PT* 24/25 - DM 2
à rendre le vendredi 13 septembre

1 fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de f.
   (On pourra considérer $0 < x_1 < x_2$ *puis comparer* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$*)*
3. (a) Montrer que $\forall x > 0$, $\ln \dfrac{x+1}{x} \leqslant f(x) \leqslant e. \ln \dfrac{x+1}{x}$
   (b) En déduire les limites de f aux bornes de l'ensemble de défnition
4. (a) Justifier avec soin que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt = o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$
   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$
5. En utilisant le changement de variable $\theta = t + x$, justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$

2 suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k^2}$ et $g_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2}$

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4}-k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$
3. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$ en fonction de $x \in]0,1[$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de u_n

3 proba (méthode 14 du RDM proba)

Soit $q > 0$ et n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On sait que $X(\Omega) = [\![2,2n]\!]$ et que $\forall k \in [\![2,2n]\!], p_k = P(X = k) = a.q^k$

1. Déterminer la valeur de a
2. Déterminer la probabilité que X soit paire, càd que $X = 2$ ou $X = 4$ ou $\ldots$ ou $X = 2n$

fonction définie par une intégrale

1. Nous allons montrer que pour tout $x>0$ fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ existe bien.
   Soit $x>0$ fixé.
   La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{t+x}$ est définie et **continue** sur le **segment** [0,1 (en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas), on peut donc affirmer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ existe
   rem: il ne faut surtout pas considérer la fonction $x \mapsto \dfrac{e^t}{t+x}$
2. - **première idée.**
     Soit $0<x_1<x_2$.
     On a
     $$\forall t \in [0{,}1], 0<t+x_1<t+x_2$$
     comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a
     $$\forall t \in [0{,}1], \frac{1}{t+x_2}<\frac{1}{t+x_1}$$
     en multipliant par $e^t>0$ cela donne
     $$\forall t \in [0{,}1], \frac{e^t}{t+x_2}<\frac{e^t}{t+x_1}$$
     par **croissance de l'intégrale***
     $$\int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1}dt$$
     On a montré que
     $$(0<x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$$
     ‘
     Conclusion : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

     rem: quand on intègre une inégalité stricte, elle devient large*
   - **seconde idée.**
     Soit $0<x_1<x_2$.
     $$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2}dt - \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_1}dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t}{t+x_2} - \frac{e^t}{t+x_1}dt \qquad \textit{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (x_1-x_2).\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)}dt \end{aligned}$$
     Or
     $$\forall t \in [0{,}1], \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)} \geqslant 0$$
     d'où par positivité de l'intégrale
     $$\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x_1)(t+x_2)}dt \geqslant 0 \qquad \text{et ainsi} \qquad f(x_2)-f(x_1) \leqslant 0$$

On a montré que
$$(0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$$
‘

Conclusion : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

3. (a) Soit $x > 0$.
On a
$$\forall t \in [0,1], 1 \leqslant e^t \leqslant e$$
et ainsi
$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{e^t}{t+x} \leqslant \frac{e}{t+x}$$
Par croissance de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e}{t+x}dt = e.\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt$$
et comme
$$\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt = [\ln|t+x|]_0^1 = \ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x}$$
On a bien montré que
$$\ln\frac{x+1}{x} \leqslant f(x) \leqslant e.\ln\frac{x+1}{x}$$
(b) - On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{x+1}{x} = +\infty$, donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$,
donc par l'encadrement précédent on a $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

4. (a) - Nous allons montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = 0$
et pour cela on va commencer par encadrer l'intégrale pour 'l'évaluer'
- Soit $x > 0$
On a
$$\forall t \in [0,1], 0 \leqslant \frac{e^t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{e}{x^2}$$
et donc par croissance de l'intégrale
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{e}{x^2}dt = \frac{e}{x^2}$$
- On a donc pour tout $x > 0$
$$0 \leqslant x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \leqslant \frac{e}{x}$$
Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e}{x} = 0$, on en déduit que
$$\lim_{x\to +\infty} x.\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = 0$$
Ce qui signifie exactement que
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt}{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \text{càd} \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt = o(\frac{1}{x})$$

(b) Soit $x > 0$ fixé.

On réalise une intégration par parties en posant $\begin{cases} u'(t) & = e^t \\ v(t) & = \dfrac{1}{t+x} \end{cases}$ qui sont bien C^1.

Cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{e^t}{t+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}dt \\ &= \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} + o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(e-1)x}{x^2} = \frac{e-1}{x}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$$

5. Soit $x > 0$.
   - On commence par opérer le changement de variable affine proposé $\theta = t + x$ ($d\theta = dt$)

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{\theta - x}}{\theta} d\theta = e^{-x}.\underbrace{\int_x^{x+1} \frac{e^\theta}{\theta} d\theta}_{=K(x)} = e^{-x}.K(x) \qquad (*)$$

   - Notons $h : \theta \mapsto \dfrac{e^\theta}{\theta}$
     La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle. Notons H l'une d'elles. On a ainsi $H' = h$, et H est C^1 sur $]0, +\infty[$.
     On a
$$\forall x > 0, K(x) = H(x+1) - H(x)$$
     Ainsi la fonction K est aussi C^1 sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions C^1.
   - Avec $(*)$ on sait que f est un produit de fonctions C^1 donc f est C^1 sur $]0, +\infty[$, avec

$$\begin{aligned} f'(x) &== -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.K'(x) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.(H'(x+1) - H'(x)) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.(h'(x+1) - h'(x)) \\ &= -e^{-x}.K(x) + e^{-x}.\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}\right) \\ &= -f(x) + \frac{(e-1)x-1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{(e-1)x-1}{x(x+1)} - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt}$

rem: on a prouvé que f vérifie l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = \dfrac{(e-1)x-1}{x(x+1)}$

suite définie implicitement

1. On va bien sûr utiliser le théorème de la bijection
   - La fonction f_n est C^∞ sur l'intervalle $]0,1[$ comme somme de fonctions c^∞, avec

$$\forall x \in]0,1[, f_n'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k^2)^2} < 0$$

   - Ainsi la fonction f_n est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]0,1[$, f_n réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]\lim_{x\to 1^-} f_n(x), \lim_{x\to 0^+} f_n(x)[=]-\infty, +\infty[$

     Ceci permet d'affirmer que $\exists !\, u_n \in]0,1[, f_n(u_n) = 0$

x	0	u_n	1
$f_n'(x)$		-	
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

   - *Quelques précisions qui aident à la compréhension:*
     - $f_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x-k^2} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x-1^2} + \dfrac{1}{x-2^2} + \dfrac{1}{x-3^2} + \cdots + + \dfrac{1}{x-n^2}$
     - *Sous cette forme étendue il est clair qye $f_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,1[$. (L'ensemble de définition complet serait $\mathbb{R} - \{0,1^2,2^2,\ldots,n^2\}$)*
     - *Sous cette forme, l'obtention des limites en 0^+ et en 1^- est claire aussi*

2. i) On peut par exemple reconnaître un procédé télescopique.
   - La décomposition en éléments simples donnent

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - X^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2} - X)(\frac{1}{2} + X)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - X} + \frac{1}{\frac{1}{2} + X} = \frac{1}{X + \frac{1}{2}} - \frac{1}{X - \frac{1}{2}}$$

   et ainsi, avec $n \geqslant 1$ fixé

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

   Dans la seconde somme, on fait le glissement d'indice $k \longleftarrow k-1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1) - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{-4n}{2n+1}\end{aligned}$$

ii) On peut par exemple procédé par récurrence

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$: " $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$ "

- **initialisation:**
  On a $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3} = -\frac{4.1}{2.1+1}$
  ce qui prouve que $\mathcal{P}_1$ est vraie
- **hérédité:**
  On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} + \frac{1}{\frac{1}{4} - (n+1)^2} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{1-(2n+2)^2} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} + \frac{4}{(1-(2n+2))(1+(2n+2))} \\
&= -\frac{4n}{2n+1} 6 \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4.\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= -4\frac{n+1}{2n+3} = -4\frac{n+1}{2(n+1)+1}
\end{aligned}$$

  et l'on prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **conclusion:**
  Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$

3. Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
f_n(x) - g_n(x) &= \left(\frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k^2}\right) - \left(\frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x-k^2} - \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{4} - x}{(x-k^2)(\frac{1}{4} - k^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4} - x\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k^2)(\frac{1}{4} - k^2)}
\end{aligned}$$

Or

$$\forall k \in [\![1,n]\!], x - k^2 < 0 \text{ et } \frac{1}{4} - k^2 < 0$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k^2)(\frac{1}{4} - k^2)} > 0$$

Conclusion : $\boxed{sg(f_n(x) - g_n(x) = sg(\frac{1}{4} - x)}$

x	0		$\frac{1}{4}$		1
signe de $f_n(x) - g_n(x)$		$+$	0	$-$	
comparaison		$f_n(x) > g_n(x)$;	0	$g_n(x) > f_n(x)$;	

4. • Comme f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$,
pour montrer que $\frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$ **il suffit de montrer que** $f_n(\frac{1}{4}) \geqslant f_n(u_n) \geqslant f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$
càd prouver que $f_n(\frac{1}{4}) > 0$ **et** $f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) < 0$

x	$\frac{1}{4}$	u_n	$\frac{1}{4} + \frac{1}{n}$
$f_n(x)$	$f_n(\frac{1}{4})$	0	$f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(\frac{1}{4}) = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} > 0$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{4}$, on sait d'après Q3. que

$$f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) \leqslant g_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n})$$

Or

$$g_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2.\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right)} - \frac{4n}{2n+1} = \frac{-14n}{(n+4)(2n+1)}$$

et il est clair que pour $n \geqslant 1$, on a $\frac{-14n}{(n+4)(2n+1)} < 0$

On a donc bien $f_n(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) < 0$

• Conlusion: $\boxed{\forall n \geqslant 1, \frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{n}}$

• Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de prouver que $\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{4}$

proba

1. On aura défini une distribution de probabilité sur Ω ssi

   i) $\forall k \in \Omega, p_k \geqslant 0$

   ii) $\sum_{k=2}^{2n} p_k = 1$

   • Il est déjà clair que i) est trivialement vérifié.

- Pour le ii), il faut envisager deux cas
  (a) **cas** $q = 1$**.**
  On a alors
$$\sum_{k=2}^{2n} p_k = \sum_{k=2}^{2n} a = (2n-1).a$$
  et ainsi $\boxed{a = \frac{1}{2n-1}}$
  (b) **cas** $q \neq 1$**.**
  On a alors
$$\sum_{k=2}^{2n} p_k = a.\sum_{k=2}^{2n} q^k = a.q^2.\sum_{k=2}^{2n} q^{k-2} = a.q^2.\sum_{i=0}^{2n-2} q^i = a.q^2.\frac{1-q^{2n-1}}{1-q} = a.\frac{q^2-q^{2n+1}}{1-q}$$
  et ainsi $\boxed{a = \frac{1-q}{q^2-q^{2n+1}}}$

2. Notons A l'vénement "X est paire"
On a $A = (X_2) \cup (X=4) \cup \cdots \cup (X=2n) = \bigcup_{k=1}^{n} (X=2k)$
et ainsi
$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} p_{2k}$$
On redistingue nos 2 cas
(a) **cas** $q = 1$
$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} p_{2k} = \sum_{k=1}^{n} a = n.a = \frac{n}{2n-1}$$
(b) **cas** $q \neq 1$
$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=1}^{n} p_{2k} \\
&= a.\sum_{k=1}^{n} q^{2k} \\
&= a.\sum_{k=1}^{n} (q^2)^k \\
&= a.\left(\sum_{k=0}^{n} (q^2)^k - 1\right) \\
&= a.\left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2} - 1\right) \\
&= a.\frac{q^2-q^{2n+2}}{1-q^2} \\
&= \frac{q^2-q^{2n+2}}{(1+q)(q^2-q^{2n+1})} \\
&= \frac{1-q^{2n}}{(1+q)(1-q^{2n-1})}
\end{aligned}$$