DS 4 du 8 janvier 2024

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**

- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**

- CONSIGNES:
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée: bleue ou noire
  - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit
  - Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illuster, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.
  - Le sujet est composé de 3 exercices, complètement indépendants.

Questions de cours:

1. Donner la définition d'une série alternée

2. Ecrire le théorème du critère spécial de convergence des séries alternées

3. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = x$

Exercice 1 : Algèbre Linéaire

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

1) *les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M*

2) *la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.*

Autrement dit, une matrice appartient à $\mathcal{D}_n$ lorsque ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

   (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4. (a) Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{D}_n$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$

   (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. (on pourra utiliser Q2)

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
   Cette matrice est-elle diagonalisable?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
   En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

7. On s'intéresse au cas $t = -1/2$.

   (a) Montrer que $M(-1/2)$ est une matrice trigonalisable.

   (b) Montrer que $M(-1/2)$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (On donnera une matrice de passage avec, si possible, les coefficients de la première ligne tous égaux à un)

Exercice 2: Une fonction définie avec une intégrale

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$
3. On cherche un équivalent de $F(x)$ en 0^+
   (a) Rappeler l'égalité des accroissements finis
   (b) Montrer que $\forall x \in]0,1]$, $\left| \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{dt}{t} \right| \leqslant 1$
   (c) En déduire que $F(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$
4. On cherche un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ est convergente
   (b) Montrer que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{x}.F(x)$
   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$
5. Déterminer, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}.\frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge

Exercice 3 : A propos de certaines séries entières

Les parties 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes

Préliminaire

1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$
2. En déduire le rayon et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} n.x^n$

Partie 1: des résultats sur les séries doubles

On considère dans cette question des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est à dire du type $(a_{i,j})_{\in(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$ et $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle que si $(a_{i,j})_{\in(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombre réels telle que la somme $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}|$ est finie alors les sommes $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$ et $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

1. Soit $x \in]-1, +1[$
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{nx^n}{1 - x^n}$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{1 - x^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} nx^{n(1+k)}$
   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{p \geqslant 1} \dfrac{x^p}{(1 - x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{nx^n}{1 - x^n}$
2. Un contre-exemple.

   On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j \end{cases}$

   (a) Montrer l'existence de $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
   (on pourra commencer par calculer à i fixé dans $\mathbb{N}$ la somme $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j}$)
   (b) Montrer l'existence de $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur
   (c) A-t-on $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_{i,j}$

Partie 2

On s'intéresse dans cette partie à la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dbinom{2n}{n}.x^n$ dont on note R le rayon de convergence

1. Déterminer R
2. Montrer que $\forall x \in]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}[$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{2n}{n}.x^n = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x}}$
3. Montrer que $\forall x \in]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}[-\{0\}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}.\frac{x^n}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$
4. En déduire que $\forall x \in]-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}[-\{0\}$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} .x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} - 1 \right)$$
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2n+2}{n+1}$$

Corrigé de l'exercice 1

1. On sait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale.
(En effet $\chi_T(X) = (X - t_{11})(X - t_{22}) \dots (X - t_{nn})$)
Conclusion : $\boxed{\text{Les matrices triangulaires de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$

2. Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Notons $N = M + \alpha.I_n = (n_{ij})$
   - Comme $M \in \mathcal{D}_n$ on a les valeurs propres de M qui sont les termes de sa diagonale, c'est à dire $sp(M) = \{m_{ii} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$
   - On a
   $$\chi_N(X) = \chi_{M+\alpha I_n}(X) = \det(X.I_n - M - \alpha.In) = \det((X-\alpha).I_n - M) = \chi_M(X - \alpha)$$
   et ainsi on a l'équivalence
   $$\lambda \text{ valeur propre de } N \iff \lambda + \alpha \text{ valeur propre de } M$$
   donc les valeurs propres de N sont les valeurs propres de M augmentés de α, ce qui nous permet d'écrire que $sp(N) = \{m_{ii} + \alpha | 1 \leqslant i \leqslant n\}$
   - Or on a $n_{ii} = m_{ii} + \alpha$, donc $sp(N) = \{n_{ii} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$, ce qui est la définition de $N \in \mathcal{D}_n$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice de } \mathcal{D}_n\text{, la matrice } M + \alpha I_n \text{ est encore un élément de } \mathcal{D}_n}$

3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) $K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n.
   Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice } K_n \text{ n'appartient pas à } \mathcal{D}_n}$

   (b) Considérons les matrices carrées d'ordre n suivantes:
   - A matrice triangulaire inférieure qui possède des 0 sur la diagonale et des 1 en dessous de la diagonale.
   - B matrice triangulaire supérieure qui possède des 1 sur la diagonale et au dessus de la diagonale

   Comme A et B sont des matrice triangulaires, d'après la question 1 on peut affirmer qu'elles appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
   Cependant, on sait que $A + B = K_n$ n'est pas un élément de $\mathcal{D}_n$ d'après la question ci-dessus.
   On peut en conclure que $\boxed{\mathcal{D}_n \text{ n'est pas un sev}}$ car la somme de deux éléments de $\mathcal{D}_n$ ne donne pas toujours un élément de $\mathcal{D}_n$

4. (a) Notons $M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$
   On a $\chi_M(X) = X^2 - zX + xy = X(X - z) + xy$.
   On en déduit les équivalences suivantes:

   $M \in \mathcal{D}_n$ ssi (les seules racines de $\chi_M(X)$ sont 0 et z) ssi $\chi_M(X) = X(X - z)$ ssi $xy = 0$ ssi ($x = 0$ ou $y = 0$)
   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{D}_2 \text{ ne contient pas d'autre élément} \\ \text{que les matrices triangulaires de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ .} \end{array}}$

   (b)
   - Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$.
   D'après $Q2$, on sait que $M - a.I_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d - a \end{pmatrix}$ sera encore dans $\mathcal{D}_2$.
   A la question précédente, on a montré que ceci impliquait que $b = 0$ ou $c = 0$.
   On vient de montrer si $M \in \mathcal{D}_2$ alors M est une matrice triangulaire.
   - Comme la réciproque a été établie en Q1, on a bien montré que $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

5. On vérifie que les valeurs propres de A sont 3, 2 et 4 avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
On pourra calculer le polynôme caractéristique et vérifier qu'il est égal à $(X-2)(X-3)(X-4)$ (cela se fait sans problème)

Je propose ici une autre solution plus originale

Pour cela il suffit de vérifier que $\chi_A(2) = \chi_A(3) = \chi_A(4) = 0$. On peut faire ceci sans calculer le polynôme caractéristique de manière général! en effet:
$\chi_A(3) = det(A - 3I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ car deux colonnes sont identiques
$\chi_A(2) = det(A - 2I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ car deux colonnes sont identiques
$\chi_A(4) = det(A - 4I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ par Sarrus par exemple.
A ce stade, on sait que 2,3 et 4 sont **des** valeurs propres de A.
Comme A est d'ordre 3, elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes, on peut affirmer que $sp(A) = \{2{,}3{,}4\}$. On a bien vérifié que $A \in \mathcal{D}_3$
Comme A possède trois valeurs propres distinctes et qu'elle est d'ordre 3, on sait par théorème (**condition suffisante de diagonalisabilité**) que A est diagonalisable et que chaque sep est de dimension un.
Conclusion : $\boxed{A \in \mathcal{D}_3 \text{ et est diagonalisable}}$

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 + t \\ 0 & 2 & -1 - t \\ 1 & 1 & 4 + 2t \end{pmatrix}$.
   (a) Un calcul de déterminant donne $\chi_{M(t)}(X) = (X - 2)(X - 3)(X - 4 - 2t)$
   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } M(t) \text{ sont } 2, 3 \text{ et } 4 + 2t}$
   Conclusion : $\boxed{M(t) \in \mathcal{D}_3 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}}$

   (b)
   - **Si** $4 + 2t \neq 2$ ($\iff t \neq -1$) **ET** $4 + 2t \neq 3$ ($\iff t \neq -1/2$)
   alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable (même raisonnement qu'à la question 5)

   - <u>Si $t = -1$</u> : On a 3 valeur propre simple et 2 valeur propre double.
   Comme 3 est vp simple on a $\dim E_3 = 1$
   Une recherche de sep classique donne $E_2 = \text{Vect}((1{,}1{,}0), (0{,}0{,}1))$.

On a $\dim E_2 + \dim E_3 = 3$. **On reconnait la cns de diagonalisabilité**.
Conclusion : $\boxed{M(-1) \text{ est diagonalisable}}$

- Si $t = -1/2$: On a 3 valeur propre double et 2 valeur propre simple.
  On sait donc sans calcul que $\dim E_2 = 1$
  Un recherche classique de sep donne $E_3 = \text{Vect}(-1,1,-2)$
  Ainsi $\dim E_3 + \dim E_2 \neq 3$, on peut conclure que $M(-1/2)$ n'est par diagonalisable
  Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur de } t \text{ pour laquelle } M(t) \text{ n'est pas diagonalisable est } t = -1/2}$

7. (a) Pour $t = -1/2$, le polynôme caractéristique est $(X-3)^2(X-2)$.
   Comme il est scindé sur $\mathbb{R}$, on sait par théorème que $M(-1/2)$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$
   (b) Il s'agit d'utiliser la méthode classique, si souvent vue en exercice et en rdm , et qu'il faut maitriser. Il fallait trouver $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 2

1. - Soit $x > 0$ fixé.
   La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{\infty} f(t)dt$ est généralisée en $+\infty$ uniquement.
   Comme $f(t) = o_{+\infty}(e^{-t})$ et que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$, par comparaison on peut affirmer que f est intégrable en $+\infty$.
   Ceci prouve que l'intégrale existe bien pour tout $x > 0$, càd que F est définie sur $]0, +\infty[$
   - Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.
   D'après le **théorème fondamental de l'analyse**, on peut dire comme f est continue sur $]0, +\infty[$ que G est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que c'est une primitive de f. (càd $G' = f$)
   On a $\forall x > 0, F(x) = F(1) - G(x) \quad (*)$
   ceci permet d'affirmer que F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que
   $$\forall x > 0, F'(x) = -G'(x) = -f(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

2. (a) $\boxed{\lim_{x\to+0^+} F(x)}$
   Soit $x \in]0,1]$.
   Pour tout $t \leqslant 10$, on a $e^{-t} \geqslant e^{-1}$ donc
   $$\forall t \in]x,1], \frac{e^{-t}}{t} \geqslant \frac{e^{-1}}{t}$$
   Par croissance de l'intégrale, cela donne
   $$\int_x^1 f(t)dt \geqslant \int_x^1 \frac{e^{-1}}{t}dt = -e^{-1}.\ln x$$
   Ainsi
   $$\forall x \in]0,1], -G(x) \geqslant -e^{-1}.\ln x$$
   Comme $\lim_{x\to0^+} -\ln x = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to0^+} -G(x) = +\infty$
   et donc avec $(*)$ cela donne $\boxed{\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty}$

   (b) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)}$
   Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge, on sait que ceci signifie que $\lim_{T\to\infty} \int_1^T f(t)dt = l$ existe et est finie.
   (cette limite est alors notée $l = \int_1^{\infty} f(t)dt$).
   Par la relation de Chasles, on a
   $$F(x) = \int_1^{\infty} f(t)dt - \int_1^x f(t)dt = l - \int_1^x f(t)dt$$
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt = l$, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = l - l = 0}$
   rem: ici, il est INDISPENSABLE de préciser dans votre rédaction que l est finie

3. (a) **Egalité des accroissements finis:**
   Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$
   (b) Soit $x \in]0,1]$.
   - On commence par du classique: utilisation de **la linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire intégrale**
   $$\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^1 \frac{dt}{t}\right| = \left|\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt\right| \leqslant \int_x^1 \left|\frac{e^{-t}-1}{t}\right| dt$$
   Pour $t \in]x,1]$, on a $t > 0$ et donc
   $$\left|\frac{e^{-t}-1}{t}\right| = \frac{1-e^{-t}}{t}$$
   Ainsi
   $$\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^1 \frac{dt}{t}\right| \leqslant \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}.dt$$
   - Nous allons maintenant utiliser **l'égalité des accroissements finis** à la fonction $\theta : t \mapsto e^{-t}$ sur l'intervalle $[0,t]$ avec $t > 0$ fixé
   Ainsi il existe $c \in]0,t[\subset]0,1[$ tel que $\theta(0) - \theta(t) = \theta'(c).(0-t)$ càd
   $$1 - e^{-t} = t.e^{-c}$$
   Comme $c > 0$ on a $e^{-c} < 1$ et ainsi
   $$1 - e^{-t} < t$$
   - Comme $\forall t \in [x,1], \dfrac{1-e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{t}{t} = 1$, on a par croissance de l'intégrale
   $$\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}.dt \leqslant \int_x^1 1.dt = 1 - x$$
   On a montré au final que
   $$\forall x \in]0,1], \left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^1 \frac{dt}{t}\right| \leqslant 1 - x \leqslant 1$$

(c) • Soit $x\in]0,1]$

On remarque que $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}.dt = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}.dt + \int_\infty^1 \frac{e^{-t}}{t}.dt = F(x) - F(1)$

et que $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$

On a donc prouvé à la question précédente que

$$|F(x) - F(1) + \ln x| \leqslant 1$$

En divisant par $-\ln x > 0$ cela donne

$$0 \leqslant \left| \frac{F(x)}{-\ln x} + \frac{F(1)}{\ln x} - 1 \right| \leqslant \frac{-1}{\ln x}$$

• Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\ln x} = 0$, on a par **le théorème des gendarmes**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{F(x)}{-\ln x} + \frac{F(1)}{\ln x} - 1 = 0$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(1)}{-\ln x} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{-\ln x} = 1$

ce qui prouve que $\boxed{F(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x}$

4. (a) On fait la même preuve que pour Q1

(b) Soit $x > 0$. On a

$$\forall t \geqslant x, t^2 \geqslant xt > 0$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty$, on a

$$\forall t \geqslant x, \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{xt}$$

Comme $e^{-t} > 0$, cela donne

$$\forall t \geqslant x, \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{xt}$$

La **croissance de l'intégrale** permet alors d'écrire

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leqslant \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{xt} dt = \frac{1}{x} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{1}{x} F(x)$$

(c) • Soit $x > 0$

On réalise une **intégration par parties** en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = e^{-t}$.

Soit $T > 0$, on a donc

$$\int_x^T \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^T - \int_x^T \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

En faisant tendre $T \to \infty$ (on a tous les termes qui convergent), on obtient

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2}$ étant positive, on peut écrire d'après Q4(b)

$$0 \leqslant \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{x}.F(x)$$

càd

$$0 \leqslant \frac{\displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt}{F(x)} \leqslant \frac{1}{x}$$

En faisant tendre $x \to +\infty$, par le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt}{F(x)} = \frac{\displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt}{F(x)} = 0$$

on a prouvé que

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o_\infty(F(x))$$

• La formule obtenue par l'intégration par parties s'écrit alors

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + o(F(x))$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}$$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

• la fonction $f : t \mapsto e^{-t}.\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en ses 2 bornes

• $\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt}$

On a $f(t) \underset{0^+}{\sim} 1.\dfrac{t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$.

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ est C^0 sur $]0,1]$, de **signe stable**, on sait alors par la **régle des équivalents** que $\displaystyle\int_0^1 f$ et $\displaystyle\int_0^1 g$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_0^1 g$ est une intégrale de Riemann de référence qui converge ssi $\alpha - 1 < 1$.

$\boxed{\text{Conclusion: } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \text{ converge ssi } \alpha < 2}$

• $\boxed{\text{Nature de } \displaystyle\int_1^\infty f(t)dt}$

Il est clair que $f(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$

En effet

$$\lim_{t\to\infty} t^2.f(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}.\sin(t).t^{2-\alpha} = 0 \qquad \textbf{d'après Théorème Croissances Comparées}$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, on en déduit par comparaison que f est intégrable en $+\infty$

$\boxed{\text{Conclusion: } \int_1^{\infty} f(t)dt \text{ converge toujours}}$

- Conclusion générale: $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{\infty} f(t)dt \text{ converge ssi } \alpha < 2}$

Corrigé de l'exercice 3

préliminaire

1. $\boxed{\text{Rayon}=1}$ et $\boxed{\forall x \in]-1,+1[, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}}$
2. - On sait par théorème que $Rayon(\sum a_n x^n) = Rayon(\sum n a_n x^n)$.
   On a donc ici $\boxed{Rayon(\sum n.x^n) = Rayon(\sum x^n) = 1}$
   rem: on pouvait également utiliser le critère de D'Alembert ou revenir à la définition du rayon

   - **Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières** permet d'écrire que
     i) la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est C^{∞} sur $]-R,+R[=]-1,+1[$
     ii) sur cet intervalle, la dérivation est obtenue par dérivation terme à terme, c'est à dire

$$\forall x \in]-1,+1[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n.x^{n-1}$$

Cela donne en multipliant par x

$$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x.S'(x) = x.\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Partie 1

1. Soit $x \in]-1,+1[$

(a) - Comme $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ on a $1 - x^n \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ et donc $\dfrac{n.x^n}{1-x^n} \underset{n\to\infty}{\sim} n.x^n$
Comme $x \in]-1,+1[$ et que $Rayon(\sum nx^n) = 1$, on sait que $\sum nx^n$ est ACV.
La **règle des équivalents** permet alors d'affirmer que $\sum \dfrac{n.x^n}{1-x^n}$ est ACV.

$\boxed{\text{Conclusion :} \sum \dfrac{n.x^n}{1-x^n} \text{ converge}}$

- Soit $n \geqslant 1$.
Comme $x \in]-1,+1[$, on a $|x^n| < 1$ et donc d'après le préliminaire

$$\frac{x^n}{1-x^n} = x^n.\frac{1}{1-x^n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (x^n)^k = x^n \sum_{k=0}^{\infty} x^{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{n(k+1)}$$

- On a donc bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n.\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n.\sum_{k=0}^{\infty} x^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nx^{n(k+1)}$$

(b) - On a $\dfrac{x^p}{(1-x^p)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} x^p$.
Comme $\sum x^p$ est une série ACV (car série géométrique de raison x avec $|x| < 1$), on peut affirmer que $\sum \dfrac{x^p}{(1-x^p)^2}$ est aussi ACV

- D'après la formule établie en préliminaire, on peut écrire

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n.(x^p)^n = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n.x^{pn}$$

Le changement d'indice $p = k+1$ donne

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n.x^{(k+1)n}$$

D'après le rappel, comme $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |n.x^{(k+1)n}|$ est finie (car vaut $\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{|x|^p}{(1-|x|^p)^2)}$ qui converge), on peut permuter les deux signes Σ

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n.x^{(k+1)n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nx^{n(k+1)}$$

on remarque que pour $n = 0$ le terme est nul, ce qui permet de retrouver le résultat précédent

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nx^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$$

2. (a) Soit $i \in \mathbb{N}$ fixé.
On a

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j>i} \frac{1}{2^{j-i}} = -2 + \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = -2 + \frac{1}{1-1/2} = 0$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0}$$

(b) - Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé.
On doit distinguer 2 cas
i) **cas** $j = 0$.
On a $\sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=1}^{\infty} 0 = -1$
ii) **cas** $j > 0$.
On a

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}}$$

Le changement d'indice $k = j - i$ donne

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} = -1 + \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1-(1/2)^{j+1}}{1-1/2}$$

et donc
$$\sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j} = \frac{-1}{2^j}$$

- On a ainsi
$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j} = -1 - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = -1 - (\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1) = -2$$

(c) NON!

Partie 2

1. La règle de D'Alembert donne $R = 1$
2. On utilise le DSE de $(1+X)^{\alpha}$ avec $\alpha = -1/2$.
On simplifie les produits qui apparaissent avec des factorielles (toute ceci a été fait en classe!), et l'on trouve
$$\forall |X| < 1, (1+X)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} X^n$$
Soit $x \in]-1/4, +1/4[$.
On a alors $|4x| < 1$ et d'après l'égalité ci-dessus on a donc
$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$$
3. Comme la série $\sum_{n=\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$ converge sur $]-1/4, +1/4[$, on en déduit que son rayon est supérieur ou égal à $1/4$.
Soit $x \in]-1/4, +1/4[$.
Le théorème de primitivation terme à terme des séries entières permet d'écrire
$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-4t}}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \binom{2n}{n}t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
D'autre part, un calcul de primitive donne
$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-4t}}dt = \int_0^x (1-4t)^{-1/2}dt = \left[\frac{-1}{4}.2(1-4t)^{1/2}\right]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$
On en déduit donc que pour tout $x \in]-1/4,1/4[^*$ on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$
4. L'idée consiste ici à effectuer **le produit de Cauchy des séries entières** de Q2 et Q3 !
Notons $b_n = \binom{2n}{n}$ et $a_n = \frac{1}{n+1}.\binom{2n}{n}$.
Notons $\sum c_n.x^n$ le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.
   - On a pour tout $n \geqslant 0$
   $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.\binom{2k}{k}.\binom{2(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.\binom{2k}{k}.\binom{2n-2k}{n-k}$$
   - Comme $Rayon(\sum a_n x^n) \geqslant 1/4$ et $Rayon(\sum b_n x^n) \geqslant 1/4$, on sait que $Rayon(\sum c_n x^n) \geqslant 1/4$
   - On a alors par théorème pour tout $x \in]-1/4,1/4[$
   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$
   càd pour tout $x \in]-1/4,1/4[^*$
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.\binom{2n-2k}{n-k}.x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right)$$
5. On a d'après Q1
$$\forall x \in]-1/4,1/4[, \frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$$
et donc
$$\forall x \in]-1/4,1/4[^*, \frac{1}{2x}.\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^{n-1}$$
Le glissement d'indice $n \leftarrow n-1$ donne
$$\forall x \in]-1/4,1/4[^*, \frac{1}{2x}.\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2(n+1)}{n+1}x^n$$
On a donc avec Q4
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.\binom{2n-2k}{n-k}.x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2(n+1)}{n+1}x^n = \frac{1}{2x}.\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)$$
L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients!
Ce qui donne
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.\binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1}$$

Questions de cours

1. $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est une série alternée lorsque $\forall n \geqslant n_0, u_n.u_{n+1} > 0$.
Ceci équivaut à dire que le terme général est de la forme $(-1)^n.u_{n_0}$ ou $(-1)^{n+1}.u_{n_0}$
2. Soit $\sum u_n$ une série alternée.
Si la valeur absolue du terme général (càd la suite $(|u_n|)$) décroit est tend vers 0 alors la série est convergente (il y a aussi 3 autres conclusion… voir le cours!)
3. La solution générale est $x \mapsto \frac{x}{5} + \frac{4}{25} + A.e^{2x}.\cos x + B.e^{2x}.\sin x$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$