DS 6 du 18 mars 2024

- **LA PRÉSENTATION, LA LISIBILITÉ, L'ORTHOGRAPHE, LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES. EN PARTICULIER, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE.**
- **L'USAGE DE TOUT MATÉRIEL ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT.**
- **VOS RÉSULTATS DOIVENT ÊTRE ENCADRÉS, À LA RÈGLE, DE PRÉFÉRENCE AVEC UNE COULEUR DIFFÉRENTE DE CELLE D'ÉCRITURE.**
- CONSIGNES:
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée: bleue ou noire
  - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit
  - Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illuster, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

PROBLEME: Un Duel

On considère un duel entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- Lorsqu'un tireur est atteint, il est définivement éliminé des épreuves suivantes.
- Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :

- C_n: "à l'issue de la n-ème épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés".
- A_n "à l'issue de la n-ème épreuve, seul A n'est pas encore éliminé".
- B_n "à l'issue de la n-ème épreuve, seul B n'est pas encore éliminé".
- E_n "à l'issue de la n-ème épreuve, les deux tireurs sont éliminés".

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par X_n la matrice uni-colonne à 4 lignes $X_n = \begin{pmatrix} P(C_n) \\ P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(E_n) \end{pmatrix}$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on convient donc de poser $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Diagonalisation de la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Préciser les valeurs propres de M avec leurs ordres de multiplicités. Donner une base de chaque sous-espace propre.
   (b) Justifier que la matrice M est diagonalisable.(on écrira avec précision le théorème utilisé) Donner alors une matrice D et P sa matrice de passage associée.
   (c) Calculer P^{-1} (les calculs devront apparaitre sur votre copie)
2. Etude de la suite matricielle $(M^n)_{n \geqslant 0}$
   (a) Expliciter $\lim\limits_{n \to +\infty} D^n$
   (b) Exprimer M^n en fonction de D^n, puis déterminer M^n. Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n$
3. Calculs de probabilités conditionnelles
   (a) Vérifier, en justifiant votre réponse, que $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{2}{9}$
   (b) Déterminer de même $P_{C_n}(A_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1}), P_{C_n}(E_{n+1})$ et $P_{A_n}(A_{n+1})$
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $X_{n+1} = MX_n$ puis que $X_n = M^n X_0$
   En déduire $P(C_n)$, $P(A_n), P(B_n)$ et $P(E_n)$ pour tout $n \geqslant 1$ entier
4. Des questions intéressantes
   (a) Prouver que $P(\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n) = 0$.
   Décrire en français à quoi correspond l'évenement $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n$
   (b) On note T la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat
      i. Calculer $P(T = 1)$
      ii. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ justifier que l'une des égalités ci-dessous est vraie
      $$(T > n) = \bigcap_{k=1}^{n} C_k \qquad\qquad (T \geqslant n) = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$$
      iii. En déduire que $P(T = n) = \dfrac{7}{9} \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$
      Reconnait-on une loi particulière? Etait-ce prévisible?
      Donner l'espérance et la variance de T
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement "le joueur A gagne" ainsi que celle de l'événement "les joueurs A et B sont éliminés simultanément"

EXERCICE 1

1. Questions de cours
   - Soit α un réel non nul.
     Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$
     En déduire un équivalent de $1-(1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0
   - Soient a et b deux réels avec $a>0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$i)\, e^{b\ln a} \qquad ii)\, e^{a\ln b} \qquad iii) e^{\ln(a).ln(b)}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1, u_k = a_{k-1}-a_k$
   (a) Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.
   (b) Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
   On note S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer
3. Etude d'une variable aléatoire
   (a) Démontrer que $\forall k \geqslant 1, u_k > 0$
   (b) Dans l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k>0, P(X_n=k) = \lambda.u_k$ où λ est un réel. Déterminer Λ
   (c) Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = S_n$
4. Pour tout t réel, on note $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*, f_p(t) = 1-(1-e^{-t})^p$
   (a) Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^\infty f_p(t)dt$ est convergente
   (b) Calculer $I_{p+1}-I_p$ pour tout entier naturel p
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = I_{n-1}$
5. Un encadrement
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$
   (b) En déduire que $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1+\ln(n-1)$
6. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \geqslant 0, g_n(t) = 1-(1-2^{-t})^{n-1} = 1-\left(1-\frac{1}{2^t}\right)^{n-1}$

   Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$
7. Soit β un réel strictement positif,montrer que l'on a $\displaystyle\int_0^\beta g_n(v)dv = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)du$
8. Démontrer que $E(X_n)-1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n)$
9. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini

EXERCICE 2

1. On note γ la racine positive du trinôme x^2-x-1.
   Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.
2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant: $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\, y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

   Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle?

$$(1)\;\; y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}; \qquad (2)\;\; y_n = \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}; \qquad (3)\;\; y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes:
   - X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
   - pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

   3.1. Redémontrer que X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$
   3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
   3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.
   3.4. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   3.4.1. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).
   3.4.2. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).
   3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   Déterminer $cov(X_p,X_{p+1})$ en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n)

correction de l'exercice 1

1. (a) Soit $\alpha \neq 0$. On utilise le DL de référence

$$\phi(x) = (1-x)^\alpha = (1+(-x))^\alpha = 1+\alpha(-x)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(-x)^2+o(x^2) = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$

et on en déduit rigoureusement l'équivalent demandé (avec un DL à l'ordre 1 car ceci suffisait pour cette question)

$$1-(1-x)^a = 1-(1-ax+o(x)) = ax+o(x) \underset{0}{\sim} ax$$

(b) $\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$

2. (a) On va répondre à cette question en revenant à la définition, càd à la somme partielle.
Pour $N \geqslant 1$, on note $U_N = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$

- Par procédé telescopique, on a

$$U_N = \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} - a_k = \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{N} a_k = a_0 - a_N$$

- $a_0 = 1-(1-1)^{n-1} = 1-0 = 1$ (en effet $n-1 \geqslant 1 \neq 0$)
- On a $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2^N} = 0$ et donc par composition de limite

$$\lim_{N\to+\infty} a_N = \lim_{N\to+\infty} 1-\left(1-\frac{1}{2^N}\right)^{n-1} = 1-(1-0)^{n-1} = 0$$

- On a ainsi $\lim\limits_{N\to\infty} U_N = 1-0 = 1$.
Comme cette limite est finie, on en déduit que
$\boxed{\text{la série de terme général } u_k \text{ converge et que } \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = 1}$

(b)
- Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$, on a d'après la première question

$$a_k = 1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} (n-1).\frac{1}{2^k} = (n-1).\left(\frac{1}{2}\right)^k = b_k$$

- La série de terme général b_k est une série géométrique convergente (car de raison $q = \frac{1}{2}$ avec $|q| < 1$). Comme $b_k > 0$ et $a_k \sim b_k$, on peut en déduire d'après *la Règle des Equivalents* que **la série de terme général a_k est également convergente**

3. (a) Soit $k \geqslant 1$.
On a

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 1$$

et donc

$$0 \leqslant 1-\frac{1}{2^{k-1}} < 1-\frac{1}{2^k}$$

comme la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ est **strictement** croissante sur $[0,+\infty[$, on a encore

$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} < \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$

et ainsi

$$u_k = a_{k-1} - a_k = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} > 0$$

(b) Comme $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $((X_n = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui est un système complet d'événements, et on a donc $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X_n = k) = 1$.
Comme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X_n = k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = \lambda.1 = \lambda$, on a donc $\boxed{\lambda = 1}$

(c)
- On va montrer que $\sum k.P(X_n = k) = \sum k.u_k$ est une série absolument convergente.
- Comme on ne peut pas faire la somme d'équivalents, on va revenir aux DLs
Comme $a_k \sim \frac{n-1}{2^k}$ on a

$$a_k = \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k})$$

et donc

$$\begin{aligned} u_k = a_{k-1} - a_k &= \frac{n-1}{2^{k-1}} + o(\frac{1}{2^{k-1}}) - \frac{n-1}{2^k} - o(\frac{1}{2^k}) \\ &= \frac{2.(n-1)}{2^k} - \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k}) \\ &= \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k}) \end{aligned}$$

et ainsi

$$u_k \sim \frac{n-1}{2^k}$$

- On a

$$|k.u_k| = k.u_k \sim (n-1).\frac{k}{2^k} = c_k$$

  – La série $\sum c_k$ est ACV.
  En effet, le théorème des croissances comparées donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k^3}{2^k} = 0$, càd $c_k = o(\frac{1}{k^2})$
  Par comparaison, comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann ACV, on peut donc affirmer que $\sum c_k$ est ACV
  – D'après la règle des équivalents, on peut donc en déduire que $\sum k.u_k$ est ACV, et ainsi que $\boxed{X_n \text{ possède une espérance}}$

- Calculons maintenant $E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k.u_k$
Pour cela on revient aux sommes partielles.

Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k.u_k &= \sum_{k=1}^{N} k.(a_{k-1} - a_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} + (k-1).a_{k-1} - k.a_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} + \sum_{k=1}^{N} (k-1).a_{k-1} - k.a_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} - 0.a_0 - N.a_N \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} a_k - N.a_N
\end{aligned}$$

Comme

$$N.a_N \sim \frac{(n-1).N}{2^N}$$

on peut affirmer que $\lim\limits_{N\to\infty} N.a_N = 0$,
et ainsi

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} k.u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k.u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k - N.a_N = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - 0 = S_n$$

4. (a)
   - Pour $p = 0$, on a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\infty} 0.dt = 0$ qui est trivialement convergente
   - Soit $p \geqslant 1$
     La fonction f_p est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale I_p est donc généralisée en sa borne supérieure.
     Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, on a d'après Q1, $f_p(t) \underset{+\infty}{\sim} p.e^{-t} > 0$.
     On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est une intégrale de référence convergente, donc par la règle des équivalents, on peut dire que $\displaystyle\int_0^{\infty} f_p(t)dt$ converge

   (b) Soit $\in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
I_{p+1} - I_p &= \int_0^{\infty} f_{p+1}(t) - f_p(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^p - (1-e^{-t})^{p+1}dt \\
&= \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^p(1-(1-e^{-t}))dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t}.(1-e^{-t})^p.dt
\end{aligned}$$

On a, en reconnaissant une primitive,

$$I_{p+1} - I_p = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} e^{-t}.(1-e^{-t})^p.dt = \lim_{T\to+\infty} \left[\frac{(1-e^{-t})^{p+1}}{p+1}\right]_0^T = \frac{1}{p+1}$$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-2} I_{p+1} - I_p = I_{n-1} - I_0 = I_{n-1}$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur l'intervalle $[k,k+1]$, on a

$$\forall t \in [k,k+1],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

   càd

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   (b)
   - Comme $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, on a par sommation

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

     c'est à dire avec la relation de Chasles (et Q4c))

$$\int_1^{n} \frac{dt}{t} \leqslant I_{n-1}$$

     ce qui donne bien

$$\ln n \leqslant I_{n-1}$$

   - On doit distinguer deux cas pour traiter rigoureusement cette question
     i) cas $n = 2$.
        On a $I_1 = 1$ et $1 + \ln 1 = 1$, d'où $I_{2-1} \leqslant 1 + \ln(2-1)$
     ii) cas $n \geqslant 3$.
        Comme $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, on a par sommation

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

        càd

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n-1} \frac{dt}{t}$$

        d'où

$$I_{n-1} - 1 \leqslant \ln(n-1)$$

        On a bien montré que $I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$

6. On note $\boxed{\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1-(1-2^{-t})^{n-1} = 1-(1-e^{-t.\ln 2})^{n-1} \end{array}}$

- La fonction g_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de fonctions C^∞, et l'on a

$$\forall t \geqslant 0, g_n'(t) = -(n-1).\ln(2).e^{-t.\ln 2}(1-2^{-t}) \leqslant 0$$

La fonction g_n est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}^+$

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
La fonction g_n est décroissante sur $[k,k+1]$ et donc

$$\forall t \in [k,k+1], g_n(k+1) \leqslant g_n(t) \leqslant g_n(k)$$

Par croissance de l'intégrale cela donne

$$\int_k^{k+1} g_n(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} g_n(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} g_n(k)dt$$

càd

$$a_{k+1} = g_n(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} g_n(t)dt \leqslant g_n(k) = a_k$$

- Par sommation, et en utilisant de nouveau la relation de Chasles, cela donne

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

càd

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

7. Soit $\beta > 0$.
On effectue le changement de variable affine C^1 en posant $u = v.\ln(2)$ (et donc $du = \ln(2).dv$)

$$\int_0^\beta g_n(v)dv = \int_0^{\beta.\ln(2)} g_n(\frac{u}{\ln 2}).\frac{du}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\beta.\ln(2)} g_n(\frac{u}{\ln 2})du$$

Or

$$g_n(\frac{u}{\ln 2}) = 1-(1-e^{-\ln(2).u/\ln(2)})^{n-1} = 1-(1-e^{-u})^{n-1} = f_{n-1}(u)$$

On a bien prouvé que

$$\int_0^\beta g_n(v)dv = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\beta.\ln(2)} f_{n-1}(u)du$$

8. En utilisant les deux questions précédentes, on a pour tout entier $m \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \frac{1}{\ln 2}\int_0^{m.\ln(2)} f_{n-1}(u)du \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

En faisant tendre $m \to +\infty$, comme tous les membres convergent, on a

$$S_n - a_0 \leqslant \frac{1}{\ln 2}.I_{n-1} \leqslant S_n$$

Comme $a_0 = 1$ et $S_n = E(X_n)$, on obtient bien

$$E(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n)$$

9. - D'après la question 5b), on a $I_{n-1} \sim \ln n$.
En effet:

$$\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln n + \ln(1-\frac{1}{n}) = 1 + \ln(n-1)$$

et l'on a clairement $1 + \ln n + \ln(1-\frac{1}{n}) \sim \ln n$

- L'inégalité de la question 8 s'écrit encore

$$\frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n) \leqslant 1 + \frac{I_{n-1}}{\ln 2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n-1} = +\infty$, on a $1 + \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \sim \frac{I_{n-1}}{\ln 2}$
ce qui permet d'affirmer que

$$E(X_n) \sim \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \sim \frac{\ln n}{\ln 2}$$

---

correction de l'exercice 2

1. Le discriminant nous donne les racines: $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\gamma' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Comme la fonction $\sqrt{}$ est croissante, on a $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2} > 1$.
On a $\gamma.\gamma' = \frac{(1+\sqrt{5})}{2.2} = \frac{1-5}{4} = -1$ donc $\gamma' = \frac{-1}{\gamma}$

2. L'équation caractéristique de la relation de récurrence définissant la suite est $x^2 - x - 1 = 0$. Comme on l'a vu dans la question précédente, elle admet deux racines distinctes γ et $-\frac{1}{\gamma}$ (elles sont bien distinctes car $\gamma > 1$ et donc $-\frac{1}{\gamma} \in]-1,0[$), donc la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 assure l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = a\gamma^n + b\left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n = a\gamma^n - \frac{(-1)^{n+1}b}{\gamma^n}.$$

De plus, $y_0 = 0$ ce qui implique la relation $a + b = 0$, ou encore: $a = -b$. Pour poursuivre, on pourrait traduire la condition $y_1 = 1$, et résoudre le système vérifié par a et b. Mais l'énoncé nous aide en proposant trois solutions, et en affirmant qu'une seule d'entre elles est correcte. On note que a et b doivent être opposés, et donc les coefficients en facteur de γ^n et $\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n}$ doivent être égaux dans l'égalité correcte: or c'est bien le cas dans l'égalité (3), et ceci suffit pour notre affaire. On a donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n}\right).$$

3. 3.1. voir la démonstration faite en cours soit par un calcul direct soit par les fonctions génératrices(théorème du cours)
3.2. Il s'agit de trouver un couple $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que: $\mathrm{P}(X_1 = k \cap X_2 = \ell) \neq \mathrm{P}(X_1 = k)\mathrm{P}(X_2 = \ell)$. Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a nécessairement $X_2 \geqslant X_1$ (car $X_2 = X_1 + X_0$ et X_0 est à valeurs dans $\mathbb{N}$), donc le membre de gauche est nul dès que $\ell < k$. C'est ce qui motive mon choix de (k,ℓ).
Prenons: $(k,\ell) = (1,0)$. Alors $\mathrm{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = 0$ puisqu'il s'agit de la probabilité d'une évènement impossible, pour la raison qu'on vient de donner, or:

$$\mathrm{P}(X_1 = 1)\mathrm{P}(X_2 = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^0}{0!} = e^{-(2\lambda+\mu)}\lambda \neq 0,$$

donc: $\mathrm{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \neq \mathrm{P}(X_1 = 1)\mathrm{P}(X_2 = 0)$, ce qu'on voulait démontrer. Ainsi X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. il s'agit de faire tout simplement une récurrence double ou forte pour obtenir ce résultat.

Notons pour tout $k \geqslant 1, \mathcal{P}_k : X_k = y_{k-1}X_0 + y_kX_1$

- initialisation: $\mathcal{P}_1$ est vraie.
  En effet, $y_0.X_0 + y_1.X_1 = 0.X_0 + 1.X_1 = X_1$

- hérédité: on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie jusqu'au rang $n \geqslant 1$ fixé quelconque
  On a alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + X_{n-1} \\ &= y_{n-1}.X_0 + y_n.X_1 + y_{n-2}.X_0 + y_{n-1}.X_1 \qquad \text{hyp. de rec.} \\ &= (y_{n-1} + y_{n-2}).X_0 + (y_{n-1} + y_n).X_1 \\ &= y_n.X_0 + y_{n+1}.X_1 \qquad \text{par déf. de la suite } (y_n) \end{aligned}$$

cqfd ;-)

3.4.1 Les variables aléatoires X_0 et X_1 suivent une loi de Poisson, donc elles sont d'espérance finie (et on a: $x_0 = \mathrm{E}(X_0) = \lambda$, $x_1 = \mathrm{E}(X_1) = \mu$). Donc, par linéarité de l'espérance, X_p est aussi d'espérance finie, et on a:

$$x_p = \mathrm{E}(X_p) = y_{p-1}\mathrm{E}(X_0) + y_p\mathrm{E}(X_1) = y_{p-1}\lambda + y_p\mu.$$

3.4.2
- X_0 et X_1 sont des variables de Poisson, donc possèdent des variances, et l'on a $V(X_0) = \lambda$ et $V(X_1) = \mu$
- Soit $p \geqslant 1$.
  On a $X_p = y_{p-1}X_0 + y_pX_1$.
  Comme X_0 et X_1 possèdent une variance, on peut affirmer que X_p possède une variance, et l'on a

$$V(X_p) = V(y_{p-1}X_0 + y_pX_1) = y_{p-1}^2V(X_0) + y_p^2V(X_1) + 2y_{p-1}y_p.cov(X_0,X_1)$$

Comme X_0 et X_1 sont indépendantes on a $cov(X_0,X_1) = 0$, et donc

$$V(X_p) = y_{p-1}^2V(X_0) + y_p^2V(X_1) = y_{p-1}^2.\lambda + y_p^2.\mu$$

3.5.
- pour $p = 0$, on a $cov(X_p,X_{p+1}) = cov(X_0,X_1) = 0$ car $X_0 \perp\!\!\!\perp X_1$
- pour $p \in \mathbb{N}^*$.
  par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned} cov(X_p,X_{p+1}) &= cov(y_{p-1}X_0 + y_pX_1, y_pX_0 + y_{p+1}X_1) \\ &= y_{p-1}.y_pcov(X_0,X_0) + y_p^2cov(X_1,X_0) + y_{p+1}y_{p-1}cov(X_0,X_1) + y_p.y_{p+1}cov(X_1,X_1) \\ &= y_{p-1}.y_pV(X_0) + 0 + 0 + y_py_{p+1}V(X_1) \\ &= \lambda y_{p-1}.y_p + \mu y_py_{p+1} \end{aligned}$$

correction du duel

1. (a) Comme la matrice est triangulaire, le calcul du polynôme caractéristique est particulièrement simple $\chi_M(X) = (X - \frac{2}{9})(X-1)^3$.
   Ainsi:
   - $\boxed{sp(M) = \{1, \frac{2}{9}\}}$
   - $\boxed{1 \text{ est valeur propre triple et } \frac{2}{9} \text{ est valeur propre simple.}}$

   Une recherche classique de sep donne $E_{2/9}(M) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_1(M) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Les trois vecteurs de la famille génératrice de $E_1(M)$ forment clairement une famille libre (famille échelonée) ce qui permet d'affirmer que c'est en fait une base de $E_1(M)$.
   On a prouvé que $\boxed{\dim E_{2/9}(M) = 1 \text{ et } \dim E_1(M) = 3}$

   (b) On écrit le théorème suivant sur sa feuille!
   Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.
   Alors il y a équivalence entre :
   i.) A **est diagonalisable**
   ii.) **le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute vp λ de A,** $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
   iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = n$
   iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = \mathbb{K}^n$

   On en déduit que M est bien diagonalisable ici car $\dim E_{2/9}(M) + \dim_1(M) = 1 + 3 = 4$
   avec par exemple $\boxed{D = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

   (c) Par la méthode de votre choix, vous devez trouver $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2. (a) comme $|\frac{2}{9}| < 1$ on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$, et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\boxed{M^n = PD^nP^{-1}}$ et le calcul donne

$$M^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7.(2/9)^n & 0 & 0 & 0 \\ 4(1-(2/9)^n) & 7 & 0 & 0 \\ 1-(2/9)^n & 0 & 7 & 0 \\ 2(1-(2/9)^n) & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

On a ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\4&7&0&0\\1&0&7&0\\2&0&0&7\end{pmatrix}$

3. (a) $P_{C_n}(C_{n+1})$ correspond à la probabilité que les deux tireurs ne soient pas éliminés à l'étape $n+1$ sachant qu'ils sont tous les deux encore en jeu à l'étape n. Il s'agit donc de la probabilité que A rate son tir et que B rate son tir. Comme les tirs sont indépendants, on a $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

   (b)
   - $P_{C_n}(A_{n+1})$ correspond à la probabilité que A reste seul après le $n+1$ ème tir alors que A et B étaient tous les deux en jeu lors de ce n ème tir.
     C'est la donc la probabilité que A réussisse son tir et que B rate le sien. Comme les tirs sont indépendants on a $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$
   - $P_{C_n}(B_{n+1})$ correspond à la probabilité que B réussisse son tir et que A rate le sien: on a ainsi $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$
   - $P_{C_n}(C_{n+1})$ correspond à la probabilité que A rate son tir et que B rate le sien: on a ainsi $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$
   - $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ car si à la n-ème étape seul A n'est pas encore éliminé alors, faute d'adversaire, à l'étape suivante c'est encore le cas

   (c) Soit $n \geqslant 0$.
   (C_n, A_n, B_n, E_n) est un système complet d'événements, on a donc pour tout évémenent D

$$P(D) = P_{C_n}.P(C_n)(D) + P(A_n).P_{A_n}(D) + P(B_n).P_{B_n}(D) + P(E_n).P_{E_n}(D)$$

   et en particulier pour les événements $D = C_{n+1}$ ou $D = A_{n+1}$ ou...
   D'après les probabilités conditionnelles calculées plus haut, on a donc

$$\begin{aligned}
P(C_{n+1}) =& P(C_n).P_{C_n}(C_{n+1}) + P(A_n).P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(C_{n+1}) + P(E_n).P_{E_n}(C_{n+1})\\
P(A_{n+1}) =& P(C_n).P_{C_n}(A_{n+1}) + P(A_n).P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(A_{n+1}) + P(E_n).P_{E_n}(A_{n+1})\\
P(B_{n+1}) =& P(C_n).P_{C_n}(B_{n+1}) + P(A_n).P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(B_{n+1}) + P(E_n).P_{E_n}(B_{n+1})\\
P(E_{n+1}) =& P(C_n).P_{C_n}(E_{n+1}) + P(A_n).P_{A_n}(E_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(E_{n+1}) + P(E_n).P_{E_n}(E_{n+1})
\end{aligned}$$

   Matriciellement cela s'écrit bien comme indiquée $X_{n+1} = MX_n$

   Par récurrence, il est immédiat que $\boxed{X_n = M^n X_0 \text{ pour tout } n \geqslant 0}$

   Le calcul matriciel donne alors $\boxed{\begin{pmatrix}P(C_n)\\P(A_n)\\P(B_n)\\P(E_n)\end{pmatrix} = X_n = \begin{pmatrix}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\\ \dfrac{4}{7}\left(1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)\\ \dfrac{1}{7}\left(1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)\\ \dfrac{2}{7}\left(1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)\end{pmatrix}}$

4. (a) On reconnait la même situation que dans le calcul de n'obtenir que des Faces lors d'une infinité de tirages. On reprend le même raisonnement!
   - On remarque que (C_n) est une suite décroissante pour l'inclusion $\forall n \geqslant 1, C_n \subset C_{n-1}$
     En effet si $\omega \in C_n$, càd les deux tireurs sont présents à la n-ième épreuve, alors ils étaient forcément présents à la précédente, càd $\omega \in C_{n-1}$
   - Le théorème de continuité décroissante permet alors d'affirmer que

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$$

$\boxed{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \text{ est l'événement "les deux tireurs survivent à leur infinité d'épreuves"}}$

   (b) i. On a $(T = 1) = A_1 \cup B_1 \cup E_1$.
   Comme ces événements sont disjoints deux à deux,
   on a $P(T = 1) = P(A_1) + P(B_1) + P(E_1) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$

   ii. Soit $n \geqslant 1$
   - L'événement $(T \geqslant n)$ correspond à l'événement "Il faut n ou davantage d'épreuves pour finir le duel"
   - L'événement $(T > n) = (T \geqslant n+1)$ correspond à l'événement "Il faut $n+1$ ou davantage d'épreuves pour finir le duel"
   - L'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$ correspond à l'événement "au bout de n épreuves le duel n'est pas terminé", c'est à dire encore ""Il faut $n+1$ ou davantage d'épreuves pour finir le duel"

   On a justifié que $\boxed{(T > n) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k}$.
   Comme de plus on a $C_n \subset C_{n-1} \subset \cdots \subset C_2 \subset C_1$
   on a $\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k = C_n$ et ainsi $P(T > n) = P(C_n) = \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

   iii.
   - Comme T est à valeurs entières on a $(T > n-1) = (T \geqslant n) = (T = n) \cup (T > n)$ cette union étant disjointe, on a

$$P(T > n-1) = P(T = n) + P(T > n)$$

     Ainsi

$$P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)$$

     On a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geqslant 1, P(T = n) = \dfrac{7}{9}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$,

     et on reconnait que $\boxed{T \sim \mathcal{G}(\frac{7}{9})}$
   - On sait que pour une loi géométrique on a $E(T) = \dfrac{1}{p}$ et $V(T) = \dfrac{1-p}{p^2}$,

     donc ici $\boxed{E(T) = \dfrac{9}{7}}$ et $\boxed{V(T) = \dfrac{18}{49}}$

- Appelons "Echec" le fait que A et B échouent à une même épreuve (probabilité $q = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.
  Le duel proposé est une succession d'épreuves identiques et indépendantes, de probabilité de succès $p = 1 - q = \frac{7}{9}$.
  La variable aléatoire T est interprétée comme étant égale au rang du premier succès, on sait donc que $T \sim \mathcal{G}(\frac{7}{9})$

(c)

- Notons G_A l'événement "le joueur A gagne".
  Pour $n \geqslant 1$, notons D_n l'événement "A gagne à la n-ième épreuve".
  - On a $G_A = \bigcup_{n \geqslant 1} D_n$ et cette union est composée d'éléments incompatibles 2 à 2.
    Ainsi $P(G_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(D_n)$
  - $P(D_1) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
    car D_1 est réalisé lorsque A réussit et B échoue lors du premier duel
  - $P(D_2) = \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\right).\frac{4}{9} = \frac{2}{9}.\frac{4}{9}$
    car D_2 est réalisé lorsque lors du premier duel A et B échouent, puis lors du second duel A réussit et B échoue
  - Pour $n \geqslant 2$, on a $P(D_n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.\frac{4}{9}$
    car lors des $n-1$ premiers duels A et B échouent, et lors du $n-$ième duel A réussit et B échoue
  - Ainsi
$$P(G_A) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.\frac{4}{9} = \frac{4}{9}.\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{p} = \frac{4}{9}.\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{4}{7}$$

- Notons H l'événement "les joueurs A et B sont éliminés simultanément".
  Pour $n \geqslant 1$, notons F_n l'événement "A et B sont éliminés à la n-ième épreuve".
  - On a $H = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$ et cette union est composée d'éléments incompatibles 2 à 2.
    Ainsi $P(H) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$
  - $P(F_1) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
    car D_1 est réalisé lorsque A réussit et B réussit lors du premier duel
  - $P(D_2) = \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\right).\frac{2}{9} = \frac{2}{9}.\frac{2}{9}$
    car D_2 est réalisé lorsque lors du premier duel A et B échouent, puis lors du second duel A réussit et B réussit
  - Pour $n \geqslant 2$, on a $P(D_n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.\frac{2}{9}$
    car lors des $n-1$ premiers duels A et B échouent, et lors du $n-$ième duel A réussit et B réussit
  - Ainsi
$$P(H) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.\frac{2}{9} = \frac{2}{9}.\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{p} = \frac{2}{9}.\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{2}{7}$$

- On trouve que la probabilité que B gagne est $P(G_B) = \frac{1}{7}$