DS 5 du 5 février 2024

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**
- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**
- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**
- CONSIGNES:
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée: bleue ou noire
  - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit
  - Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illuster, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.
  - Le sujet est composé de 2 exercices et 2 problèmes, complètement indépendants.

EXERCICE 1:

Dans cet exercice, on note $O_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre 3.

On considère la matrice $A = k.\begin{pmatrix} -2 & 2 & b \\ 2 & a & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ où (a,b,k) sont trois réels.

1. Déterminer tous les triplets (a,b,k) pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$
2. Dans cette question on suppose que $(a,b,k) = (1,-1,\frac{1}{3})$.
   On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A
   (a) Justifier que f est une rotation de $\mathbb{R}^3$
   (b) Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation
   (c) Dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+y=0$.
      i. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$, l'image de $\mathcal{P}$ par la rotation f.
      ii. Indiquer l'angle entre les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

PROBLEME 1

$\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

a désigne un réel strictement positif fixé

On considère les droites D et D' définies respectivement par les équations

$$D \begin{cases} x-y &= 0 \\ z+a &= 0 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x+y &= 0 \\ z-a &= 0 \end{cases}$$

On note S la surface définie comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ équidistants de D et D'

Préliminaire:

Démontrer que la distance entre le point M et la droite Δ (droite définie comme passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}$) est donnée par la formule $d(M,\Delta) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\delta}||}{||\overrightarrow{\delta}||}$

Etude de la surface S

1. Vérifier qu' une équation cartésienne de S est $xy - 2az = 0$
2. Montrer que l'axe (Oz) est un axe de symétrie de S.
   Déterminer 3 autres symétries évidentes qui laissent globalement invariante S
3. Etudier l'intersection de S avec le plan d'équation $y = h$ où $h \in \mathbb{R}$.
   Représenter les cas $h = 0$ et $h = a$
4. Etudier l'intersection de S avec le plan d'équation $z = h$ où $h \in \mathbb{R}$.
   Représenter les cas $h = 0$ et $h = \frac{1}{a}$
5. Etudier la régularité de la surface S.
   En un point régulier $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S, écrire l'équation cartésienne du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ à S.
6. (a) Montrer que S admet pour représentation paramétrique $(\mathbb{R}^2,f)$ avec

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,2.a.v,u.v) \end{array}}$$

   (b) Justifier que la surface S est une surface réglée.
   (c) Existe-t-il deux points d'une même génératrice en lesquels le plan tangent est identique?
   Le plan tangent est-il le même le long d'une même génératrice?

PROBLEME 2

Les 3 parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles

Partie I : étude d'un exemple

Soit $n \geqslant 3$ un entier.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on note $< P,Q >= \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.

On considère également l'endomorphisme f par $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \quad E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & 2X.P'(X) + (X^2-1).P^{(2)}(X) \end{array}}$

où $P^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de P

1. Montrer que $< \, , \, >$ définit un produit scalaire sur E.
   On considérera dorénavant l'espace euclidien $(E, < \, , \, >)$ et on notera $||.||$ la norme associée.

2. (a) Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $< f(P),Q >=< P,f(Q) >$

   (b) En déduire que si P_1 et P_2 sont deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors P_1 et P_2 sont orthogonaux

3. (a) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$

   (b) Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $||X^3 - P|| \geqslant ||X^3 - \frac{3}{5}X|| > 0$

4. f est-il une isométrie vectorielle?

Partie II

Soit $(E, < \, , \, >)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et f un endomorphisme de E.

1. On suppose qu'il existe deux endomorphismes g et h tels que $\forall (x,y) \in E^2$, $< x,g(y) >=< x,h(y) >$.
   Montrer que $g = h$

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
   On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et f^* l'endomorphisme défini par $A^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$.
   Montrer que $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \; < f(x),y >=< x,f^*(y) >}$

3. Montrer que $\ker(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$

4. Montrer que $A^T.A$ est une matrice diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles positives.

5. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E , constituée de vecteurs propres de $f^* \circ f$, telle que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit une famille orthogonale

Partie III: seule la Q2 de la partie II sera utilisée

Soit $(E, < \, , \, >)$ un espace euclidien, et f un endomorphisme de E.

Soit $n \neq 0$ un vecteur de E. On note $D = \mathrm{vect}(n)$ et $H = D^\perp$.

On souhaite montrer l'équivalence suivante:

$$H \text{ est un sev stable par } f \iff n \text{ est vecteur propre de } f^*$$

1. Donner $\dim H$ et $\dim D$

2. On suppose dans cette question que H est stable par f, c'est à dire que $\forall z \in H, f(z) \in H$
   (a) Justifier qu'il existe un unique $(\lambda,z) \in \mathbb{R} \times H$ tel que $f^*(n) = \lambda.n + z$
   (b) En considérant $< z,f^*(n) >$ montrer que $z = 0$
   (c) Conclure

3. On suppose dans cette question que n est un vecteur propre de f^*. On note λ la valeur propre associée.
   (a) Montrer que pour tout $z \in H$, on a $< z,f^*(n) >= 0$.
   (b) Conclure

4. Application:

   On considère f l'endomorphisme canoniquement associé á $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les plans stables par f

Exercice 2

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la conique Γ d'équation cartésienne

$$4x^2 + 4y^2 + 8xy - \sqrt{2}.(5x + 3y) = 0$$

Déterminer la nature de Γ, et la représenter.
(On précisera sommet et axe de symétrie de la conique dans le repère initial)

CORRECTION DE L'EXERCICE 1

1. On sait que $A \in O_3(\mathbb{R}) \iff A^T.A = I_3$.
   Ce qui donne le système

$$\begin{cases} 9k^2 & = 1 \\ k^2(a^2+8) & = 1 \\ k^2(b^2+8) & = 1 \\ 2a-2 & = 0 \\ -2b-2 & = 0 \\ 2b-2a+4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -1 \\ k^2 & = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

   Conclusion: $\boxed{\text{il y a deux triplets solutions } (1,-1,\frac{1}{3}) \text{ et } (1,-1,\frac{-1}{3})}$

2. (a) Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$, on sait déjà que f est une isométrie vectorielle (car sa matrice dans une bon est une matrice orthogonale.
   Pour justifier que f est une rotation, on peut au choix
   i) soit calculer $\det(f) = \det(A)$ et vérifier que $\det(f) = 1$
   ii) soit déterminer l'ensemble des vecteurs invariants, et vérifier qu'il s'agit d'une droite vectorielle
   iii) soit vérifier que la famille des vecteurs colonnes de A est une famille orthonormée directe, càd vérifier que $C_3 = C_1 \wedge C_2$ (car on sait déjà que c'est une famille orthonormée)

   Ici, je suggère la deuxième méthode car on nous demande dans la suite l'axe.
   On trouve que l'ensemble des vecteurs invariants est $\text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \text{vect}(i+2j-k)$.
   Comme il s'agit d'une droite, $\boxed{f \text{ est une rotation}}$

   (b)
   - l'axe de la rotation est $D = \text{vect}(i+2j-k)$
   - Notons θ l'angle de la rotation.
     On a $1 + 2\cos\theta = \text{tr}(f) = \text{tr}(A) = -1$, càd $\cos\theta = -1$.
     Ainsi $\theta = \pm\pi$.
     On se rend compte ici avec joie que nous avons complètement déterminé l'angle et qu'il n'y a pas à développer l'étape suivante de la méthode! (*En effet, la rotation d'angle $-\pi$, c'est aussi la rotation d'angle π !)*
     Conclusion: $\boxed{f \text{ est la rotation d'axe } D = \text{vect}(i+2j-k) \text{ et d'angle } \pi}$

   (c) i) Le plus simple est de caractériser les plans par leur vecteur normal.
   $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $n = i + j$
   $\mathcal{P}' = f(\mathcal{P})$ est le plan qui aura pour vecteur normal $f(n)$.
   Comme $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $f(n) = j - k$.
   $\boxed{\mathcal{P}' \text{ est le plan d'équation } y - z = 0}$

   (d) L'angle(non orienté) entre les 2 plans est l'angle entre les 2 vecteurs normaux.
   Notons α cet angle.

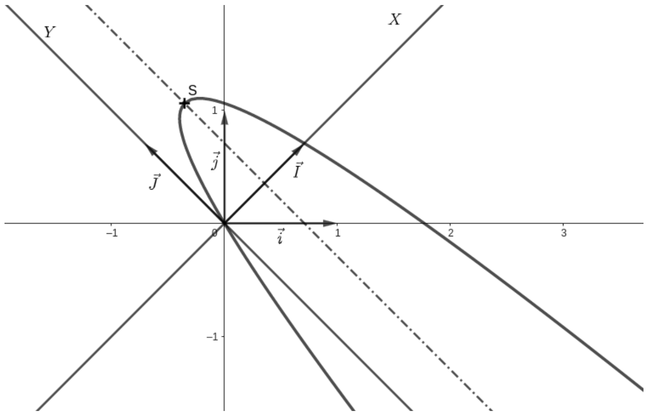
$$\cos\alpha = \frac{< n, f(n) >}{||n||.||f(n)||} = \frac{1}{2}$$

   Ainsi $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{3}}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Exercice classique de réduction d'une conique avec un terme en xy.
(Rédaction succincte ici)

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \chi_A = X^2 - 8X = X(X-8) \qquad sp(A) = \{0,8\}$
- Comme $\det(A) = 0$ la conique est **du genre parabole**, càd que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une parabole.
- On trouve par exemple $E_8 = \text{vect}\,\vec{I}$ et $E_0 = \text{vect}\,\vec{J}$ avec $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$.
  RAPPEL: on N'oublie PAS de PRENDRE DES VECTEURS UNITAIRES
- Notons (X,Y) les coordonnées dans $(O,\vec{I},\vec{J})$.
  On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
  On trouve
  $$8X^2 + 0.Y^2 - 8X + 2Y = 0 \qquad \text{càd } Y = -4X^2 + 4X$$
  Y étant une fonction du second degré de X, on en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ est une parabole}}$
- Pour connaître les éléments, on procède par mise sous forme canonique
  $$Y = -4X^2 + 4X = -4(X^2 - X) = -4\left[(X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right] = -4(X - \frac{1}{2})^2 + 1$$
- Dans $(O,\vec{I},\vec{J})$,
  - le sommet de la parabole est $S(\frac{1}{2},1)$
  - l'axe de symétrie de la parabole est a pour équation $X = \frac{1}{2}$
- Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$,
  - S a pour coordonnées $P.\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$
  - l'axe de symétrie a pour équation $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$



CORRECTION DU PROBLEME 1

préliminaire: voir la démonstration dans le RDM !

1. - La droite D passe par le point $A=(0,0,-a)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   - La droite D' passe par le point $A'=(0,0,a)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.
   - Soit $M=(x,y,z)$
     - On a $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{d}=\begin{pmatrix}x\\y\\z+a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z-a\\z+a\\x-y\end{pmatrix}$ et donc $d(M,D)^2=\dfrac{2(z+a)^2+(x-y)^2}{2}$
     - On a $\overrightarrow{A'M}\wedge\vec{d'}=\begin{pmatrix}x\\y\\z-a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z-a\\z-a\\-x-y\end{pmatrix}$ et donc $d(M,D')^2=\dfrac{2(z-a)^2+(x+y)^2}{2}$
     - On en déduit l'équivalence

$$M(x,y,z)\in S \iff 2(z-a)^2+(x+y)^2=2(z+a)^2+(x-y)^2 \iff xy=2za$$

Conclusion: $\boxed{\text{l'équation cartésienne de } S \text{ est bien } xy-2az=0}$

2. - Soit $M(x,y,z)\in S$. (on a donc $xy-2az=0$)
     Notons $M'(x',y',z')=s_{(Oz)}(M)=(-x,-y,z)$
     On a
$$x'y'-2az'=(-x)(-y)-2az=xy-2az=0$$
     et donc $M'\in S$
     On a montré que (Oz) est un axe de symétrie de S, càd que S est globalement invariante par la symétrie d'axe (Oz)
   - On montre de même que (Ox) et (Oy) sont des axes de symétries de S.

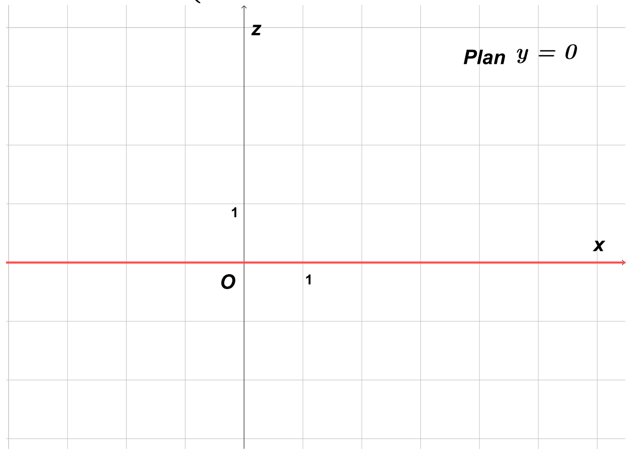
     Rappels $s_{(Ox)}(x,y,z)=(x,-y,-z)$ *et* $s_{(Oy)}(x,y,z)=(-x,y,-z)$
   - On montre aussi que le plan P d'équation $x-y=0$ est un plan de symétrie.
     Soit $M(x,y,z)\in S$. (on a donc $xy-2az=0$)
     Notons $M'(x',y',z')=s_P(M)=(y,x,z)$
     On a
$$x'y'-2az'=yx-2az=xy-2az=0$$
     et donc $M'\in S$
     On a montré que P est un plan de symétrie de S, càd que S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan P

3. L'intersection de S avec le plan d'équation $y=h$ est caractérisé par le système

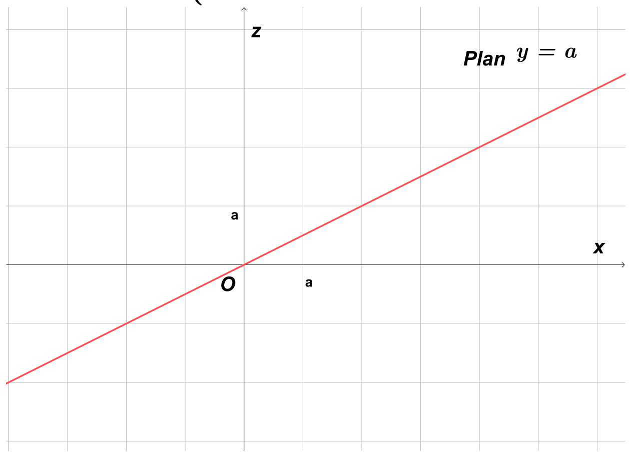
$$\begin{cases}xy-2az&=0\\y&=h\end{cases}\iff\begin{cases}hx-2az&=0\\y&=h\end{cases}$$

On reconnait l'intersection de deux plans non parallèles, l'intersection est une droite.

- cas $h=0$.
  Le système donne $\begin{cases}z&=0\\y&=0\end{cases}$. On reconnait l'axe $(0x)$



- cas $h=a$.
  Le système donne $\begin{cases}z&=\frac{1}{2}x\\y&=a\end{cases}$.



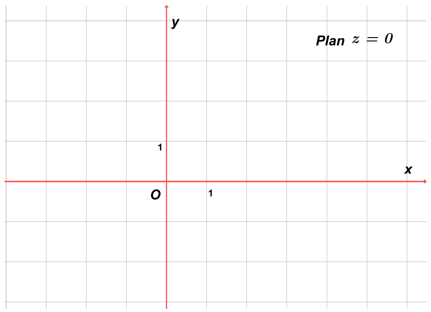
4. L'intersection de S avec le plan d'équation $z = h$ est caractérisé par le système

$$\begin{cases} xy - 2az &= 0 \\ z &= h \end{cases} \iff \begin{cases} xy &= 2ah \\ z &= h \end{cases}$$

- cas $h = 0$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} xy &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

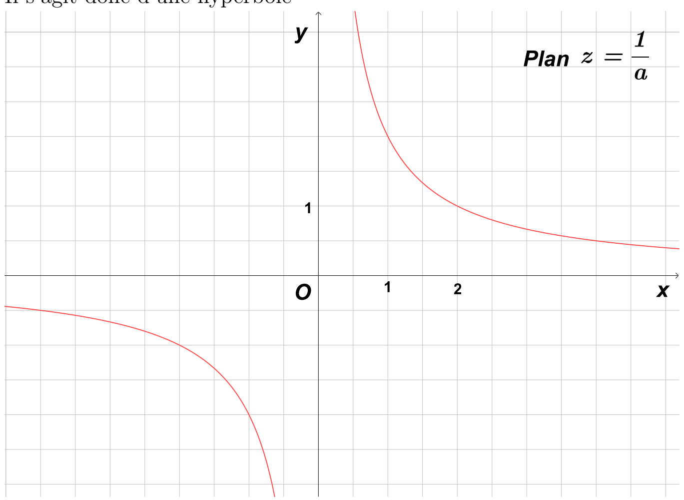
  On reconnait la réunion de deux droites: l'axe (Ox) et l'axe (Oy)



- cas $h = \frac{1}{a}$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} xy &= 2 \\ z &= \frac{1}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{2}{x} \\ z &= \frac{1}{a} \end{cases}$$

  Il s'agit donc d'une hyperbole



5. Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de S

- Notons $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy - 2az \end{array}$

  On a $\nabla_{M_0} F = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -2a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ car $a \neq 0$

  Ainsi M_0 est un point régulier de S.

  $\boxed{\text{Conclusion: la surface } S \text{ est régulière}}$

- Le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ est le plan qui passe par le point M_0 et de vecteur normal $\nabla_{M_0} F$, il a donc pour équation cartésienne

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -2a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = y_0.x + x_0.y - 2a.z - 2x_0y_0 + 2az_0 = 0$$

  Comme $M_0 \in S$ on a $x_0y_0 = 2az_0$, et donc
  on trouve comme équation simplifiée $\boxed{\mathcal{P}_{M_0} : y_0x + x_0y - 2az - 2az_0 = 0}$

6. (a) • On va procéder par double inclusion.

  Notons S' le support de la nappe $(\mathbb{R}^2, f)$

  i) **Montrons que** $S' \subset S$
  Soit $M = (x,y,z) \in S'$

  Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x &= u \\ y &= 2av \\ z &= uv \end{cases}$

  On a alors $xy - 2az = u.(2av) - 2a(uv) = 0$,
  ce qui prouve que $M \in S$

  ii) **Montrons que** $S \subset S'$
  Soit $M = (x,y,z) \in S$
  On sait que l'on a $xy = 2az$ c'est à dire $z = \frac{xy}{2a}$
  Posons $u = x$ et $v = \frac{y}{2a}$

  On a alors $\begin{cases} x &= u \\ y &= 2av \\ z &= \frac{xy}{2a} = uv \end{cases}$

  ce qui prouve que $M = (x,y,z) \in S'$

  • Remarque: ici il était tout à fait possible de raisonner par équivalence comme suit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \iff \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= u \\ y &= 2av \\ z &= uv \end{cases} \iff \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x \\ v &= \frac{y}{2a} \\ z &= x.\frac{y}{2a} \end{cases} \iff 2az = xy$$

(b) On remarque que l'on peut écrire

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, f(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u \end{pmatrix}$$

A u fixé, on reconnait la paramétrisation de la droite passant par le point $\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u \end{pmatrix}$.

S est donc bien une surface réglée, car ses lignes coordonnées à u fixé sont des droites

(c) Comme par théorème, on sait que le plan tangent en point $M(u_0,v_0)$ d'une surface réglée contient la génératrice qui passe par ce point, le plan tangent est le même le long d'une génératrice ssi la direction de son vecteur normal est constante, c'est à dire ici, si la **direction** du vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)$ est indépendant de v_0.

Le calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2av_0 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix}$$

On peut constater que cette direction n'est jamais la même pour deux valeurs distinctes de v_0
En effet, soit $v_1 \neq v_0$, on a

$$\begin{pmatrix} -2av_0 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2av_1 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix} = \underbrace{(v_0 - v_1)}_{\neq 0} . \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4a^2 \\ 2au_0 \end{pmatrix}}_{\neq \vec{0}} \neq \vec{0}$$

Conclusion: en deux points d'une même génératrice les plans tangents sont toujours distincts: a fortiori, le plan tangent n'est pas le même le long d'une même génératrice!

remarque: on pouvait aussi déterminer l'équation du plan tangent... mais il ne suffisait pas de dire que son équation dépendait de v pour en déduire ce qui était demandé!

CORRECTION DU PROBLEME 2

Partie I

1. (ultra-classique)
   - linéarité à gauche, symétrie et donc bilinéarité (je ne vous fais pas l'injure d'écrire la correction)
   - **positivité**
     Soit $P \in E$.
     La fonction $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur $[-1, +1]$, on en déduit par **positivité de l'intégrale** que $< P,P >= \int_{-1}^{1} P^2(t)dt \geqslant 0$
   - **défini**
     Soit $P \in E$ tel que $< P,P >= 0$.
     La fonction $t \mapsto P^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1, +1]$, on en déduit par **le théorème de la nullité de l'intégrale** que

     $$\forall t \in [-1, +1], P^2(t) = 0$$

     càd

     $$\forall t \in [-1, +1], P(t) = 0$$

     Ainsi le polynôme P possède une infinité de racines, ce qui permet d'affirmer que $P = O_E$
   - Conclusion: $\boxed{\text{on a bien montré que } < , > \text{ est un produit scalaire sur } E}$

2. (a) Soit $(P,Q) \in E^2$.
   On pouvait remarquer que $f(P) = ((X^2 - 1).P')'$ ou bien faire des ipp un peu plus longues....
   En posant $u(t) = (t^2 - 1).P'(t)$ et $v(t) = Q(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} < f(P),Q >= \int_{-1}^{1} u'(t).v(t)dt &= [u(t).v(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t).v'(t)dt \\ &= \underbrace{\left[(t^2 - 1).P'(t).Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1).P'(t).Q'(t)dt \\ &= -\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1).P'(t).Q'(t)dt \end{aligned}$$

   (On remarque que cette dernière intégrale est symétrique en P et Q)
   La relation montrée ci-dessus permet d'écrire que

$$< f(Q),P >= -\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1).Q'(t).P'(t)dt$$

   et comme ces 2 intégrales sont égales, on a montré que $< f(P),Q >=< f(Q),P >$, ce qui par symétrie du produit scalaire donne bien $< f(P),Q >=< P,f(Q) >$

(b) Soient P_1 et P_2 deux vecteurs propres de f associés à $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
On a donc $f(P_i) = \lambda_i.P_i$ avec $P_i \neq 0$.
D'après la question précédente, on a

$$< f(P_1),P_2 >=< P_1,f(P_2) > \qquad \text{càd} \ < \lambda_1 P_1,P_2 >=< P_1,\lambda_2 P_2 >= 0$$

Par bilinéairité du produit scalaire on obtient

$$\lambda_1 < P_1,P_2 >= \lambda_2 < P_1,P_2 > \qquad \text{càd } (\lambda_1 - \lambda_2). < P_1,P_2 >= 0$$

Comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, on en déduit bien que $< P_1,P_2 >= 0$

3. (a) On pouvait déterminer une base orthogonale de $F = \mathbb{R}_2[X]$ (on trouvait $(1,X,X^2 - 1/3)$ puis appliquer la formule du projeté orthogonal.

$$\begin{aligned} p_F(X^3) &= \frac{< X^3,1 >}{||1||^2}.1 + \frac{< X^3,X >}{||X||^2}X + \frac{< X^3,X^2 - 1/3 >}{||X^2 - 1/3||^2}(X^2 - 1/3) \\ &= 0 + \frac{2/5}{2/3}X + 0 = \frac{3}{5}X \end{aligned}$$

(b) Il y a deux inégalités à prouver

- Comme $X^3 - \frac{3}{5}X \neq 0$ on a $||X^3 - \frac{3}{5}X|| > 0$
- On sait par théorème que la distance entre X^3 et F est obtenue pour $p_F(X^3) = \frac{3}{5}X$ et uniquement pour ce vecteur.
  On a donc pour tout $P \in F, d(X^3,P) \geqslant d(X^3,p_F(X^3)) = d(X^3,F)$
  càd $\forall P \in F, ||X^3 - P|| \geqslant ||X^2 - p_F(X^3)|| = ||X^2 - \frac{3}{5}X||$

4. L'application f n'est pas bijective(en effet son noyau n'est pas réduit au vecteur nul car $f(1) = 0$).
Comme une isométrie vectorielle est nécessairement bijective(cours), on en déduit que f N'est PAS une isométrie vectorielle

Partie II

1. Soient g et h deux endomorphismes tels que $\forall (x,y) \in E^2, < x,g(y) >=< x,h(y) >$.
Soient $y \in E$ et $x \in E$
On a donc

$$< x,g(y) > - < x,h(y) >= 0$$

et par linéarité à droite du produit scalaire

$$< x,g(y) - h(y) >= 0 \qquad (*)$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, c'est en particulier vrai pour $x = g(y) - h(y)$, ce qui donne

$$< g(y) - h(y),g(y) - h(y) >$$

Le caractère défini du produit scalaire donne $g(y) - h(y) = 0$.
On a montré que $\forall y \in E, g(y) = h(y)$, càd $\boxed{g = h}$
rem: A partir de $(*)$ on peut aussi conclure différemment.
On a montré que pour tout $x \in E$, $< x,g(y) - h(y) >= 0$, càd que $g(y) - h(y)$ est un vecteur orthogonal à tout vecteur de E. Or on sait que SEUL le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E: d'où $g(y) - h(y) = 0$

2. On utilise l'expression matricielle du produit scalaire maintes fois utilisée en classe!
Soient $(x,y) \in E^2$
Notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
On a alors $AX = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x))$ et $A^TY = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*(y))$
Comme $\mathcal{B}$ est une bon, on a donc en identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

- $< x,y >= X^T.Y$
- $< f(x),y >= (AX)^T.Y = X^TA^TY$
- $< x,f^*(y) >= X^T(A^TY) = X^TA^TY$

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in E^2, < f(x),y >=< x,f^*(y) >}$

3. Je propose deux solutions

i) **Sans passer par un argument de dimension, en procédant par équivalence.**
Nous allons montrer ce qui est demandé en commençant par caractériser le vecteur nul comme le SEULl vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E. Ce qui permet d'écrire les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} y \in \ker(f^*) &\iff f^*(y) = 0 \\ &\iff \forall x \in E, < x,f^*(y) >= 0 \\ &\iff \forall x \in E, < f(x),y >= 0 \\ &\iff \forall z \in \text{Im}(f), < z,y >= 0 \\ &\iff y \in (\text{Im}(f))^\perp \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\boxed{\ker(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp}$

ii) **Avec une inclusion, et un argument de dimension**

- Soit $x \in \text{Im}(f)$ et $y \in \ker(f^*)$.
  On a donc $f^*(y) = 0$ et $\exists t \in E, x = f(t)$.
  On a alors
  $$< x,y >=< f(t),y >=< t,f^*(y) >=< t,0 >= 0$$
  On a prouvé que $\text{Im}(f)$ **et** $\ker(f^*)$ **sont orthogonaux, càd que** $\boxed{\ker(f^*) \subset (\text{Im}(f))^\perp}$
- Le théorème du rang appliqué à f^* donne
  $$\dim(\ker(f^*)) = n - \text{rg}(f^*) = n - \text{rg}(A^T)$$
  On sait aussi que
  $$\dim(Im(f)^\perp) = n - \dim(Im(f)) = n - \text{rg}(A)$$
  Comme $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$, on a bien $\boxed{\dim(\ker(f^*)) = \dim(Im(f)^\perp)}$
- On en déduit que $\boxed{\ker(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp}$

4.
- On a $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T =^t AA$. **La matrice** A^TA **est ainsi une matrice symétrique à coefficients réels, on sait d'après le théorème spectral que** A^TA **est diagonalisable (à l'aide d'une matrice de passage orthogonale) et que les valeurs propres sont toutes réelles.**
- Soit λ une valeur propre de A^TA et X un vecteur propre associé.
  On a donc $A^TAX = \lambda X$,
  En multipliant à gauche par X^T cela donne $X^T(A^TAX) = \lambda X^T.X = \lambda||X||^2$,
  Or $X^T(A^TAX) = X^TA^TAX = (AX)^T(AX) = ||AX||^2$
  Comme $X \neq 0$, on a donc $||X|| \neq 0$ d'où $\lambda = \frac{||AX||^2}{||X||^2} \geqslant 0$ (démo déjà faite en classe!)

5. • On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^* \circ f) = A^T A$. Comme $A^T A$ est diagonalisable, on peut affirmer que $f^* \circ f$ est diagonalisable.
Comme de plus $A^T A$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, on peut affirmer que $\boxed{f^* \circ f \text{ est diagonalisable dans une bon }}$, c'est à dire qu'il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E formée de vecteurs propres de $f^* \circ f$
• Soit $i \neq j$ et notons λ_j la valeur propre associée à e_j.
On a

$$< f(e_i),f(e_j) >=< e_i,f^*(f(e_j)) >=< e_i,(f^* \circ f)(e_j) >=< e_i,\lambda_j e_j >= \lambda_j < e_i,e_j >= 0$$

ce qui prouve bien que $\boxed{(f(e_1),\dots,f(e_n)) \text{ est une famille orthogonale.}}$

Partie III

1. $\dim D = 1$ et $\dim H = \dim D^\perp = \dim E - \dim D = \dim E - 1$
2. (a) Comme E est un espace euclidien, on sait que $D \oplus H = E$.
(c'est à dire que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de E) Comme $f^*(n) \in E$, on peut donc affirmer qu'il existe un unique $(d,z) \in D \times H$ tel que $f^*(n) = d + z$.
Comme (n) est une base de D, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d = \lambda.n$
Au final, on a montré $\boxed{\exists!(\lambda,z) \in \mathbb{R} \times H, f^*(n) = \lambda.n + z}$
rem: on pourrait même préciser que z est le projeté orthogonal de $f^*(n)$ sur H, et que $\lambda.n$ est le projeté orthogonal de $f^*(n)$ sur D. Ainsi $\lambda.n = \dfrac{< f^*(n),n >}{||n||^2} n = \dfrac{< n,f(n) >}{||n||^2} n$
(b) On a
• d'une part, comme z et n sont orthogonaux, on a

$$< z,f^*(n) >=< \lambda.n + z,z >= \lambda \underbrace{< z,n >}_{=0} + < z,z >= 0 + ||z||^2 = ||z||^2$$

car n et z sont orthogonaux
• d'autre part, $< z,f^*(n) >=< f(z),n >$ par définition de f^*
Comme $z \in H$ et que H est stable par f, on a $f(z) \in H$.
Ainsi $f(z) \in H = D^\perp$ et $n \in D$ sont orthogonaux, c'est à dire $< f(z),n >= 0$.
On a donc aussi $< z,f^*(n) >= 0$
On a justifié que $||z||^2 = 0$ c'est à dire que $z = 0$
(c) Comme $z = 0$ on a donc montré que $f^*(n) = \lambda n$.
Comme $n \neq 0$ on peut bien affirmer que n **est vecteur propre de** f^*

3. (a) On a $f^*(n) = \lambda n$
Soit $z \in H$.
On a

$$< z,f^*(n) >=< z,\lambda n >= \lambda < z,n >= 0 \qquad \text{car } z \in H \text{ et } n \in D$$

(b) Soit $z \in H$.
Comme $< z,f^*(n) >= 0$, on en déduit que $< f(z),n >= 0$ càd que $f(z) \in D^\perp = H$

On vient de montrer que Si $z \in H$ alors $f z) \in H$, càd que H est stable par f

On a montré que si n est vecteur propre de f^* alors H est stable par f.

On a ainsi montré au final l'équivalence

$$\boxed{H \text{ est un sev stable par } f \iff n \text{ est vecteur propre de } f^*}$$

4. On a $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
Ainsi chercher les plans stables par f revient à chercher les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ stables par f
Au niveau des calculs cela donne:
• $\chi_{A^T}(X) = X(X-1)(X-2)$
$sp(f^*) = sp(A^T) = \{0,1,2\}$
• La recherche des sep de A^T donne

$$E_0(A^T) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad E_1(A^T) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad E_2(A^T) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Il y a donc 3 plans stables par f, à savoir

$$H_1 = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix})^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0\}$$

$$H_2 = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y + z = 0\}$$

$$H_3 = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix})^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y + z = 0\}$$