de droites $T_{M(t)}$ qui passent par H_{t_0}, càd le nombre de réels t tels que

$$\begin{aligned} &\frac{\cos t_0}{2}.\sin t + \frac{\sin t_0}{2}.\cos t = \sin t.\cos t \\ \iff &\cos t_0.\sin t + \sin t_0.\cos t = 2\sin t.\cos t \\ \iff &\sin(t+t_0) = \sin(2t) \end{aligned}$$

On résout cette équation

$$\begin{aligned} \sin(t+t_0) = \sin(2t) &\iff \begin{cases} 2t & \equiv t + t_0\,[2\pi] \\ ou & \\ 2t & \equiv \pi - (t+t_0)\,[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t & \equiv t_0\,[2\pi] \\ ou & \\ 3t & \equiv \pi - t_0\,[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t & \equiv t_0\,[2\pi] \\ ou & \\ t & \equiv \dfrac{\pi - t_0}{3}\,[\dfrac{2\pi}{3}] \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve bien qu'en général il y a 4 solutions

$$t_0 \quad , \quad \underbrace{\frac{\pi - t_0}{3}}_{=t_1} \quad , \quad \underbrace{\frac{\pi - t_0}{3} + \frac{2\pi}{3}}_{=t_2} \quad , \quad \underbrace{\frac{\pi - t_0}{3} + \frac{4\pi}{3}}_{=t_3}$$

Le "en général" provient du fait qu'il est possible que t_0 soit égal à t_1 ou t_2 ou t_3 dans certains rares cas

5.2 On rappelle que la droite tangente $T_{M(t)}$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, c'est à dire qu'elle fait un angle de $\pi - t$ avec l'axe horizontal.
On a donc les droite $T_{M(t_1)}, T_{M(t_2)}$ et $T_{M(t_3)}$ qui font chacune entre elles un angle de $\frac{2\pi}{3}$ car à chaque fois on ajoute $\frac{2\pi}{3}$ à l'angle avec l'horizontale

PARTIE III

1. $z_N(t) = 3.(\cos(t) + .\sin(t)) + \cos(3t) - i.\sin(3t) = 3.e^{it} + e^{-3it}$
2. $z_Q(t) = 6.(\cos t + i.\sin t) - 2.(\cos(3t) - i\sin(3t)) = 6.e^{it} - 2e^{-3it}$
3.
   - f est associé à la transformation complexe $z \mapsto \dfrac{1}{2}.e^{-i\pi/4}.z$
   - Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Aff(f(Q(t+\pi/4))) &= \frac{1}{2}.e^{-i\pi/4}.z_Q(t+\pi/4) \\ &= \frac{1}{2}.e^{-i\pi/4}.\left(6.e^{i(t+\pi/4)} - 2e^{-3i(t+\pi/4)}\right) \\ &= 3.e^{it} - e^{-3it}.e^{-3i\pi/4}.e^{-i\pi/4} \\ &= 3.e^{it} - e^{-3it}.e^{-i\pi} \\ &= 3.e^{it} - e^{-3it}.(-1) \\ &= Aff(N(t)) \end{aligned}$$

   ce qui prouve bien la propriété demandée
4.
   - On commence par remarquer que

$$\Gamma_1 = \{Q(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{Q(t+\pi/4) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

   - et ainsi

$$f(\Gamma_1) = \{f(Q(t+\pi/4)) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{N(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \Gamma$$

   Conclusion: $\boxed{\Gamma \text{ est l'image de } \Gamma_1 \text{ par l'application } f}$
5.
   - Les calcules classiques donnent

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$$

$$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{3}\sin(3t)$$

   - On remarque que pour tout t $\begin{cases} x_N(t) &= 4.x_M(t) \\ y_N(t) &= 4.y_M(t) \end{cases}$

   On en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ est l'image de } \mathcal{C} \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } 4}$

1. (a) Notons $F : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - 1$
On a $\nabla F = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix}$.
Ainsi

$$\nabla F = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

Comme le point $O(0,0)$ n'appartient pas à Γ, on en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ est bien une courbe régulière}}$

(b) Le point $A(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) \in \Gamma$ mais $A'(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}) \notin \Gamma$ donc $\boxed{(Ox) \text{ n'est pas axe de symétrie}}$

(c) Il s'agit de montrer que si $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$ alors $M_0'(-x_0,-y_0) \in \Gamma$.
Soit $M_0(x_0,y_0)$.
On a donc

$$x_0^2 + y_0^2 + x_0 y_0 = 1$$

càd

$$(-x_0)^2 + (-y_0)^2 + (-x_0)(-y_0) = 1$$

ce qui signifie que $M_0'(-x_0,-y_0) \in \Gamma$

(d)
- Comme la courbe est régulière, les points de Γ à tangente horizontale sont les points en lesquels le gradient est colinéaire à $\vec{j}$, càd qui a sa première composante nulle

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy &= 1 \\ 2x + y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (-2x)^2 + x(-2x) &= 1 \\ y = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 &= \frac{1}{3} \\ y &= -2x \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les points de } \Gamma \text{ en lesquels la tangente est horizontale sont } (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}}) \text{ et } (\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})}$$

- Comme la courbe est régulière, les points de Γ à tangente verticale sont les points en lesquels le gradient est colinéaire à $\vec{i}$, càd qui a sa seconde composante nulle

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy &= 1 \\ 2y + x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-2y)^2 + y^2 + (-2y).y &= 1 \\ x = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= -2y \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les points de } \Gamma \text{ en lesquels la tangente est verticale sont } (\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ et } (\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})}$$

2. 2.1 2.1.1
- Toutes les courbes Γ_λ passent par $(1,0)$
car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.1^2 + 4.0^2 + 2\lambda.1 - 3\lambda = 0$
- Aucune courbe Γ_λ ne passe par $(1,1)$
car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.1^2 + 4.1^2 + 2\lambda.1 - 3\lambda = 4 \neq 0$

2.2.2 Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point du plan.
Le nombre de courbes Γ_λ qui passent par M_0 est le nombre de réels λ qui vérifient l'équation

$$\lambda x_0^2 + 4y_0^2 + 2\lambda x_0 - 3\lambda = 0 \iff \lambda\left((x_0+1)^2 - 4\right) = -4y_0^2$$

une distinction de cas s'impose:

i) si $(x_0+1)^2 \neq 4$.
Il existe une seule solution à l'équation

ii) si $(x_0+1)^2 = 4$ et $y_0 \neq 0$
Il n'y a pas de solution

iii) si $(x_0+1)^2 = 4$ et $y_0 = 0$
Il y a une infinité de solutions

$\boxed{\text{Conclusion:}}$

i) si $x_0 \neq -3$ et $x_0 \neq 1$: une seule courbe
ii) si ($x_0 = -3$ ou $x_0 = 1$) et $y_0 \neq 0$: aucune courbe
iii) si ($x_0 = -3$ ou $x_0 = 1$) et $y_0 = 0$: toutes les courbes

2.2 C'est une question classique de réduction de conique.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'équation devient par mise sous forme canonique

$$\lambda(x+1)^2 + 4y^2 = 4\lambda$$

On envisage donc 2 cas

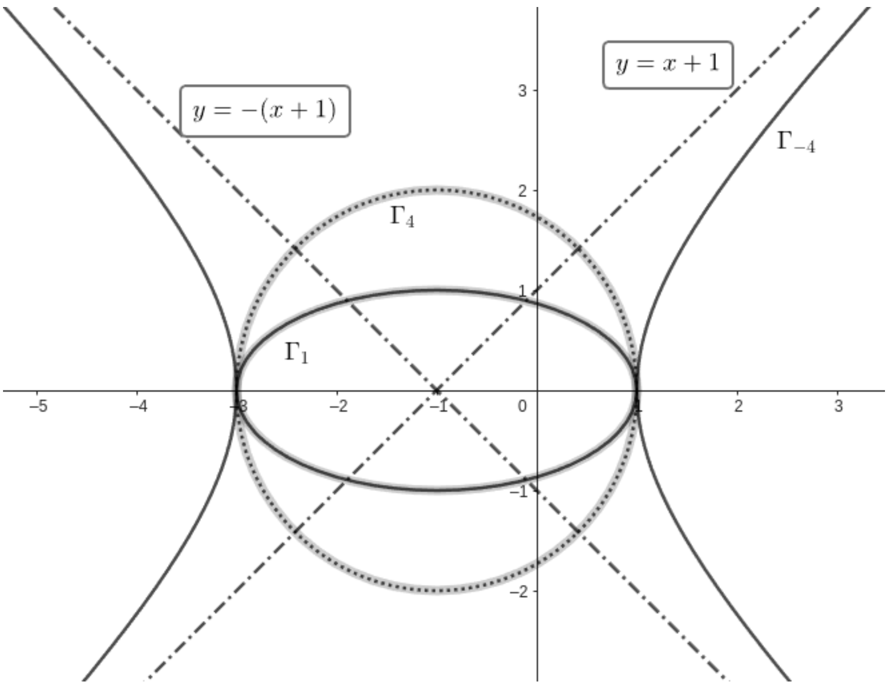
i) $\boxed{\textbf{si } \lambda = 0}$
L'équation devient $y = 0$, c'est $\boxed{\text{l'axe des abscisses}}$

ii) $\boxed{\textbf{si } \lambda \neq 0}$
L'équation s'écrit

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$$

On distingue alors de nouveau 3 cas:

- si $\lambda = 4$: c'est $\boxed{\text{le cercle de centre } (-1{,}0) \text{ et de rayon } 2}$
- si $\lambda > 0$ (et $\neq 4$): c'est $\boxed{\text{une ellipse.}}$
  Les sommets sont $(1{,}0)$,$(-3{,}0)$,$(-1,\sqrt{\lambda})$,$(-1,-\sqrt{\lambda})$
- si $\lambda < 0$: c'est $\boxed{\text{une hyperbole.}}$
  Les asymptotes ont pour équations $y = \pm\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{2}(x+1)$



2.3