définition 2:

On dit que L'ENDOMORPHISME $f \in \mathcal{L}(E)$ EST DIAGONALISABLE lorsqu' il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

déterminer si un endomorphisme est diagonalisable, c'est déterminer si, parmi toutes les matrices associées à cet endomorphisme, l'une au moins est une matrice diagonale.

On a déjà vu que les homothéties, les symétries vectorielles et les projections sont des endomorphismes diagonalisables

théorème 6: condition suffisante de diagonalisabilité, deux formulations possibles

1. **Si** $\dim E = n$ et si f posséde n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.
2. **Si** χ_f est scindé et n'admet que des racines simples **alors** f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.

Bien noté qu'il s'agit juste d'une condition suffisante et non d'une cns !

théorème 7: CNS de diagonalisabilité

Soit f un endomorphisme de E. On note $sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ son spectre.

Alors, il y a équivalence entre :

i.) f est diagonalisable

ii.) le polynôme caractéristique χ_f est SCINDÉ sur $\mathbb{K}$ ET pour toute vp λ de f, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$ *càd*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \exists ! \, (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p} \, | \, \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p}$$

rem: f est diagonalisable ssi tout élément de E peut s'écrire de manière unique comme une somme de vecteurs propres de f.

définition 4:

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et f un endomorphisme de E.

- On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est UNE VALEUR PROPRE (V.P) DE f lorsque il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ NON NUL tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
- Dans ce cas, le vecteur $\vec{x}$ s'appelle UN VECTEUR PROPRE $(\vec{v}.p)$ ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle LE SPECTRE DE f, et se note $sp(f)$

théorème 5: pour la démo, se placer dans une base judicieuse

Si λ est une valeur propre d'ordre $m(\lambda)$ de f [de A] **alors** $\boxed{1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)}$

En particulier, ***Si*** λ *est une valeur propre simple* ***alors*** E_λ *est une droite vectorielle*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} \end{array}$$


Polynômes d'endomorp
mplément: matrice ré
e complexe
pels sur les systèmes li
aires
ystèmes homogènes
stèmes avec second membre
chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes, E désigner
nt, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

Il n'y aucune implication entre DIAGONALISABLE et BIJECTIVE

DIAGONALISABLE mais NON BIJECTIF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BIJECTIF mais NON DIAGONALISABLE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$