PT* 2024-25
DS 1 du 23 septembre 2024
durée 4h
(sortie autorisée à partir de 16h30)

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**

- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**

- Les abréviations sont à proscrire tant que on ne les pas clairement définies dans la copie *(on n'écrira pas "mq" mais "montrer que" , on n'écrira pas "ipp" mais "intégration par parties". . .)*

- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite.
(Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)

- Ce devoir est composé de deux exercices et un problème, totalement indépendants.

EXERCICE 1

Pour tout x réel, on pose $F(x) = x.\int_1^2 e^{-x^2.t^2}dt$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis étudier la parité de F
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2}du$$
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe C^∞ ?
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et montrer que $F(x) = o_{+\infty}\left(e^{-x}\right)$
5. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = F(2^n)$
6. (a) Donner l'expression de la dérivée de F
   (b) Résoudre l'équation $F'(x) = 0$
   (c) Etudier les variations de F, et faire son tableau de variations.
7. Tracer l'allure du graphe de la fonction F
8. On note G la primitive de F qui s'annule en 0
   (a) Donner l'expression de $G(x)$ à l'aide d'une intégrale
   (b) Justifier que G possède une limite (finie ou infinie) en $+\infty$
   (c) Montrer que $\dfrac{1}{8} \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition de la fonction arctan
2. Rappeler les propriétés de la fonction tan ainsi que son graphe sur l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$
3. Soit $n \geqslant 0$.
Justifier que l'équation $x = \tan x$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, +\dfrac{\pi}{2}+n\pi[$.
On notera x_n cette solution.
4. Justifier que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
Justifier que $y_n = \arctan(y_n + n\pi)$ puis déterminer $\lim y_n$
6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, z_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$
   (a) Justifier que pour tout entier n on a $\tan(z_n) = \dfrac{-1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}$.
   (b) Après avoir trouvé un équivalent simple de z_n, montrer que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

PROBLEME

Ce problème est constitué de 3 parties indépendantes

PARTIE I

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en 0, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(2x) = h(x).\cos(x)$$

Dans la suite, h désignera une telle fonction.

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, et tout réel x
$$\sin x = 2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, et tout réel x
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
4. En déduire que $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, h(x).\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}.h\left(\frac{x}{2^n}\right).\sin x$
5. Pour tout $x \neq 0$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right)$
6. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout x réel, de $h(x)$ en fonction de x

PARTIE II

1. Etudier la convergence de la série de terme général $v_n = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$
2. On considère la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ de premier terme $R_2 = 1$ et telle que $\forall n \geqslant 3, R_n = R_{n-1}.\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$
   (a) Calculer, pour tout $n \geqslant 4$, et de deux manières différentes
   $$\sum_{k=4}^{n}\{\ln R_k - \ln R_{k-1}\}$$
   (b) La suite $(\ln R_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente?
   (c) En déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty}\prod_{k=3}^{N}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ existe et est finie

PARTIE III

Dans toute cette partie n désignera un entier naturel **non nul**.

1. On considère la fonction $f_n :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$
   (a) Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0.
   Dorénavant, f_n désignera cette fonction ainsi prolongée
   (b) f_n est-elle dérivable en 0?
2. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et de premier terme 1, i.e.: $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$
3. En déduire, pour tout $t \in]0,1]$, l'expression de $\dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.
4. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$
   (a) Justifier que I_n est bien définie
   (b) Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
5. On pose $u_n = \int_0^1 \dfrac{t}{n(n+t)}dt$
   (a) Exprimer l'intégrale u_n en fonction de n
   (b) Etudier la série de terme général u_n
   (c) En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1

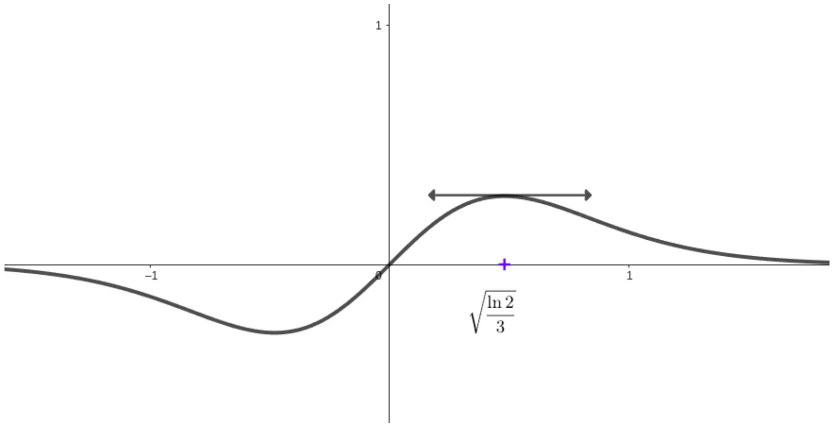
1. • Nous allons commencer par justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt$ existe.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est **continue** sur le **segment**[1,2], on peut donc affirmer que $\displaystyle\int_1^2 \varphi(t)dt$ existe
   • Il est alors clair que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x)$ existe bien.
   Conclusion: $\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$
   • Etude de la parité
   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
$$F(-x) = -x.\int_1^2 e^{-(-x)^2t^2}dt = -x.\int_1^{21} e^{-x^2t^2}dt = -F(x)$$
   Conclusion: $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est impaire}}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   Nous allons procéder au changement de variable C^1 $\quad u = xt$ $(du = xdt)$
$$F(x) = x.\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt = \int_x^{2x} e^{-u^2}du$$
   et l'on obtient directement le résultat demandé!
3. • Notons $f_1 : u \mapsto e^{-u^2}$.
   La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède des primitives sur cette intervalle.
   Notons F_1 l'une d'elles. (On a $F_1' = f_1$ et F_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$).
   D'après le **théorème fondamental du calcul intégral**,
$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F_1(2x) - F_1(x)$$
   Ainsi F est la différence de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$
   • On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2.F_1'(2x) - F_1(x) = 2.f_1(2x) - f_1(x) = 2.e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$
   F' est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux (la différence de deux fonctions C^∞ est encore de classe C^∞).
   On a donc bien $\boxed{F \text{ qui est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$
4. (a) Nous allons procéder par encadrement avec la **croissance de l'intégrale**.
   • Soit $x > 0$ fixé.
   On a
$$\forall t \in [x,2x], 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$
   et donc par croissance de l'intégrale
$$\int_x^{2x} 0.dt \leqslant \int_x^{2x} e^{-t^2}dt \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}dt$$
   càd
$$0 \leqslant F(x) \leqslant x.e^{-x^2}$$
   et ainsi par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{e^{-x}} = 0$, ce qui prouve bien que $F(x) =_{+\infty} (e^{-x})$

   • Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x.e^{-x^2} = 0$ d'après les **croissance comparées**, on en déduit par le **théorème des gendarmes** que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

   (b) D'après l'encadrement ci-dessus, on a pour tout $x > 0$
$$0 \leqslant \frac{F(x)}{e^{-x}} \leqslant x.e^{x-x^2}$$
   Toujours avec les croissances comparées, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x.e^{x-x^2} = 0$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{e^{-x}} = 0$ càd $\boxed{F(x) = o_{+\infty}(e^{-x})}$
5. Comme $\lim 2^n = +\infty$, on a d'après 4, $u_n = o(e^{-2^n})$.
   Posons $v_n = e^{-2^n}$, et montrons maintenant que $\sum v_n$ est une série convergente.
   On peut par exemple utiliser **la règle de D'Alembert**
   Comme
$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{e^{-2^{n+1}}}{e^{-2^n}} = e^{2^n-2^{n+1}} = {}^{2^n(1-2)} = e^{-2^n} \to 0 < 1$$
   On en déduit que $\sum v_n$ est ACV
   Ainsi $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ ACV donc par comparaison $\boxed{\sum u_n \text{ ACV}}$
6. (a) On a vu que
$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$
   (b) On a les équivalences suivantes
$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 2e^{-4x^2} = e^{-x^2} \\ &\Longleftrightarrow \ln 2 - 4x^2 = -x^2 \\ &\Longleftrightarrow \ln 2 = 3x^2 \\ &\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \end{aligned}$$
   (c) Comme F est impaire, il suffit de faire l'étude sur $[0, +\infty[$
   De même que ci-dessus, par équivalence, on a
$$F'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln 2 > 3x^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} > x$$
   On en déduit le tableau de variation ci-dessous

x	0		$\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$F'(x)$	0	+	0	-	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F(\sqrt{\frac{\ln 2}{3}})$	$\searrow$	0

7. Allure de la fonction F



8. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \int_0^x F(t)dt$

   (b) On sait que la fonction $F = G'$ est positive sur $[0, +\infty[$ d'après Q6c).
   On en déduit que G est croissante sur $[0, +\infty[$.
   Par le **théorème de la limite monotone**, on peut affirmer que G possède une limite(finie ou infinie) en $+\infty$

   (c) On reprend l'idée de la question Q4a) en faisant un encadrement plus fin

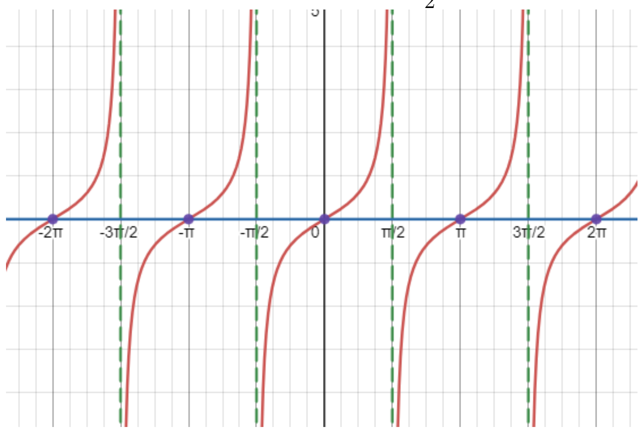
   - Soit $x > 0$ fixé.
   On a
   $$\forall t \in [x,2x], e^{-(2x)^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$
   et donc par croissance de l'intégrale
   $$\int_x^{2x} e^{-4x^2}dt \leqslant \int_x^{2x} e^{-t^2}dt \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}dt$$
   càd
   $$x.e^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant x.e^{-x^2}$$

   - Soit $X > 0$.
   On a par croissance de l'intégrale
   $$\int_0^X x.e^{-4x^2}dx \leqslant \int_0^X F(x)dx \leqslant \int_0^X x.e^{-x^2}dx$$
   càd
   $$\left[\frac{e^{-4x^2}}{8}\right]_0^X \leqslant G(X) \leqslant \left[\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^X$$
   cela donne
   $$\frac{1-e^{-4X^2}}{8} \leqslant G(X) \leqslant \frac{1-e^{-X^2}}{2}$$
   En passant à la limite quand $X \to +\infty$ cela nous donne le résultat demandé
   $$\frac{1}{8} \leqslant \lim_{X\to+\infty} G(X) \leqslant \frac{1}{2}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

1. La fonction arctan est la fonction réciproque de la **restriction** de la fonction tan à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

2. - La fonction tan est définie et C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$

   - tan est une fonction impaire et $\pi-$périodique
   - tan est C^∞ sur son ensemble de définition avec
   $$\forall x \in D,\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$

3. Nous allons utiliser le **théorème de la bijection**.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   - Considérons la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, +\frac{\pi}{2}+n\pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) - x \end{array}}$
   La fonction f est de classe C^∞ sur son ensemble de définition comme différence de deux fonctions de classe C^∞ et l'on a
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, +\frac{\pi}{2}+n\pi\right[, f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$
   Ainsi la fonction f' est toujours strictement positive sur son ennsemble de définition sauf en $n\pi$ où elle vaut 0.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, +\frac{\pi}{2}+n\pi\right[}$
   - On sait que
     - $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+}(f) = -\infty$ car $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} x = -\frac{\pi}{2} + n\pi$
     - $\lim_{x\to(+\frac{\pi}{2}+n\pi)^-}(f) = +\infty$ car $\lim_{x\to(+\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x\to(+\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} x = +\frac{\pi}{2} + n\pi$

- D'après le **théorème de la bijection**, comme la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,+\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ on peut affirmer que

  f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,+\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} f(x), \lim\limits_{x\to(+\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} f(x)\right[= \mathbb{R}$

  Ceci justifie qu'il existe un unique réel $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,+\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ tel que $f(x_n)=0$!

4. On sait que pour tout entier n on a

$$-\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$$

En divisant par $n\pi$ lorsque $n \geqslant 1$ cela donne

$$1-\frac{\pi}{2n\pi} < \frac{x_n}{n\pi} < 1+\frac{\pi}{2n\pi}$$

Comme de manière évidente on a $\lim(1-\frac{\pi}{2n\pi}) = \lim(1+\frac{\pi}{2n\pi}) = 1$,

on peut affirmer par le théorème de convergence par encadrement que $\lim \frac{x_n}{n\pi} = 1$, càd $\boxed{x_n \sim n\pi}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$

- On a $\tan x_n = x_n$, c'est à dire
$$\tan(y_n+n\pi) = y_n+n\pi$$
Comme la fonction tan est $\pi-$périodique on a donc
$$\tan y_n = y_n+n\pi$$
et donc
$$\arctan(\tan y_n) = \arctan(y_n+n\pi)$$
Mais attention à ne pas simplifier sans justification $\arctan(\tan(y_n))$***!***

- Comme $-\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$, on a
$$-\frac{\pi}{2} < x_n-n\pi = y_n < \frac{\pi}{2}$$
Et donc comme $y_n \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ on sait que $\arctan(\tan y_n) = y_n$.
Attention! Si y_n n'appartenait pas à cet intervalle on aurait pas eu cette égalité!
On en déduit bien l'égalité $\boxed{y_n = \arctan(y_n+n\pi)}$

- La suite (y_n) est une suite bornée (car à valeurs dans $]-\pi/2,+\pi/2[$) et la suite (x_n) tend vers $+\infty$ (car $x_n \sim n\pi$), on peut donc affirmer que $\lim y_n+n\pi = +\infty$.
Par **théorème de composition de limites**, on peut dire que $\lim \arctan(y_n+n\pi) = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Conclusion: on vient de montrer que } \lim y_n = \frac{\pi}{2}}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose $z_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$, càd $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$
Comme $x_n = z_n + n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $\tan x_n = x_n$ on a $\tan(n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n) = n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n$
Or $\tan(n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n) = \tan(\frac{\pi}{2}+z_n) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+z_n)}{\cos(\frac{\pi}{2}+z_n)} = -\dfrac{\cos(z_n)}{\sin(z_n)} = \dfrac{-1}{\tan(z_n)}$

Ainsi on a prouvé que $\dfrac{-1}{\tan z_n} = n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n$, soit de manière équivalente $\boxed{\tan z_n = \dfrac{-1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n}}$

Notons maintenant que $\lim z_n = \lim(y_n-\frac{\pi}{2}) = \lim(y_n) - \frac{\pi}{2} = 0$

- Comme $\tan x \underset{0}{\sim} x$ et que $\lim z_n = 0$ on a $\tan z_n \sim z_n$
- Comme $\lim n\pi = +\infty$ et que $\lim \frac{\pi}{2}+z_n = \frac{\pi}{2}$, on a $n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n \sim n\pi$
- On a donc d'aprèd l'encadré ci-dessus $\boxed{z_n \sim \dfrac{-1}{n\pi}}$
- Ce qui peut encore s'écrire $z_n = \dfrac{-1}{n\pi} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

  et donc en remplaçant: $\boxed{x_n = n\pi+\frac{\pi}{2}+z_n = n\pi+\frac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n\pi}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

CORRECTION DU PROBLEME

Partie I

1. $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(2a) = 2.\sin a.\cos a}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$
On va procéder par récurrence.
On note pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$: " $\sin x = 2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ "

- **initialisation:** $\mathcal{P}_1$ est vraie.
En effet d'après Q1 avec $a = \frac{x}{2}$
$$2^1.\sin\left(\frac{x}{2^1}\right).\prod_{k=1}^{1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2.\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right) \underbrace{=}_{Q1} \sin x$$

- **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé quelconque.
On a
$$\sin x = 2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
Or d'après Q1, on a
$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2.\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
ce qui donne par substitution dans l'égalité précédente
$$\begin{aligned}\sin x &= 2^n.2.\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\\ &= 2^{n+1}.\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\end{aligned}$$
on a montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \geqslant 1, \mathcal{P}_n$ est vraie

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Là encore, on va réaliser une récurrence(qui ressemble beaucoup à la précédente).
On note pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$: "$h\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$"
   - **initialisation:** $\mathcal{P}_1$ est vraie.
     En effet, d'après la définition de h on a
$$h(x) = h(\frac{x}{2}).\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
   - **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé quelconque.
     On sait que
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
     Or d'après la définition de h
$$h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
     ce qui donne par substitution
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\dots\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
     on a montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \geqslant 1, \mathcal{P}_n$ est vraie

4. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
En Q3, on a montré que
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
On a donc
$$h(x).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).h\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
En Q4, on a montré que
$$\sin x = 2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
On a donc
$$2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right).\sin x$$
En divisant par 2^n, on a bien le résultat voulu
5. Soit $x \neq 0$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n} = 0$.
Ainsi par composition de limites et par **continuité de la fonction** h **en** 0, on a
$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h(0) = 1$$
rem: il ne faut surtout pas oublier cet argument de continuité de h en 0

6. Soit $x \neq 0$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n} = 0$ on a pour n assez grand $-\pi < \frac{x}{2^n} < \pi$,
et donc en divisant l'égalité de Q4 par $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$, on obtient pour n assez grand
$$h(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\frac{1}{2^n}.h\left(\frac{x}{2^n}\right).\sin x$$
En prenant un équivalent quand $n \to \infty$
$$h(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{x}{2^n}}.\frac{1}{2^n}.1.\sin x = \frac{\sin x}{x}$$
Conclusion : $\boxed{\text{on a montré que } h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

$\boxed{\text{Partie II}}$

1. - On va déterminer un équivalent de v_n
     Comme $\lim \frac{\pi}{n+1} = 0$, on a
$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{2.(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
     Et comme $\ln(1+x) = x + o_0(x)$
$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) &= \ln\left(1 - \frac{\pi^2}{2.(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2.(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{\pi^2}{2.(n+1)^2} \sim -\frac{\pi^2}{2n^2} \end{aligned}$$
   - Comme $-\frac{\pi^2}{2n^2}$ est de signe stable(négatif) et que $\sum \frac{\pi^2}{2n^2}$ est une série convergente, on sait d'après **la règle des équivalents** que $\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$
2. (a) - On peut reconnaître déjà un **procédé télescopique**
$$\sum_{k=4}^{n}\{\ln R_k - \ln R_{k-1}\} = \ln R_n - \ln R_3$$
   - D'autre part, on a
$$\sum_{k=4}^{n}\{\ln R_k - \ln R_{k-1}\} = \sum_{k=4}^{n}\ln\frac{R_k}{R_{k-1}} = \sum_{k=4}^{n}\ln\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right) = \sum_{k=4}^{n} v_k$$
   (b) Notons S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 4} v_n$
   On a $S_n = \sum\limits_{k=4}^{n} v_k$
   A la question précédente, on a vu que $\ln R_n - \ln R_3 = S_n$ càd
$$\ln R_n = S_n + \ln 3$$

En Q1, on a montré que la série de terme général v_n converge, càd que la suite (S_n) possède une limite **finie**.
L'égalité ci-dessus permet d'affirmer que $\ln R_n$ possède alors une limite **finie**.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\ln R_n)_{n\geqslant 2} \text{ est convergente}}$

(c) Soit $N \geqslant 4$.

$$\begin{aligned}\prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) . \prod_{k=3}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) . \prod_{k=3}^{N-1} \frac{R_k}{R_{k-1}}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) . \frac{R_{N-1}}{R_2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) .R_{N-1} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) .e^{\ln R_{N-1}}\end{aligned}$$

Comme la suite $(\ln R_n)$ possède une limite finie, par **composition de limites** et parce que la fonction exp est **continue**, on peut affirmer que $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \text{ existe et est finie}}$

Partie III

1. (a) Quand $t \to 0$, on a avec un DL à l'ordre 1

$$f_n(t) = \frac{1-(1+(-t))^n}{t} = \frac{1-(1+n(-t)+o(t))}{t} = n + o(1) \to n$$

Conclusion: $\boxed{f_n \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f_n(0) = n}$

(b) Soit $t \neq 0$.
On a avec un DL à l'ordre 2

$$\begin{aligned}\frac{f_n(t)-f_n(0)}{t-0} &= \frac{1-(1-t)^n - nt}{t^2}\\ &= \frac{1-\left(1+n(-t)+\dfrac{n(n-1)}{2}(-t)^2+o(t^2)\right)-nt}{t^2}\\ &= -\frac{n(n-1)}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_n(t)-f_n(0)}{t-0} = -\frac{n(n-1)}{2} \text{ (limite finie)}$$

Conclusion: $\boxed{f_n \text{ dérivable en } 0 \text{ avec } f_n'(0) = -\frac{n(n+1)}{2}}$

2. $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$ pour $q \neq 1$ et $n \geqslant 1$

3. Soit $t \neq 0$.
Posons $q = 1 - t \neq 1$.
D'après l'égalité ci-dessus

$$\frac{1-(1-t)^n}{t} = \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k$$

4. (a) L'intégrale I_n est bien définie car la fonction f_n est **continue** sur le **segment** $[0,1]$.
En effet:
- f_n est continue en 0 d'après Q1(a)
- f_n est continue sur $]0,1]$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

(b)

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k dt \qquad \textit{par linéarité de l'intégrale}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textit{glissement d'indice}\end{aligned}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^1 \frac{t+n-n}{n(n+t)} dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} dt\\ &= \left[\frac{t}{n} - \ln(n+t)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n\end{aligned}$$

(b) deux possibilités ici

i. **première idée:**
On a

$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{t}{n(n+t)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0 dt \leqslant \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n^2} dt$$

càd

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison on a $\sum u_n$ CV

ii. **seconde idée:**

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$$

puis on conclut avec la règle des équivalents

(c) Notons:

i) T_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n

ii) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

On a

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \qquad \textit{procédé télescopique} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ &= w_n + \ln n - \ln(n+1) \\ &= w_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$w_n = T_n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\sum u_k$ est une série convergente d'après Q5b), on sait que (T_n) est une suite convergente.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, on en déduit que (w_n) est alors une suite convergente.

Conclusion : $\boxed{\exists\, \gamma \in \mathbb{R}\,,\ \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma}$