PT* 24/25 - DM 7
à rendre le vendredi 22 novembre

Un air de déjà vu

Soit E un $\mathbb{K}$-ev tel que $f^3 + f = 0$.
En procédant par Analyse-Synthèse montrer que $\ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_E) = E$

Dans un espace de polynômes

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geqslant 1$ fixé.
On considère l'application f :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k.X^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.X^k \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que f est une symétrie vectorielle. Qu'en déduit-on sur $\ker(f - id_E)$ et $\ker(f + id_E)$?
3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E.
4. Donner la trace de f, et en déduire la dimension des deux sev ci-dessus

Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour A et B, 2 matrices fixées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définie l'application f par $f(M) = AM - MB$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Donner la matrice de f dans la base canonique
3. A quelle CNS, f est elle nulle?
4. Montrer que f n'est jamais de rang 1

Matrices à diagonale strictement dominante

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante lorsque

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+i \\ 1+i & 9/2 & 3 \\ 1+2i & e & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles à diagonale strictement dominante?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante. Montrer que $\det(A) \neq 0$. Qu'en déduit-on?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante, et soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AZ = 0$

   (a) On pose $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|$. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}|.|z_i| \leqslant M. \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

   (b) En considérant l'indice i_0 pour lequel $M = |z_{i_0}|$ et en tenant un raisonnement par l'absurde en déduire que $Z = 0$. Que peut-on en conclure sur A?

Un air de déjà vu

1. **Partie Analyse:**
   Soit $x \in E$
   On suppose qu'il existe $(x_1,x_2) \in \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_E)$ tel que $x = x_1 + x_2$.
   Comme $x_1 \in \ker(f)$ on a
   $$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$$
   Comme $x_2 \in \ker(f^2 + id_E)$, on a $f^2(x_2) + x_2 = 0$ et donc
   $$f^2(x) = f^2(x_2) = -x_2$$
   Ainsi, à l'issue de la partie Analyse, on a montré que
   SI la décomposition existe ALORS $\begin{cases} x_2 & = -f^2(x) \\ x_1 & = x + f^2(x) \end{cases}$
2. **Partie Synthèse:**
   Soit $x \in E$
   On note $x_1 = x + f^2(x)$ et $x_2 = -f^2(x)$
   i) On a $f(x_1) = f(x) + f^3(x) = (f + f^3)(x) = 0$ car $f + f^3 = 0$
   ce qui prouve que $x_1 \in \ker f$
   ii) Comme $f^3 = -f$ on a $f^4 = -f^2$ et donc
   $$f^2(x_2) = -f^4(x) = f^2(x) = -x^2$$
   Ainsi $f^2(x_2) + x_2 = 0$, ce qui prouve que $x_2 \in \ker(f^2 + id_E)$
   iii) $x_1 + x_2 = x + f^2(x) - f^2(x) = x$
3. **Conclusion:**
   On a montré que
   $$\forall x \in E, \exists\,!\, (x_1,x_2) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + id_E), x = x_1 + x_2$$
   càd que
   $$E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_E)$$

Dans un espace de polynômes

1. • Montrons que f est une application linéaire.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}, P = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k.x^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Notons $T = \lambda P + Q = \sum_{k=0}^{n} (\lambda.a_k + b_k).x^k$
   $$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda.a_{n-k} + b_{n-k}).X^k \\ &= \lambda. \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.X^k + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}.X^k \\ &= \lambda.f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

- Montrons que $im(f) \subset \mathbb{R}_n[X]$
  Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.x^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
  On a directement $f(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n_k}.x^k \in \mathbb{R}_n[X]$!

$\boxed{\text{Conclusion } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

2. - Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.x^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$f(f(P)) = f(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.x^k) = P = \sum_{k=0}^{n} a_{n-(n-k)}k.x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k = P$$

   f est une application linéaire vérifiant $f \circ f = id_E$.
   $\boxed{\text{Conclusion } f \text{ est une symétrie vectorielle}}$
   - On sait alors que $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$
3. On a $\forall i \in [\![0,n]\!], f(X^i) = X^{n-i}$
   Notons $\mathcal{B} = (1,X,X^2, \ldots ,X^n)$.

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

4. - Pour donner la trace de f il faut distinguer deux cas
     i) si n est impair
        Il y alors un nombre pair de colonnes et aucun $'1'$ sur la diagonale.
        Donc dans ce cas $\text{tr}(f) = 0$
     ii) si n est pair
        Il y alors un nombre impair de colonnes et un $'1'$ est sur la diagonale.
        Donc dans ce cas $\text{tr}(f) = 1$
   - Notons $p = \dim\ker(f - id_E)$ et $q = \dim\ker(f + id_E)$.
     Et appliquons maintenant le cours!
     – On sait qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice est diagonale, plus précisément $diag(\underbrace{1, \ldots ,1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots , -1}_{q})$.
       On a donc $\text{tr}\, f = p - q$
     – Comme $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = \mathbb{R}_n[X]$ on a $p + q = \dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$
     – En faisant la demi-somme et la demi-différence des deux égalités précédentes, on obtient

$$p = \frac{n + 1 + \text{tr}(f)}{2} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{n + 1 - (f)}{2}$$

Conclusion:

i) si n est pair : $p = \dfrac{n+2}{2}$ et $q = \dfrac{n}{2}$

ii) si n est impair: $p = \dfrac{n+1}{2}$ et $q = \dfrac{n-1}{2}$

Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On a $f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)B = \lambda AM + AN - \lambda MB - NB = \lambda f(M) + f(N)$ et $f(M)$ est une matrice de taille 2×2. Donc $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$
- Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On a
  $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a-a' & -b' \\ c & 0 \end{pmatrix}, f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c' & a-d' \\ 0 & c \end{pmatrix}, f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a' & -b' \end{pmatrix}, f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c' & d-d' \end{pmatrix}$
  Donc la matrice de f est dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est
  $$\begin{pmatrix} a-a' & -c' & b & 0 \\ -b' & a-d' & 0 & b \\ c & 0 & d-a' & -c' \\ 0 & c & -b' & d-d' \end{pmatrix}$$
- f est nulle ssi $a = a' = d' = d, b' = 0 = c' = c = b$ càd ssi $A = B = aI$
- <u>On va montrer que f n'est jamais de rang un.</u>
  Supposons la matrice précédente de rang un.
  On a alors $c = 0$ (sinon les 2 premières colonnes seraient libres) et $b = 0$ (sinon les 2 dernières seraint libres).
  Les colonnes 1 et 3 sont liées donc l'une au moins est nulle et donc $b' = 0$.
  De même pour les colonnes 2 et 4 donc $c' = 0$.
  A ce point on a $M = \begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-a' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-d' \end{pmatrix}$
  La matrice est de rang 1 ssi les coefficients sont tous nuls sauf un. Or la nullité de trois des coefficients entraine forcément la nullité du quatrième (envisager rapidement les cas) et donc $M = 0$ contradiction.

Matrices à diagonale dominante

1. (a) A n'est pas à diagonale strictement dominante, à cause de la troisième ligne.
   En effet, on a $2 = |2| \leqslant |2| + |-1| = 2 + 1 = 3$
   (b) B est à diagonale strictement dominante car $\begin{cases} 3 & > 1 + \sqrt{2} \simeq 2.4 \\ 4.5 & > \sqrt{2} + 3 \simeq 4.4 \\ 5 & > \sqrt{5} + e \simeq 4.95 \end{cases}$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Comme A est une matrice à diagonale strictement dominante on a $\begin{cases} |a| & > |b| \\ |d| & > |c| \end{cases}$
   On en déduit que $|a|.|d| > |b|.|c|$ càd que $|ad| > |bc|$.
   On a $\det(A) = ad - bc$.
   Supposons que $\det(A) = 0$.
   On a donc $ad = bc$ et donc $|ad| = |bc|$ contradiction
   Conclusion: $\det(A) \neq 0$ et A est donc une matrice inversible!

3. (a) Notons $T = AZ = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

On a d'après la formule du produit matriciel $t_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}.t_j$.

Comme $AZ = 0$, on a donc $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}.t_j = 0$

En séparant le terme d'indice i on obtient

$$-a_{ii}.z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}.z_j$$

en prenant les valeurs absolues, puis en utilisant l'inégalité

$$|a_{ii}|.|z_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}.z_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.|z_j|$$

or pour tout j, on a $|z_j| \leqslant M$.

d'où

$$|a_{ii}|.|z_i| \leqslant M.\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

(b) Considérons dans l'inégalité précédente, l'indice i_0 tel que $M = |z_{i_0}|$, ce qui donne $M.|a_{i_0 i_0}| \leqslant M.\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i_0 j}|$

Supposons $M \neq 0$.

En divisant par $M > 0$ on a donc $|a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i_0 j}|$

ce qui est en contradiction avec le fait que A est à diagonale strictement dominante!

Ainsi $M = 0$, ce qui signifie que $Z = 0$.

On a montré que $\ker(A) = \{0\}$, ce qui permet d'en déduire que A est inversible!