PT* 24/25 - DM 3
à rendre le vendredi 27 septembre

Méthode des sécantes parallèles

préambule:
Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$ *possède une unique solution sur* $]1,2[$

Dans la suite de cet exercice, on note x_0 cette solution.

On souhaite déterminer une valeur approchée de x_0.

Pour cela on utilise la méthode des sécantes parallèles.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 2x + 3$

1. La tangente en $A(1,1)$ à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_1.
   On note $C_1(c_1,f(c_1)) \in \mathcal{C}$.
   La parallèle à la tangente précédente passant par C_1 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_2.
   Soit $C_2(c_2,f(c_2)) \in \mathcal{C}$.
   La parallèle aux tangentes précédentes passant par C_2 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse c_3.
   Soit $C_3(c_3,f(c_3)) \in \mathcal{C}$.
   ...
   En poursuivant ainsi la construction on définit une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Faire un dessin pour illustrer cette méthode
   (b) Montrer que $c_1 = \dfrac{6}{5}$, puis prouver que $\forall n \geqslant 1, c_{n+1} = \dfrac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5}$
2. (a) En étudiant la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{5}(x^3 - 5x^2 + 7x + 3)$,
   justifier que pour tout $n \geqslant 0$ on a $|g(c_{n+1}) - g(x_0)| \leqslant \dfrac{4}{15}.|g(c_n) - g(x_0)|$
   (on montrera que l'on peut poser $c_0 = 1$*)*
   (b) Puis en déduire que $\forall n \geqslant 0, |c_n - x_0| \leqslant \left(\dfrac{4}{15}\right)^n |c_0 - x_0|$
3. Prouver que (c_n) converge vers x_0, et donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-7} près en expliquant comment vous procédez
4. La série de terme général c_n est-elle convergente?
5. Existe-t-il un réel α tel que la série de terme général $c_n - \alpha$ soit convergente? Justifier

Valeur approchée de la somme d'une série

On pose pour tout $n \geqslant 1, v_n = (-1)^n.\dfrac{3n+2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est une série convergente
2. On note R_n le reste de cette série numérique.
   (a) Justifier que $\forall n \geqslant 1, |R_n| \leqslant \dfrac{3n+5}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$
   (b) En déduire une valeur approchée de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ à 10^{-2} près

Méthode des sécantes parallèles

préambule

- On va bien sûr utiliser le théorème de la bijection:
  Pour cela, on étudie la fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 2x + 3$ sur l'intervalle $I =]1{,}2[$
  - La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc C^∞ sur I
  $$\forall x \in I,, f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$
  On trouve comme racines
  $$x_1 = \frac{5-\sqrt{19}}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{19}}{3}$$
  - On remarque que
  $$x_1 = \frac{5-\sqrt{19}}{3} < \frac{5-\sqrt{16}}{3} = \frac{1}{3}$$
  $$x_2 = \frac{5+\sqrt{19}}{3} > \frac{5+\sqrt{16}}{3} = 3$$

x	$-\infty$		x_1		1		2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0			$-$			0	$+$	

  On a ainsi $f'(x) < 0$ sur $I =]1{,}2[$
  - f est **continue** et **strictement décroissante** sur I donc, d'après le **théorème de la bijection**, f réalise une bijection de $I =]1{,}2[$ sur $]f(2), f(1)[=]-5{,}1[$.
  Comme $0 \in]-5{,}1[$ on peut affirmer $\exists!\, x_0 \in]1{,}2[, f(x_0) = 0$

1. (a)

   (b)
   - La droite tangente à l'arc $\mathcal{C}_f$ au point $A(1{,}1)$ a pour équation
   $$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
   après calcul cela donne
   $$y = -5x + 6$$
   - L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(6/5{,}0)$, on a donc $\boxed{c_1 = 6/5}$
   - Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
   Déterminons l'équation de la parallèle à cette tangente au point $C_n(c_n, f(c_n))$.
   Son coefficient directeur étant -5, l'équation de la droite est
   $$y = -5.(x - c_n) + f(c_n)$$
   soit après calculs
   $$y = -5x + c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3$$
   - L'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est donnée par le système
   $$\begin{cases} y &= -5x + c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3 \\ y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5} \\ y &= 0 \end{cases}$$
   Ceci prouve que $\boxed{c_{n+1} = \dfrac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5}}$
   - *On peut remarquer qu'en posant $c_0 = 1$, la formule précédente, qui a priori n'est valable que pour $n \geqslant 1$, donne $c_1 = 6/5$.*
   Ainsi, nous allons étudier la suite définie par $c_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, c_{n+1} = \dfrac{c_n^3 - 5c_n^2 + 7c_n + 3}{5}$

2. (a) • La fonction g est une fonction polynomiale, c'est donc une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 - 10x + 7) \text{ et } g''(x) = \frac{6}{5}(x - \frac{5}{3})$$

• Sur l'intervalle $[1\,,2]$, g'' est négative sur $[1{,}5/3]$ et positive sur $[5/3\,,2]$.
La fonction g' est donc décroissante sur $[1\,,5/3]$ et croissante sur $[5/3\,,2]$: la fonction g' possède donc un minimun en $5/3$ (le calcul donne $g'(5/3) = -4/15$).

x	1	$5/3$	2
$g''(x)$	$-$	0	$+$
g'	0 ↘	$-\frac{4}{15}$ ↗	$-\frac{1}{5}$

Comme $g'(1) = 0$ et $g'(2) = -1/5$, on a donc g' qui est négative sur $[1{,}2]$, ce qui nous permet bien d'affirmer au total que

$$\boxed{\forall x \in [1{,}2], |g'(x)| \leqslant 4/15}$$

• Profitons-en pour remarquer que g étant continue et décroissante sur $[1{,}2]$,
on a $g([1{,}2]) = [g(2){,}g(1)] = [1\,,6/5] \subset [1{,}2]$

ce qui prouve que $\boxed{[1{,}2] \text{ est un intervalle stable par } g}$

• Comme $c_0 = 1 \in [1{,}2]$, on peut affirmer que

tous les termes de suites (c_n) sont dans l'intervalle $[1{,}2]$.

cette remarque sera utile dans la suite car nous appliquerons l'inégalité des accroissements finis su l'intervalle $[1{,}2]$

• Le calcul donne $g(x_0) = x_0$

• Appliquons **l'inégalité des accroissements finis**:
on peut affirmer que

$$\forall (x{,}y) \in [1{,}2]^2, |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{4}{15}|x - y|$$

Soit $n \geqslant 0$.
Pour $x = c_{n+1}$ et $y = x_0$, cela donne

$$|g(c_{n+1}) - g(x_0)| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_{n+1} - x_0|$$

ce qui peut encore s'écrire

$$|g(c_{n+1}) - g(x_0)| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|g(c_n) - g(x_0)|$$

rem: on a bien montré ce qui était demandé... cependant il était plus utile de poser $x = c_n$ et $y = x_0$, ce qui donnait

$$\forall n \geqslant 0, |c_{n+1} - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_n - x_0|$$

alors que l'énoncé tel que posé donne seulement

$$\forall n \geqslant 1, |c_{n+1} - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_n - x_0|$$

On continue de traiter le sujet comme il avait été donné

(b) On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: " $|c_n - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right)^n |c_0 - x_0|$ "

- **initialisation**
  - $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
  - montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie également.
    On utilise l'IAF présentée plus haut avec $x = c_0$ et $y = x_0$, cela donne
    $$|g(c_0) - g(x_0)| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_0 - x_0|$$
    càd
    $$|c_1 - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_0 - x_0|$$
- **hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé quelconque.
  C'est à dire que l'on a
  $$|c_n - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right)^n |c_0 - x_0|$$
  Or on a montré à la question que pour $n \geqslant 1$, on a
  $$|c_{n+1} - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).|c_n - x_0|$$
  et ainsi
  $$|c_{n+1} - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right).\left(\frac{4}{15}\right)^n.|c_0 - x_0| = \left(\frac{4}{15}\right)^{n+1}.|c_0 - x_0|$$
  ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
- conclusion: $\boxed{\text{par récurrence on a montré que } \forall n \geqslant 0, |c_n - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right)^n |c_0 - x_0|}$

3.
- Comme $|4/15| < 1$, on peut affirmer que $\lim(4/15)^n = 0$.
  L'inégalité précédente donne alors $\boxed{\lim c_n = x_0}$
- On commence par remarquer que $|c_0 - x_0| = |1 - x_0| \leqslant 1$ car $x_0 \in [1,2]$, on a donc
  $$|c_n - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right)^n$$
- L'inégalité précédente signifie que c_n *est une valeur approchée de* x_0 *avec une précision inférieure ou égale à* $\left(\frac{4}{15}\right)^n$.
  Ainsi, si l'on veut être sûrs que c_n soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-7} près, il suffit de choisir n tel que $\left(\frac{4}{15}\right)^n \leqslant 10^{-7}$
- On résout cette inégalité, en prenant le *ln*, puis en divisant par $\ln(4/15) < 0$, cela donne
  $$n \geqslant -\frac{7\ln 10}{\ln(4/15)} \simeq 12{,}2$$
  Ainsi, le premier terme de la suite c_n pour lequel on est sûrs d'obtenir une valeur approchée à 10^{-7} près de x_0 est c_{13}

4. Comme $\lim c_n = x_0 \neq 0$ la série de terme général est grossièrement divergente

5. On a vu que
$$\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |c_n - x_0| \leqslant \left(\frac{4}{15}\right)^n |c_0 - x_0| = v_n$$
Comme la série de terme général v_n est un série géométrique de raison $q = \frac{4}{15}$ avec $\left|\frac{4}{15}\right| < 1$, on sait que $\sum v_n$ converge et donc par comparaison $\sum |c_n - x_0|$ converge.

On vient de montrer que la série $\sum c_n - x_0$ est ACV.

Il existe bien un réel qui répond à la question, c'est $\alpha = x_0$

Valeur approchée de la somme d'une série

1. On a
$$v_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n.\frac{3n}{n^3} = \frac{3.(-1)^n}{n^2}$$
Comme $\sum \frac{3.(-1)^n}{n^2}$ est une série $\boxed{\text{ACV}}^*$, par comparaison, on peut affirmer que $\sum v_n$ est ACV
**: ne surtout pas se contenter d'écrire CV, car le signe N'est PAS stable*
autre remarque: pour Q1 il était préférable de répondre ainsi plutôt que d'utiliser le critère spécial...

2. Ici, il fallait penser au critère spécial de convergence des séries alternées!
   (a) Notons $f : t \mapsto \frac{3t+2}{t^3+3t^2+2t}$
   - On a pour tout $n \geqslant 1, v_n = (-1)^n.f(n)$ avec $f(n) > 0$.
     Donc $\sum v_n$ est une série alternée!
   - La fonction f est bien clairement définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ avec
     $$f'(t) = -\frac{6t^3+15t^2+12t+4}{(t^3+3t^2+2t)^2)} < 0$$
     Ainsi la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$
     ce qui permet d'affirmer que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est décroissante.
   - Comme $f(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$ on a $\lim f(n) = 0$
   - On a montré que la suite $(|v_n|) = (f(n))$ est une suite décroissante qui tend vers 0, ce qui prouve que $\sum v_n$ vérifie le critère spécial.
     On sait alors que
     $$|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = \frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$$

   (b) Pour déterminer une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ il suffit de déterminer un n tel que
   $$|R_n| \leqslant \frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leqslant 10^{-2}$$
   Pour cela je propose 2 idées:
   - **première idée:**
     On essaie différente valeur de n et on calcule $\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$.
     On trouve que la première à passer sous les 10^{-2} c'est $n = 15$
     Conclusion $S_{15} = \sum_{k=1}^{15} v_k$ est une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ à 10^{-2} près
   - **seconde idée:**
     On cherche au préalable une majoration de $\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6}$
     On a clairement par minoration du dénominateur
     $$\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leqslant \frac{3n+5}{n^3}$$
     et aussi par majoration du numérateur pour $n \geqslant 5$
     $$\frac{3n+5}{n^3+6n^2+11n+6} \leqslant \frac{3n+5}{n^3} \leqslant \frac{3n+n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$$
     Ainsi pour avoir une v.a. à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que
     $$\frac{4}{n^2} \leqslant 10^{-2}$$
     cela donne $n \geqslant 20$
     rem: on constate, sans surprise, qu'en ayant fait une majoration intermédiaire, on est obligé de calculer davantage de termes pour être sûr d'obtenir au final la même précision