PT* 24/25 - DM 4
à rendre le vendredi 4 octobre

Des intersections et des tangentes

On considère:
- le point $A(1,0)$
- la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$
- l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$
- Pour tout $m \in \mathbb{R}^*, \mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = m(1 - x)$

1. Faire un dessin.(*pour $\mathcal{E}$ les 3/2 pourront demander aux 5/2*)
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe la parabole en un point $M_m \neq A$
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ coupe l'ellipse en un point $N_m \neq A$
4. Déterminer une équation de la tangente en M_m à la parabole $\mathcal{P}$ et une équation de la tangente en N_m à l'ellipse $\mathcal{E}$
5. Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux tangentes lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$

On devra trouver pêle-mêle les points $(1,\dfrac{1}{2m})\,,(\dfrac{2m^2-1}{2m^2+1},\dfrac{2m}{2m^2+1})\,,(\dfrac{m^2-1}{m^2},\dfrac{1}{m})$

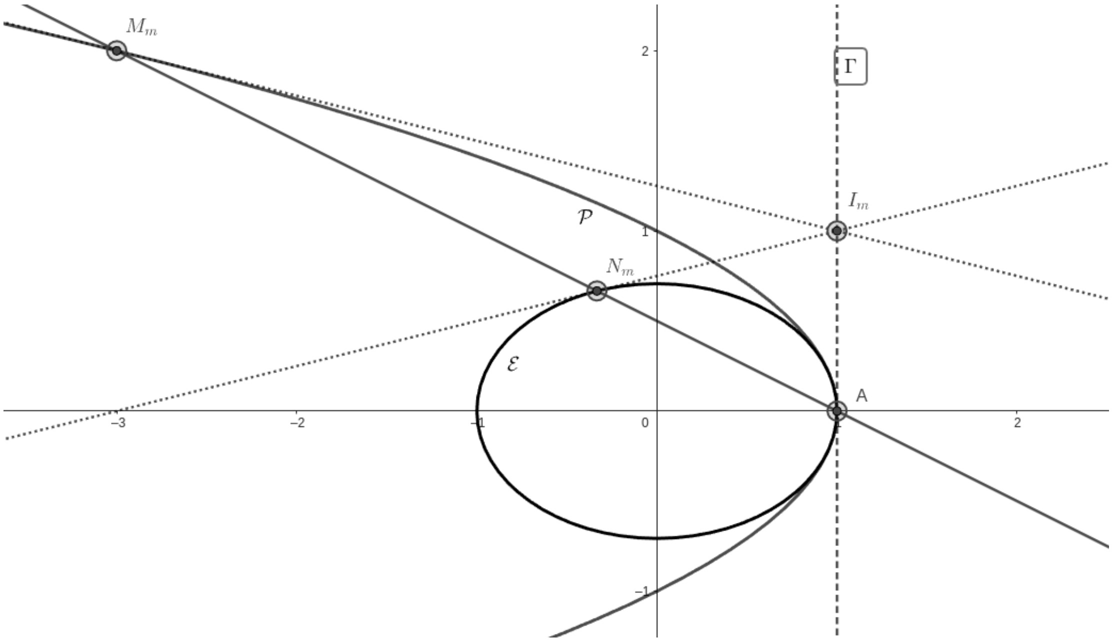
Deux lieux de projections orthogonales

On considère la courbe paramétrée Γ : $\begin{cases} x(t) & = 2t^2 \\ y(t) & = 2t \end{cases}$

1. Donner une équation cartésienne de la courbe Γ et la tracer
2. Donner une équation cartésienne de la tangente T_t à Γ au point $M(t)$
3. (a) Déterminer le projeté orthogonal du point $F(\dfrac{1}{2},0)$ sur la tangente T_t.
   On note K_t ce point.
   (b) Reconnaître le lieu de K_t lorsque t varie.
   On a ainsi déterminé "le lieu des projections orthogonales de $F(\dfrac{1}{2},0)$ sur les tangentes à Γ"
4. Déterminer, puis étudier et tracer le lieu des projections orthogonales de $O(0,0)$ sur les tangentes à Γ.
   On sera amené à étudier la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\dfrac{-2t^2}{4t^2+1}\,,\dfrac{4t^3}{4t^2+1}\right)$

Des intersections et des tangentes

1. Sur ce dessin, j'ai aussi placé les éléments que nous rencontrerons plus tard



2. L'intersection de $\mathcal{D}_m$ et de la parabole est caractérisé par le système

$$\begin{cases} x + y^2 &= 1 \\ y &= m.(1-x) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \dfrac{y}{m} + y^2 = 1x &= 1 - \dfrac{y}{m} \end{cases} \iff \begin{cases} y.(my-1) &= 0 \\ x &= 1 - \dfrac{y}{m} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x &= 1 \end{cases} \quad \textit{càd le point } A(1{,}0) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y &= \dfrac{1}{m} \\ x &= 1 - \dfrac{1}{m^2} \end{cases} \quad \textit{càd le point } M_m$$

Conclusion : $\boxed{M_m\left(1 - \dfrac{1}{m^2}, \dfrac{1}{m}\right)}$

3. De manière identique, on considère le système

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 &= 1 \\ y &= m.(1-x) \end{cases}$$

et on trouve $\boxed{N_m\left(\dfrac{2m^2-1}{2m^2+1}, \dfrac{2m}{2m^2+1}\right)}$

4. • **Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$**
   - Notons $F : (x,y) \mapsto y^2 + x - 1$
     La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a $\nabla F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}$ et ainsi $\nabla_{M_0} F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
     ce qui prouve que le point M_0 est une point régulier.
   - La tangente à $\mathcal{P}$ au point M_0 est la droite qui passe par le point M_0 et de vecteur normal $\nabla_{M_0} F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ son équation cartésienne est donc $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = 0$
     En développant cela donne

     $$x - x_0 + 2y_0(y - y_0) = 0 \qquad \text{soit} \qquad x + 2y_0 y - x_0 - 2y_0^2 = 0$$

     Comme $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$ on a $y_0^2 = 1 - x_0$, et en remplaçant

     $$x + 2y_0 y + x_0 - 2 = 0$$

- **On écrit l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point M_n (que l'on note $T_m^{\mathcal{P}}$)**
  Pour cela on remplace simplement (x_0,y_0) par $\left(1-\dfrac{1}{m^2},\dfrac{1}{m}\right)$, ce qui donne après simplications

$$T_m^{\mathcal{P}} \;:\; m^2.x+2m.y-1-m^2=0$$

- **Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$**
  - Notons $F:(x,y)\mapsto x^2+2y^2-1$
    La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a $\nabla F=\begin{pmatrix}2x\\4y\end{pmatrix}$ et ainsi $\nabla_{M_0}F=\begin{pmatrix}2x_0\\4y_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ car le point $O(0,0)\not\in\mathcal{E}$
    ce qui prouve que le point M_0 est une point régulier.
  - La tangente à $\mathcal{E}$ au point M_0 est la droite qui passe par le point M_0 et de vecteur normal $\nabla_{M_0}F=2\begin{pmatrix}x_0\\2y_0\end{pmatrix}$ son équation cartésienne est donc $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\2y_0\end{pmatrix}=0$
    En développant cela donne

$$x_0x-x_0^2+2y_0y-y_0^2=0 \qquad \text{soit} \qquad x_0x+2y_0y-x_0^2-2y_0^2=0$$

    Comme $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ on a $x_0^2+2y_0^2=1$, et en remplaçant

$$x_0x+2y_0y-1=0$$

- **On écrit l'équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point N_n (que l'on note $T_m^{\mathcal{E}}$)**
  Pour cela on remplace simplement (x_0,y_0) par $\left(\dfrac{2m^2-1}{2m^2+1},\dfrac{2m}{2m^2+1}\right)$, ce qui donne après simplications

$$T_m^{\mathcal{E}} \;:\; (2m^2-1).x+4m.y-1-2m^2=0$$

5. - L'intersection de ces deux tangentes est caractérisée par le système

$$\begin{cases} m^2.x+m.y-1-m^2 &=0\\ (2m^2-1).x+4m.y-1-2m^2 &=0\end{cases} \iff \begin{cases} x &=1\\ y &=\dfrac{1}{2m}\end{cases}$$

   Le point d'intersection des droites $T_m^{\mathcal{P}}$ et $T_m^{\mathcal{E}}$ est le point $I_m(1,\dfrac{1}{2m}$
   - Notons Γ le lieu de I_m

$$\Gamma=\{I_m\,|\,m\in\mathbb{R}^*\}=\{I_m(1,\frac{1}{2m})\,|\,m\in\mathbb{R}^*\}$$

   Lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, la quantité $\dfrac{1}{2m}$ décrit aussi $\mathbb{R}^*$.

   Conclusion: $\boxed{\Gamma \text{ est la droite d'équation } x=1 \text{ privée du point } (1,0)\text{, càd privée de } A}$

Deux lieux de projections orthogonales

1. Ici on peut facilement déterminer l'équation cartésienne de Γ par équivalence.
   On a en effet les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\Gamma \iff \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x &=2t^2\\ y&=2t\end{cases} &\iff \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x &=2t^2\\ t&=\dfrac{y}{2}\end{cases}\\ &\iff \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x &=\dfrac{y^2}{2}\\ t&=\dfrac{y}{2}\end{cases}\\ &\iff x=\frac{y^2}{2}\end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{\text{une équation cartésienne de } \Gamma \text{ est } x-2y^2=0}$

2. Les fonctions x et y sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

   Ainsi tout point est régulier, et la tangente au point $M(t)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-2t^2 & 2t \\ y-2t & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{càd} \qquad \boxed{x-2ty+2t^2=0}$$

3. (a) Pour déterminer le projeté du point F sur la droite T_t je propose 2 solutions

   - **première solution: utilisation de la formule du projeté orthogonal**

     La droite T_t a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$.

     On a donc

$$\overrightarrow{M_tK_t} = \frac{<\overrightarrow{M_tF}\,,\vec{d}>}{||\vec{d}||^2}.\vec{d}$$

     ce qui donne

$$\begin{aligned} K_t &= M_t + \frac{<\overrightarrow{M_tF}\,,\vec{d}>}{||\vec{d}||^2}.\vec{d} \\ &= \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \frac{<\begin{pmatrix} 1/2-2t^2 \\ -2t \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}>}{4t^2+1}.\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \frac{-4t^3-t}{4t^2+1}.\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t \end{pmatrix} - t.\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   - **seconde solution: on caractérise le projeté géométriquement**

     (On rappelle qu'un vecteur directeur de T_t est $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

     Notons $K_t = (x_1,y_1)$

     Le point K_t est le point de la droite T_t pour lequel (FK_t) est perpendiculaire à T_t.

     Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1-2ty_1+2t^2 & =0 \\ <\begin{pmatrix} x_1-1/2 \\ y_1-0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}> & =0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1-2ty_1+2t^2 & =0 \\ 2tx_1+y_1-t & =0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1-2ty_1+2t^2 & =0 \\ y_1 & =t-2tx_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 & =0 \\ y_1 & =t-2tx_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 & =0 \\ y_1 & =t \end{cases} \end{aligned}$$

   (b) On a montré que $\forall t \in \mathbb{R}, K_t = (0,t)$.

   Le lieu de K_t est $\{K_t \,|\, t \in \mathbb{R} = \{(0,t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

   On reconnait l'axe des ordonnées

4. (a) Notons H_t le projeté orthogonal de l'origine sur T_t.

   En utilisant l'une ou l'autre de méthodes ci-dessus, on trouve $H_t = \left(\dfrac{-2t^2}{4t^2+1}, \dfrac{4t^3}{4t^2+1}\right)$

(b) **Etude de cet arc paramétré**

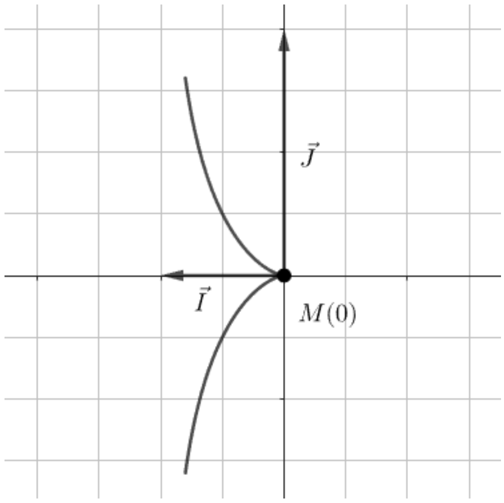
- **réduction de l'intervalle d'étude.**
  x est pair et y est impair.
  On réduit l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$, et pour obtenir toute la courbe on opère une symétrie par rapport à l'axe des abscisses
- **tableau de variations**

  – $\forall t \in \mathbb{R}^+, x'(t) = \dfrac{-4t}{(4t^2+1)^2} \leqslant 0$ avec égalité ssi $x = 0$
  – $\forall t \in \mathbb{R}^+, y'(t) = \dfrac{4t^2(4t^2+3)}{(4t^2+1)^2} \geqslant 0$ avec égalité ssi $x = 0$
  – $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2t^2}{4t^2} = \frac{-1}{2}$
  – $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{4t^3}{4t^2} = +\infty$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	

- **branche infinie**
  Lorsque $t \to +\infty$, il y a une droite asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.
  La courbe est localement à droite de cette asymptote. (car $x(t) \to -\dfrac{1}{2}^+$
- **étude du point singulier**
  $M(0)$ est un point singulier car $x'(0) = y'(0) = 0$
  Un DL donne
  $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=M(0)} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{I}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{J}} + o(t^3)$$
  Notons $(X(t), Y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$ dans $(M(0), \vec{I}, \vec{J})$.

  On a $X(t) \underset{0}{\sim} t^2 \geqslant 0$ et $Y(t) \underset{0}{\sim} t^3$ (change de signe).
  On reconnait un point de rebroussement de première espèce



- **courbe dans son entier**