# PT* 24/25 - DM 5
# à rendre le vendredi 11 octobre

## Etude d'un point double

Comme à son habitude, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t)=(3t^3-t,3t^2-1)\end{array}}$

1. Mettre en évidence une symétrie de $\Gamma$ qui permet de réduire l'intervalle d'étude.
2. Dresser le tableau de variation conjoint de $x$ et de $y$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$
3. Faire l'étude de la branche infinie
4. Etude d'un point double
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} t_1<t_2 \\ M(t_1)=M(t_2)\end{cases}$
   (b) Donner les coordonnées de ce point $M(t_1)=M(t_2)$
   (c) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\Gamma$ en $M(t_1)$ puis en $M(t_2)$ et en déduire l'angle sous lequel se coupe les tangentes à $\Gamma$ en ce point.
5. Dessiner la courbe $\Gamma$
6. Calculer la longueur de la courbe entre les point $M(t=-1/\sqrt{3})$ et $M(t=1/\sqrt{3})$
   (*les 3/2 pourront demander aux 5/2 la formule à utiliser)*

## Un changement de repère

Dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère $\Gamma$ la courbe d'équation

$$4x-3y+\sin(\frac{3x+4y}{5})=0$$

On note $\theta=\arccos(\frac{3}{5})$.
On note $\vec{u}=\cos\theta.\vec{i}+\sin\theta.\vec{j}$.
On considère le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, et on note $(X,Y)$ les coordonnées dans ce repère
1. Que vaut $\sin\theta$? Justifier.
2. Que vaut $\vec{v}$?
3. Donner les relations liant $x$,$y$,$X$ et $Y$
4. Donner l'équation de $\Gamma$ dans le nouveau repère, et dessiner $\Gamma$ dans le repère initial

## Exercice 2 de Maths B 2024

# Etude d'un point double

1. La fonction $x$ est impaire, et $y$ est paire; on en déduit **une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées** et l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0,+\infty[$
2. • Les fonctions $x$ et $y$ sont polynomiales, elles sont donc $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) & = 9t^2 - 1 = 9(t - \frac{1}{3})(t + \frac{1}{3}) \\ y'(t) & = 6t \end{cases}$$

On note que le signe des dérivées sous cette forme est trivial, et qu'il n'y a pas de points singuliers!

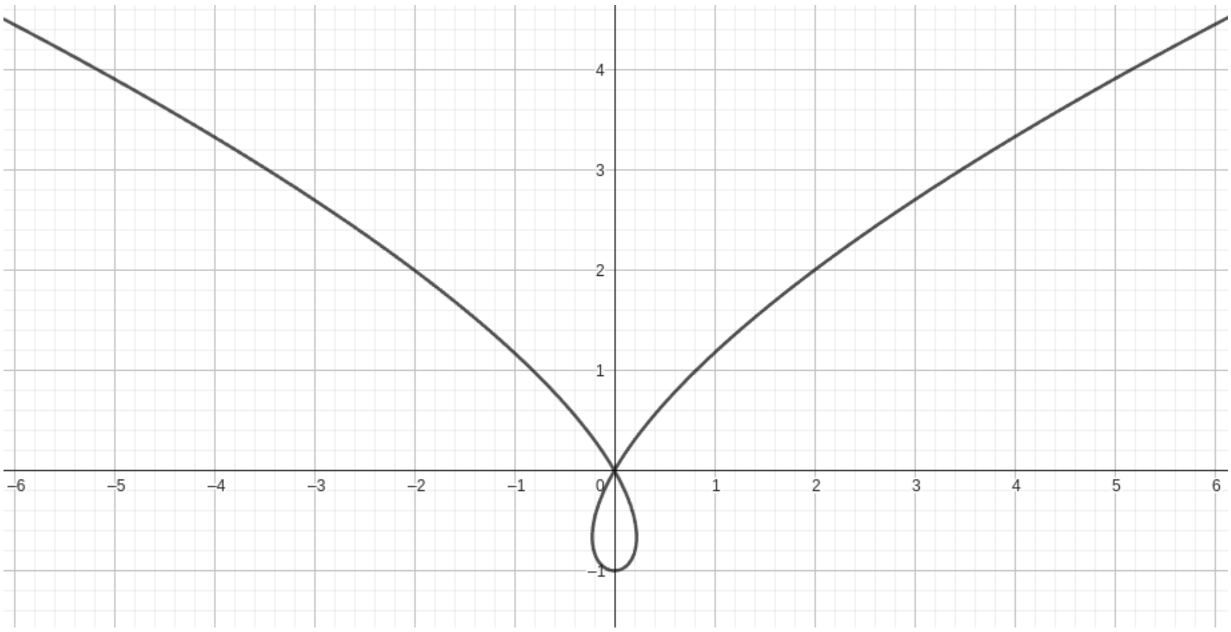
| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{9}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{-2}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | $0$ | | $+$ | | |

3. La seule branche infinie à étudier est lorsque $t \to +\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{-t^3} = 0$$

$\boxed{\text{Il n'y a pas de droite asymptote mais juste une branche parabolique de direction } (Ox)}$

4. dessin



5. (a) Soient $t_1 < t_2$.
On a les équivalences suivantes

$$M(t_1) = M(t_2) \iff \begin{cases} 3t_1^3 - t_1 & = 3t_2^3 - t_2 \\ 3t_1^2 - 1 & = 3t_2^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_1^3 - t_1 & = 3t_2^3 - t_2 \\ t_1 & = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6t_1^3 - 2t_1 & = 0 \\ t_1 & = -t_2 \end{cases}$$

Sous la condition $t_1 < t_2$ cela donne

$$M(t_1) = M(t_2) \iff \begin{cases} t_1(3t_1^2 - 1) & = 0 \\ t_1 & = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = 0 \text{ ou } t_1 = 1/\sqrt{3} \text{ ou } t_1 = -1/\sqrt{3} \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 & = -1/\sqrt{3} \\ t_2 & = 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

(b) Le calcul précédent montre qu'il y a un unique point double, et que celui est le point $O$ car

$$M(-1/\sqrt{3}) = M(1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$$

(c) • Comme chaque point est régulier, la tangente au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{d_t} = \begin{pmatrix} 9t^2 - 1 \\ 6t \end{pmatrix}$

• Ainsi

$$\vec{d_{t_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{d_{t_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

• Notons $\alpha$ l'angle entre les 2 droites

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d_{t_1}} \cdot \vec{d_{t_2}}}{||\vec{d_{t_1}}||.||\vec{d_{t_2}}||} = \frac{-1}{2}$$

Ainsi $\boxed{\text{l'angle non orienté entre les tangentes vaut } \dfrac{2\pi}{3}}$

6. Un premier calcul donne

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (9t^2 - 1)^2 + (6t)^2 = 81t^4 + 18t^2 + 1 = (9t^2 + 1)^2$$

ainsi

$$||\overrightarrow{M'(t)}|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |9t^2 + 1| = 9t^2 + 1$$

et donc

$$L = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} ||\overrightarrow{M'(t)}||dt = \left[3t^3 + t\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

*rem: par symétrie, on pouvait aussi écrire* $L = 2.\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} ||\overrightarrow{M'(t)}||dt$

# Un changement de repère

1. Comme $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, on sait $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$.
On sait que arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$.
On a donc $\sin\theta \geqslant 0$ ce qui permet d'écrire

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

*rem: dans le formulaire il est écrit* $\forall x \in [-1, +1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

2. Comme $\vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et que la base $(\vec{u},\vec{v})$ est orthonormée directe, on a

$$\vec{v} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$$

3. Notons $P$ la matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j})$ vers la base $(\vec{u},\vec{v})$.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base pour les vecteurs, on a

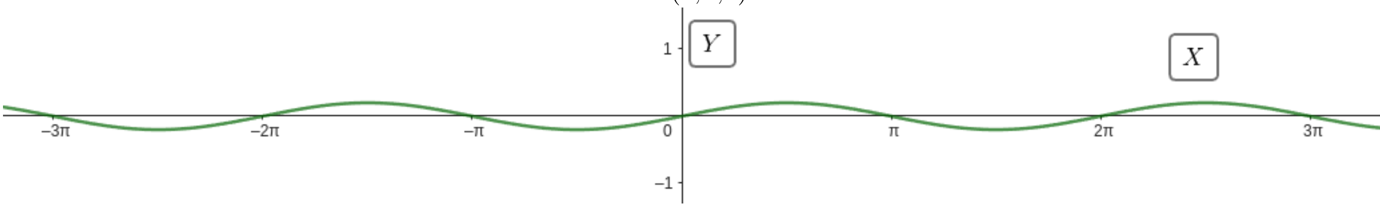
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta.X - \sin\theta.Y \\ \sin\theta.X + \cos\theta.Y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3X - 4Y \\ 4X + 3Y \end{pmatrix}$$

4. Pour avoir l'équation de $\Gamma$ dans le nouveau repère, on effectue la substitution dans l'équation de celle-ci

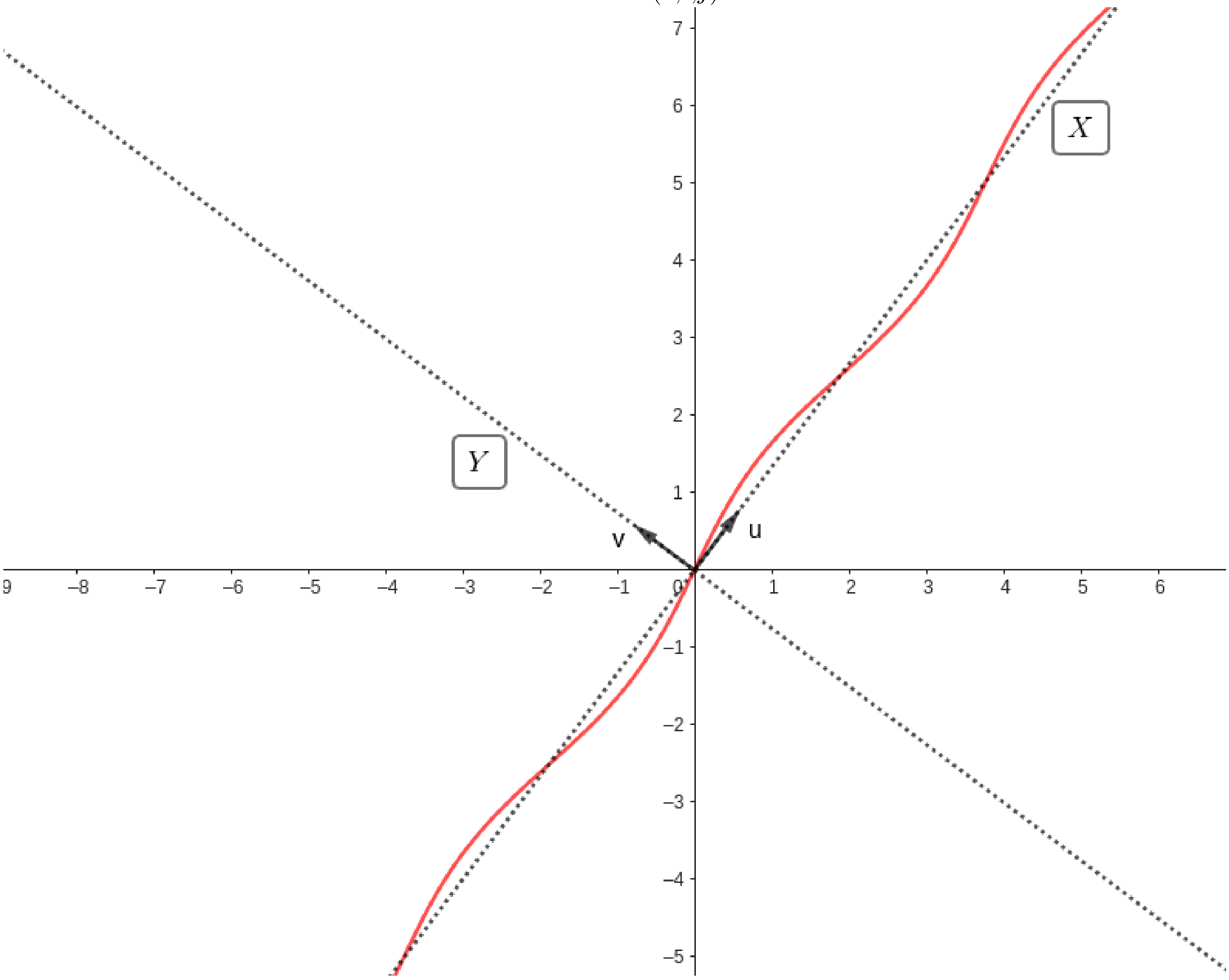
$$\begin{aligned} 4x - 3y + \sin\left(\frac{3x+4y}{5}\right) = 0 &\iff 4.\frac{3X-4Y}{5} - 3.\frac{4X+3Y}{5} + \sin\left(\frac{3.\frac{3X-4Y}{5} + 4.\frac{4X+3Y}{5}}{5}\right) = 0 \\ &\iff -5Y + \sin(X) = 0 \\ &\iff Y = \frac{1}{5}\sin(X) \end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{\text{dans le nouveau repère } \Gamma \text{ a pour équation } Y = -\frac{1}{5}\sin(X)}$

**DESSIN DANS** $(0,\vec{u},\vec{v})$




**DESSIN DANS** $(0,\vec{i},\vec{j})$



# Banque PT 2024 B - exercice 2

**Partie A**

1. $\Lambda_0$ a pour paramétrisation $\begin{cases} x_0(t) &= R.\cos t \\ y_0(t) &= R.\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0,2\pi]$

   Il s'agit donc du $\boxed{\text{cercle de centre } O = (0,0) \text{ et de rayon } R}$

2. Dans cette question, il s'agissait de linéariser.
   Cela donne

$$\begin{cases} x_1(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2)t \\ y_1(t) &= \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in [-\pi/2,\pi/2].$$

   Comme $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ on a $2t \in [-\pi,\pi]$, ce qui nous permet d'affirmer que $\Lambda_1$ est le cercle(entier!) de centre $(\frac{1}{2},0$ et de rayon $\frac{1}{2}$

   *rem: vérifier que $(x_1 - \frac{1}{2})^2 + y_1^2(t) = \frac{1}{4}$ permet de justifier que $\Lambda_1$ était inclus dans le cercle précédent, mais ne montrait pas que $\Lambda_1$ était égal au cercle précédent*

**Partie B**

1. On a $\begin{cases} x_2'(t) &= e^t(\cos t - \sin t) \\ y_2'(t) &= e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}$ et ainsi $\sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2} = \cdots = \sqrt{2}.e^t$

$$l = \int_{-\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2}dt = \sqrt{2}\int_{-\ln 3}^{3\ln 2} e^t dt = \sqrt{2}.\left[e^t\right]_{-\ln 3}^{3\ln 2} = \sqrt{2}(e^{3\ln 2} - e^{-\ln 3}) = \sqrt{2}(8 - \frac{1}{3}) = \frac{23\sqrt{2}}{3}$$

2. Soit $t_1 < t_2$.
   La longueur prise sur la courbe entre les point $M(t_1)$ et $M(t_2)$ est

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2}.e^t.dt = \sqrt{2}(e^{t_2} - e^{t_1})$$

   En faisant tendre $t_1 \to -\infty$ et $t_2 \to +\infty$, on a $\sqrt{2}(e^{t_2} - e^{t_1}) \to +\infty$, ce qui permet d'affirmer que la courbe est de longueur infinie.

3.
   - Il y a une tangente verticale en $M_2(t_0)$ ssi le premier vecteur dérivée en $t_0$ est colinéaire à $\vec{j} = (0,1)$
   - Commençons par remarquer que la courbe est régulière.
     En effet, on a $\forall t \in \mathbb{R}, ||\overrightarrow{M_2'(t)}||\sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2} = \sqrt{2}.e^t \neq 0$ ce qui prouve que $\forall t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{M_2'(t)} \neq \vec{0}$
   - On en déduit qu'il y une tangente verticale en $M_2(t_0)$ ssi $x_2'(t_0) = 0$ ssi $\cos t_0 = \sin t_0$
     *rem: ceci donne $t_0 \sim \frac{\pi}{4}[\pi]$ mais on n'avait pas besoin de ceci*
   - Ainsi les points de $\Lambda_2$ en lesquels la tangente est verticale sont les points $M_2(t_0)$ pour lesquels $\cos t_0 = \sin t_0$, ce qui donne

$$M_2(t_0) = \begin{pmatrix} e^{t_0}\cos t_0 \\ e^{t_0}\sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t_0}\cos t_0 \\ e^{t_0}\cos t_0 \end{pmatrix}$$

     On remarque que ces points sont sur la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
     Il s'agit de la "première bissectrice": c'est la droite qui passe par le point $O$ et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$

4.
   -

$$\frac{ds}{dt} = ||\overrightarrow{M_2'(t)}|| = \sqrt{2}.e^t$$

$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{M_2'(t)}}{||\overrightarrow{M_2'(t)}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

5. On cherche le paramètre angulaire $\alpha$ tel que

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sin t\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}.\cos t - \sin\frac{\pi}{4}.\sin t\\ \sin\frac{\pi}{4}.\cos t + \cos\frac{\pi}{4}.\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{4}+t)\\ \sin(\frac{\pi}{4}+t)\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + t$$

6. On en déduit que

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}.\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}} = 1.\frac{1}{\sqrt{2}e^t} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}$$

7. et ainsi

$$C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma}.\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}-\cos t - \sin t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^t.\sin t\\ e^t.\cos t\end{pmatrix}$$

8. On a

$$Aff(M(t)) = z_{M(t)} = e^t.\cos t + i.e^t.\sin t = e^t.(\cos t + i\sin t) = e^t.e^{it}$$

et

$$Aff(C(t)) = z_{C(t)} = e^t.(-\sin t + i.\cos t) = i.e^t.(\cos t + i\sin t) = i.e^t.e^{it}$$

On constate que

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_C(t) = i.z_{M(t)} = e^{i\pi/2}.z_{M(t)}$$

ce qui prouve que $C(t)$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion: $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\Lambda_2$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

**Partie C**

1. La fonction $x_3$ est paire et $y_3$ est impaire donc le point $M(t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe $(0x)$.
   On en déduit que l'on peut restreindre l'étude à $I_3' = [0,\dfrac{\pi}{2}[= I_3 \subset \mathbb{R}^+$, et que pour obtenir toute la courbe on effectuera la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
2. On a $\forall t \in I_3'$, $\begin{cases} x_3'(t) &= 2.\sin t.\cos t = \sin(2t)\\ y_3'(t) &= \dfrac{3.\sin^2 t.\cos^2 t + \sin^4 t}{\cos^2 t}\end{cases}$
   ce qui donne directement le tableau

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | ‖ |

3. 
   - $M_3(0)$ est un point singulier car $\overrightarrow{M_3'(0)} = (0,0)$
   - On va calculer un DL à l'ordre 3 en 0
     - $x_3(t) = \sin^2 t = (t + o(t^2))^2 = t^2 + o(t^3)$

– $y_3(t)=\dfrac{\sin^3 t}{\cos t}\sim\dfrac{t^3}{1}=t^3$ donc $y_3(t)=t^3+o(t^3)$

Ainsi

$$M(t)=\begin{pmatrix}t^2+o(t^3)\\t^3+o(t^3)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{=O}+t^2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{I}}+t^3\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{J}}+o(t^3)$$

On fait le dessin habituel

et on trouve que c'est un point de rebroussement de 1ère espèce.

La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $\vec{I}=(1,0)$: c'est une tangente horizontale

•

4. $M_3(\frac{\pi}{4})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

   La tangente en ce point est dirigée par la vecteur $\overrightarrow{M_3(\frac{\pi}{4})}=(1,2)$

5. Comme $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}x(t)=1$ et $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}y(t)=+\infty$, on est en présence d'une asymptote verticale d'équation $x=1$

**Partie D**

1. Question calculatoire qui utilise simplement $\tan'=1+\tan^2$

   •
$$\begin{aligned}h'(t)&=2t(1+\tan^2 t)+t^2.2.\tan t.(1+\tan^2 t)\\&=2t.(1+\tan^2 t)(1+t.\tan^2 t)\end{aligned}$$

   •
$$\begin{aligned}k'(t)&=1+\tan^2 t+1+\tan^2 t+2t.\tan t.(1+\tan^2 t)\\&=2(1+\tan^2 t)+2t(1+\tan^2 t).\tan t\\&=2.(1+\tan^2 t)(1+t.\tan^2 t)\end{aligned}$$

2. Soit $t\in I_4$.

   $D_t$ a pour équation cartésienne $k(t).x-y-h(t)=0$

   - L'intersection de $D_t$ avec l'axe des ordonnées est donnée par le système
$$\begin{cases}k(t).x-y-h(t)&=0\\x&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=0\\y&=-h(t)\end{cases}$$
     On trouve comme intersection le point $(0,-h(t))$
   - Un vecteur directeur de $D_t$ est $\begin{pmatrix}1\\k(t)\end{pmatrix}$
   - Une représentation paramétrique de $D_t$ est ainsi
$$\lambda\in\mathbb{R}\mapsto\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-h(t)\end{pmatrix}}_{=A(t)}+\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}1\\k(t)\end{pmatrix}}_{=\vec{u}(t)}$$

3. On déroule la méthode au programme en posant $P(t)=A(t)+\lambda(t).\vec{u}(t)$

   Et l'on trouve
$$\lambda(t)=-\frac{\det(\overrightarrow{A'(t)},\vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t),\vec{u}(t))}=-\frac{\begin{vmatrix}0&1\\-h'(t)&k(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\k'(t)&k(t)\end{vmatrix}}=\frac{h'(t)}{k'(t)}=t$$

   Ainsi, $\boxed{\text{l'enveloppe cherchée est le lieu du point } P:t\mapsto\begin{pmatrix}0\\-h(t)\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\k(t)\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}t\\t.\tan t\end{pmatrix}}$

4. Oui, en posant $r_4:t\mapsto\dfrac{t}{\cos t}$