théorème 3: un projecteur est une projection

Soit p un projecteur de E.(càd p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$)
On a alors :

i) $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$

ii) $\operatorname{Im} p = \ker(p - id)$

iii) p est LA projection sur $\operatorname{Im} p = \ker(p - id) = E_1(p)$ parallèlement à $\ker p = E_0(p)$

rem: on prouve dans la démonstration que

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in \operatorname{Im}(p)} + \underbrace{(\vec{x} - p(\vec{x}))}_{\in \ker(p)}$$

théorème 4: caractérisation matricielle d'un projecteur

Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$.
Il y a équivalence entre :

i.) f est un projecteur

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$$

et dans ce cas, on a alors $\boxed{\mathrm{tr}\, f = \mathrm{rg}\, f = r = \dim \ker(f - id_E)}$

A retenir: un endomorphisme est un projecteur ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale

définition 6: symétrie vectorielle

Soit $E = F_1 \oplus F_2$

LA SYMÉTRIE VECTORIELLE PAR RAPPORT À F_1 PARALLÈLLEMENT À F_2 est l'endomorphisme de E, noté s, défini par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} s : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}}$$

- *Rappel:* $E = F_1 \oplus F_2$ *signifie que* $\forall \vec{x} \in E \, , \exists ! \, (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2 \, , \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

théorème 17: dimension de $\mathcal{L}(E,G)$

Si E et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,G)$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie, et l'on a $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,G) = (\dim E) \times (\dim G)}$

En particulier, l'ensemble des endomorphismes de E est un ev de dimension finie,

avec $\boxed{\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2}$

théorème 11: caractérisation des automorphismes en dimension finie

Soit f un endomorphisme de E avec E un ev de dimension finie *(hyp. très importante!)*.
Il y a équivalence entre :

i) f est injective ($\Longleftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$)

ii) f est surjective($\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = E$)

iii) f est bijective (c'est un automorphisme de E)

iv) l'image d'une base de E par f est encore une base de E.

v) $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$

vi) N'importe quelle matrice associée à f est inversible