PT* 24/25 - DM 1
à rendre le vendredi 6 septembre

1 suite définie par une intégrale

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$ et $v_n = \displaystyle\int_1^3 (\ln(1+t))^n dt$

1. Montrer que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminer la valeur de la limite
2. Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que $(n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n$
3. Déterminer un équivalent (simple) de u_n
4. Montrer que $\lim v_n = +\infty$

2 calcul d'une intégrale

Dans cet exercice,$[a,b]$ est un segment fixé.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall t \in [a,b], f(a+b-t) = f(t)$

1. Donner l'interprétation géométrique de cette condition
   (on indiquera que $\mathcal{C}_f$ possède un axe de symétrie de que l'on précisera)
2. Montrer que : $\forall t \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b t.f(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$
3. En déduite $\displaystyle\int_0^\pi t.\sin^3(t).dt$

3 distribution de probabilités (méthode 7 du RDM proba)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'univers $\Omega = [\![1,2N]\!] = \{1,2,3,4,\ldots,2N\}$.
On note pour tout $k \in \Omega, P(\{\frac{1}{k}\}) = p_k = \frac{1}{N}.\left|1 - \frac{k}{N}\right|$.
On note A l'événement "être un nombre pair"

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une *distribution de probabilité* sur Ω
2. Montrer que $P(A) = \dfrac{N + 2qN - 2q - 2q^2}{N^2}$ où $q = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$

suite définie par une intégrale

1. - Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Nous allons utiliser la **croissance de l'intégrale**.
   Comme
   $$\forall t \in [0{,}1], 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2 < 1 \qquad (*)$$
   On a
   $$\forall t \in [0{,}1], (\ln(1+t))^{n+1} \leqslant (\ln(1+t))^n$$
   et donc par croissance de l'intégrale
   $$\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$$
   càd
   $$u_{n+1} \leqslant u_n$$
   Conclusion $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Comme la fonction $x \mapsto x^n$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a d'après (*)
   $$\forall t \in [0{,}1], 0 \leqslant (\ln(1+t))^n \leqslant (\ln 2)^n$$
   ce qui donne par croissance de l'intégrale
   $$\int_0^1 0.dt \leqslant \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln 2)^n dt$$
   càd
   $$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$
   Comme $\ln 2 \simeq 0{,}67$ on a $\lim (\ln 2)^n = 0$.
   Le **théorème des gendarmes** permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = 0}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$
   - On réalise une intégration par parties sur u_{n+1}
   On pose $\begin{cases} u(t) & = (\ln(1+t))^{n+1} \\ v(t) & = t+1 \qquad (\textit{petite astuce!}) \end{cases}$ qui sont bien C^1 sur $[0{,}1]$.
   Cela donne
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= [(t+1).(\ln(1+t))^n]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (t+1)\frac{1}{1+t}(\ln(1+t))^n dt \\ &= 2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \end{aligned}$$
   - Nous allons prouver l'encadrement demandé.
     - Comme la suite (u_n) est décroissante, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ ce qui donne
     $$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \leqslant u_n$$
     et déjà
     $$2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n$$
     - On a vu en Q1 que la suite (u_n) était positive, on a donc
     $$u_{n+1} \geqslant 0$$
     càd
     $$2.(\ln 2)^{n+1} - (n+1).u_n \geqslant 0$$
     ce qui donne
     $$(n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1}$$

- Au final, on a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1).u_n \leqslant 2.(\ln 2)^{n+1} \leqslant (n+2).u_n}$

3. - On utilise le point 4 de la méthode 6 sur les équivalents
   - On a $(n+1).u_n \sim n.u_n$ et $(n+2).u_n \sim n.u_n$
     ce qui permet d'écrire avec l'encadrement de $Q2$
     $$n.u_n \sim 2(\ln 2)^{n+1}$$
     et ainsi
     $$u_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$$

4. Cette question est plus délicate car on est obligé de décomposer l'intervalle d'intégration par la relation de Chasles
   - Soit $n \in \mathbb{N}$
     $$v_n = \underbrace{\int_1^2 (\ln(1+t))^n dt}_{=x_n} + \underbrace{\int_2^3 (\ln(1+t))^n dt}_{=y_n}$$
   - La fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est positive sur [1,2], on a donc par positivité de l'intégrale
     $$x_n = \int_1^2 (\ln(1+t))^n dt \geqslant 0$$
     ce qui prouve que
     $$v_n \geqslant y_n$$
     Il suffit donc maintenant de montrer que $\lim y_n = +\infty$ pour conclure
   - On reprend la même idée de croissance de l'intégrale (de manière plus rapide)
     Comme
     $$\forall t \in [2{,}3], (\ln(1+t))^n \geqslant (\ln 3)^n$$
     On a
     $$y_n = \int_2^3 (\ln(1+t))^n dt \geqslant \int_2^3 (\ln 3)^n dt = (\ln 3)^n$$
   - On vient de montrer que
     $$\forall n \geqslant 0, v_n \geqslant (\ln 3)^n$$
     Comme $\ln 3 > \ln e = 1$, on a $\lim(\ln 3)^n = +\infty$,
     ce qui permet d'affirmer que
     $$\lim v_n = +\infty$$

calcul d'une intégrale

1. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$
2. On commence par utiliser l'égalité donnée
   $$I = \int_a^b t.f(t).dt = \int_a^b t.f(a+b-t).dt$$
   Dans cette seconde intégrale, on effectue le changement de variable affine $\theta = a+b-t$ (et ainsi $d\theta = -dt$.)

Cela donne

$$\begin{aligned}\int_a^b t.f(a+b-t).dt &= -\int_b^a (a+b-\theta).f(\theta).d\theta \\ &= \int_a^b (a+b-\theta).f(\theta).d\theta \\ &= (a+b)\int_a^b f(\theta)d\theta - \underbrace{\int_a^b \theta.f(\theta).d\theta}_{=I}\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$I = (a+b)\int_a^b f(\theta)d\theta - I$$

càd

$$I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(\theta)d\theta$$

3. • Notons $f : t \mapsto \sin^3(t)$
   On commence par vérifier que c'est bien une application possible de cet exercice

$$\forall t \in [0,\pi], f(0+\pi-t) = \sin^3(\pi-t) = (\sin t)^3 = f(t)$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t.\sin^3(t)dt &= \frac{0+\pi}{2}.\int_0^\pi \sin^3(t).dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin(t).\sin^2 t.dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin(t).(1-\cos^2 t).dt \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi \sin(t) - \sin(t).\cos^2 t).dt\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}.\cos^3 t\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

   rem: il était aussi possible de linéariser $\sin^3(t)$*:*

$$\sin^3(t) = \frac{3}{4}.\sin(t) - \frac{1}{4}.\sin(3t)$$

distribution de probabilités

1. On aura défini une distribution de probabilité sur Ω ssi
   i) $\forall k \in \Omega, p_k \geqslant 0$
   ii) $\sum_{k=1}^{2N} p_k = 1$

   • Il est déjà clair que i) est trivialement vérifié.

- Notons $q = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$
  On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N} \left|1 - \frac{k}{N}\right| &= \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) + \sum_{k=N+1}^{2N} \left(\frac{k}{N} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N} \underbrace{(N-k)}_{=i} + \sum_{k=N+1}^{2N} \underbrace{k-N}_{=i} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} i + \sum_{i=1}^{N} i \right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{(N-1).N}{2} + \frac{N.(N+1)}{2} \right) \\
&= N
\end{aligned}$$

  et donc

$$\sum_{k=1}^{2N} p_k = \frac{1}{N} . \sum_{k=1}^{2N} \left|1 - \frac{k}{N}\right| = \frac{1}{N}.N = 1$$

2. - $A = \{2,4,6,\ldots,2N\} = \{2k \,|\, k \in [\![1,N]\!]\}$
     et ainsi

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} p_{2k}$$

   - On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \left|1 - \frac{2k}{N}\right| &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}} \left(1 - \frac{2k}{N}\right) + \sum_{\frac{N}{2} < k \leqslant N} \left(\frac{2k}{N} - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{2k}{N}\right) + \sum_{k=q+1}^{N} \left(\frac{2k}{N} - 1\right)
\end{aligned}$$

     avec

$$\sum_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{2k}{N}\right) = \sum_{k=1}^{q} 1 - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{q} k = q - \frac{2}{N} . \frac{q(q+1)}{2} = \frac{q(N-q-1)}{N}$$

     et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{N} \left(\frac{2k}{N} - 1\right) &= \frac{2}{N} . \sum_{k=q+1}^{N} k - \sum_{k=q+1}^{N} 1 \\
&= \frac{2}{N} \left(\sum_{k=1}^{N} k - \sum_{k=1}^{q} k \right) - (N-q) \\
&= \frac{2}{N} \left(\frac{N(N+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} \right) - (N-q) \\
&= \frac{(N-q)(q+1)}{N}
\end{aligned}$$

     Au final, cela donne

$$P(A) = \frac{1}{N} . \frac{q(N-q-1)}{N} + \frac{1}{N} . \frac{(N-q)(q+1)}{N} = \frac{N + 2qN - 2q - 2q^2}{N^2}$$