PT* 24/25 - DM 6
à rendre le vendredi 15 novembre

Un exercice bien complet

On note $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-4y-3z\,,2x-3y-2z\,,y) \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

2. (a) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On donnera une base de chacun de ces 2 espaces.
   (b) L'endomorphisme f est-il bijectif? Justifier.

3. (a) Déterminer $\ker(f^2+id)$ et en donner une base.
   (b) Justifier que $\ker(f) \oplus \ker(f^2+id) = \mathbb{R}^3$

4. Justifier que $f^3+f=0$

5. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. (a) La famille (id,f,f^2,f^3) est-elle une famille liée de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?
   (b) Justifier que la famille (id,f,f^2) est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$\boxed{\textbf{PARTIE 1}}$

1. Soient $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ et $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$et λ un réel
   On a $\lambda.\vec{a}+\vec{b}=\lambda.(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2)$
   D'où

$$\begin{aligned}
f(\lambda\vec{a}+\vec{b}) &= (3(\lambda x_1+x_2)-4(\lambda y_1+y_2)-3(\lambda z_1+z_2),2(\lambda x_1+x_2)-3(\lambda y_1+y_2)-2(\lambda z_1+z_2),\lambda y_1+y_2)\\
&= (3\lambda x_1+x_2-4\lambda y_1-4y_2-3\lambda z_1-3z_2,2\lambda x_1+2x_2-3\lambda y_1-3y_2-2\lambda z_1-2z_2,\lambda y_1+y_2)\\
&= (\lambda(3x_1-4y_1-3z_1)+(x_2-4y_2-3z_2),\lambda(2x_1-3y_1-2z_1)+2x_2-3y_2-2z_2,\lambda y_1+y_2)\\
&= \lambda(3x_1-4y_1-3z_1,2x_1-3y_1-2z_1,y_1)+(3x_2-4y_2-3z_2,2x_2-3y_2-2z_2,y_2)
\end{aligned}$$

   On vient de vérifier que f est une application linéaire, et comme par définition il est écrit que $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on peut affirmer que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$

2. (a) i) Déterminons $\ker(f)$.
   Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   On a les équivalences suivantes:

$$(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow f(x,y,z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y-3z &=0\\2x-3y-2z&=0\\y&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3z&=0\\2x-2z&=0\\y&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z&=x\\y&=0\end{cases}$$

   Ainsi $\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=x \text{ et } y=0\}=\{(x,0,x)|\forall x\in\mathbb{R}\}=\text{vect}((1,0,1))$.
   $\boxed{\text{Conclusion: } \ker(f) \text{ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur } (1,0,1)}$

   ii) Déterminons $\text{Im}(f)$
   Par définition, on a

$$\text{Im}(f)=\{f(x,y,z)|\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\{(3x-4y-3z,2x-3y-2z,y)|\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$$

   ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}\text{Im}(f)&=\{x(3,2,0)+y(-4,-3,1)+z(-3,-2,0)|\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\&=\text{vect}((3,2,0),(-4,-3,1),(-3,-2,0))\end{aligned}$$

   Comme les vecteurs $(3,2,0)$ et $(-3,-2,0)$ sont proportionnels,
   on a $\text{Im}(f)=\text{vect}((3,2,0),(-4,-3,1))$,
   et comme $((3,2,0),(-4,-3,1))$ forment clairement une famille libre, on peut affirmer que

$$\boxed{((3,2,0),(-4,-3,1)) \text{ est une base de } \text{Im}(f)}$$

   (b) Ici, il est facile de donner des arguments qui justifient que $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$
   - par exemple, on peut dire que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, et que cela signifie que f n'est pas injective (et donc a fortiori elle ne peut être bijective)
   - par exemple, on peut dire que l'ensemble image de f n'est pas $\mathbb{R}^3$ tout entier car $\dim\text{Im}(f)=2<3=\dim\mathbb{R}^3$, et donc affirmer que f n'est pas surjective (et donc a fortiori elle ne peut être bijective)

3. (a) On commence par déterminer l'expression de f^2.
Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f(f(x,y,z)) &= f(3x-4y-3z,2x-3y-2z,y) \\ &= (3(3x-4y-3z)-4(2x-3y-2z)-3y,2(3x-4y-3z)-3(2x-3y-2z)-2y,2x- \\ &= (x-3y-z,-y,2x-3y-2z) \end{aligned}$$

Puis on dit que l'on a l'équivalence

$$(x,y,z) \in \ker(f^2+id) \Leftrightarrow (f^2+id)(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow f^2(x,y,z)+(x,y,z) = (0,0,0)$$

c'est à dire

$$(x,y,z) \in \ker(f^2+id) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-3y-z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2x-3y-z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 2x-3y-z=0$$

Ainsi

$$\ker(f^2+id) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x-3y-z=0\} = \{(x,y,2x-3y) | \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Soit

$$\ker(f^2+id) = \{x(1,0,2)+y(0,1,-3) | \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,0,2),(0,1,-3))$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on peut affirmer que

$$\boxed{\dim\ker(f^2+id)) = 2 \text{ et que } (((1,0,2),(0,1,-3)) \text{ est une base de } \ker(f^2+id)}$$

(b) Le moyen le plus rapide ici pour justifier que $\ker(f)$ et $\ker(f^2+id)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ est de prouver que la concaténation d'un base de $\ker(f)$ et d'une base de $\ker(f^2+id)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ce qui est très aisé à faire avec le déterminant!
Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ on peut bien conclure que $\boxed{\ker(f) \oplus \ker(f^2+id) = \mathbb{R}^3}$

4. Pour justifier que $f^3+f=0$ il suffit de calculer pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^3(x,y,z)$
(ce qui est assez simple ici car on a déjà calculé $f^2(x,y,z)$)
et on trouve bien que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f^3(x,y,z) = (-3x+4y+3z,-2x+3y+2z,-y) = -f(x,y,z)$$

5. On commence par fair une Analyse de la situation.
Notons $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3)$ les vecteurs d'une base $\mathcal{C}$ que l'on cherche
Dire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ équivaut à dire que $\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) & = \vec{0} \\ f(\vec{\varepsilon}_2) & = \vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_3) & = -\vec{\varepsilon}_2 \end{cases}$
On voit d'après les deux dernières égalités que l'on doit avoir
forcément $f^2(\varepsilon_2) = f(f(\vec{\varepsilon}_2)) = f(\vec{\varepsilon}_3) = -\vec{\varepsilon}_2$ et ainsi que $\vec{\varepsilon}_2 \in \ker(f^2 + id)$.
Choisissons alors
   - $\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1)$ (on a pris un vecteur de $\ker(f)$)
   - $\vec{\varepsilon}_2 = (1,0,2)$ (on a pris un vecteur de $\ker(f^2 + id)$)
   - $\vec{\varepsilon}_3 = f(\vec{\varepsilon}_2) = f(1,0,2) = (-3,-2,0)$

   Pour ce choix, il nous reste maintenant à vérifier les trois vecteurs répondent aux conditions voulues:
   i) $f(\varepsilon_1) = \vec{0}$ car on a $\vec{\epsilon}_1 = (1,0,1) \in \ker f$
   ii) $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$ car on a justement défini ε_3 par cette condition!
   iii) le calcul donne $f(\vec{\varepsilon}_3) = f(-3,-2,0) = (-1,0,-2) = -(1,0,2)$.
   Ce qui prouve bien que $f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_2$
   iv) Enfin le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nous assure que $((1,0,1),(1,0,2),(-3,-2,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

   Au final, on a bien montré que

$$\boxed{\text{dans la base } ((1,0,1),(1,0,2),(-3,-2,0)) \text{ la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A}$$

   rem: vous avez pu trouver une autre base que celle-ci...

6. (a) La famille (f^3,f^2,f,id) est évidemment liée car $f^3 + f = 0$

   (b) Montrons que la famille (f^2,f,id) est libre.

   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f^2 + b.f + c.id = 0$

   Traduisons matriciellement cette égalité dans la base $\mathcal{C}$,
   cela donne
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(a.f^2 + b.f + c.id) = 0$$
   ce qui donne
$$a.\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^2) + b.\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) + c.\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(id) = 0_3$$
   càd
$$a.A^2 + b.A + c.I_3 = 0_3$$
   En revenant aux coefficients cela donne
$$a.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & -b \\ 0 & b & c-a \end{pmatrix} = 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système $\begin{cases} c & = 0 \\ c-a & = 0 \\ -b & = 0 \\ b & = 0 \\ c-a & = 0 \end{cases}$

qui possède clairement comme unique solution $\underline{\underline{a = b = c = 0}}$