1 Algèbre linéaire

premières propriétés des matrices

ALG 1 (pivot)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On s'intéresse au système linéaire $AX = B$

1. Montrer que la matrice A n'est pas inversible. Qu'en déduit-t-on sur l'ensemble des solutions du système?
2. Montrer que système possède des solutions si et seulement si les coefficients de B sont en progression arithmétique.
3. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

ALG 2 (puissance de matrice)
On donne la matrice 3×3 à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que pour tout entier naturel n il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$
   et justifier la relation de récurrence $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.
2. Quelle est la nature de la suite (a_n)? Déterminer a_n par la méthode au programme et en déduire l'expression de A^n.

ALG 3 (inverse)
Pour tout t réel, on pose $U_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $U_s \times U_t$.
2. En déduire que pour tout t réel, U_t est inversible et exprimer $(U_t)^{-1}$
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer D^2 et D^3, puis exprimer U_t comme combinaison linéaire de D,D^2,D^3 et I.

ALG 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer la puissance $n-$ième de A

ALG 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 4A^2 + 2A - 3I_n = O$.
A est-elle inversible? si oui, donner son inverse

ALG 6
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0$ et $A^4 \neq I_n$
A est-elle inversible?

ALG 7
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer 2 réels α et β tels que $A = \alpha.I_3 + \beta.J$.
2. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles telles que $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,0)$ et $\forall n \geqslant 0$, $\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n \end{cases}$

   Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n

ALG 8 (matrice inversible)
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = A + B$.

1. Montrer que $A - I_n$ est inversible et déterminer $(A - I_n)^{-1}$.
2. A-t-on $AB = BA$?

ALG 9 (inconnue matricielle, inconnue scalaire)
Soit A et $B \neq 0$ deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'équation $(E):\ M + \mathrm{tr}(M).B = A$ où M est une matrice inconnue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résoudre cette équation!

ALG 10 (formule du produit matriciel)
Soit $M = (m_{pq})$ la matrice complexe d'ordre n définie par $m_{pq} = a^{(p-1)(q-1)}$ où $a = \exp(i\frac{2\pi}{n})$
Déterminer M^2

ALG 11 (matrice inversible et rang)
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer $(AB)^2$ puis montrer que $BA = I_2$

ALG 12 (inversibilité à droite)
Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A.B$
2. Peut-on alors affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = B$?

ALG 13
Soit A une matrice carrée pour laquelle $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_n$
A-t-on pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, A^k inversible? et si oui, que vaut $(A^k)^{-1}$

ALG 14 (calcul de la puissance n-ième d'une matrice)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3, puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$

ALG 15
On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On considère les bases $\mathcal{B} = (X^3,X^2,X,1)$ et $\mathcal{B}' = ((X+1)^3,(X+1)^2,X+1,1)$.
Ecrire $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

ALG 16 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On note $P(X) = X^2 - X - 2$. Calculer $P(A)$
2. Déterminer les racines du polynôme P
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
4. En déduire que $A^n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}A + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}I_3$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Pourriez-vous proposer une autre méthode de calcul de A^n?

ALG 17 (propriétés conservées par la multiplication avec une matrice inversible)
On considère les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang et le déterminant des matrices A, B et C.
2. Sans calcul: existe-t-il une matrice carrée X telle $XB = A$?
3. Sans calcul: existe-t-il une matrice carrée Y telle que $YA = B$?
4. Existe-t-il une matrice carrée Z telle que $ZC = A$?

ALG 18 (matrice nilpotente)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0$ (une telle matrice A est dite *nilpotente*.)
Plus précisément, si A est une matrice nilpotente non nulle, on appelle *indice de nilpotence de* A le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

1. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 3.
   D'une manière générale, donner une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes alors en général $A + B$ n'est pas nilpotente
3. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et qui commutent alors $A + B$ et AB sont également nilpotentes
4. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
5. Montrer que si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible.(on pourra considérer $\ker(I_n - A)$
6. On va déterminer l'inverse de $I_n - A$ dans un cas particulier. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer A^2 et A^3, ainsi que $I_3 + A + A^2$
   (b) Déterminer, par la méthode de votre choix, $(I_3 - A)^{-1}$
   (c) Que constate-t-on?
7. On retourne au cas général. A partir de l'exemple ci-dessus, quelle formule de $(I_n - A)^{-1}$ peut-on conjecturer? Le vérifier!

ALG 19 (calcul de la puissance n-ième d'une matrice)
.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et donner son inverse.

2. Calculer successivement $P^{-1}.A.P$, $(P^{-1}.A.P)^n$ et A^n pour $n \in \mathbb{N}$

ALG 20 (puissance de matrice)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$
2. Montrer que la famille (A,A^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique couple (a_n,b_n) de nombres réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n pour tout entier $n \geqslant 1$

ALG 21
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer B^n en fonction de B pour $n \in \mathbb{N}^*$
   (b) Exprimer A en fonction de B et de I_3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
2. (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe 2 réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n.A + b_n.I_3$
   (c) Déterminer a_n,b_n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Application trace

ALG 22
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))\mathbb{K}$ telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(BA)$.
On note E l'ensemble de ces applications f.
On souhaite déterminer E.

1. Montrer que E est un espace vectoriel
2. (a) A quoi est égal $E_{ij}.E_{kl}$? (produit de deux matrices élémentaires)
   (b) En déduire que si f appartient à E alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}, f = \lambda.\operatorname{tr}$
3. Conclure

ALG 23
Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1).P' \end{array}$ dans la base $(1,X,X^2)$.
En déduire $\operatorname{tr}(f)$

ALG 24
On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. En déduire la trace de f

ALG 25
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donner un supplémentaire de $\ker(\operatorname{tr})$ dans E

ALG 26
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n. On considère une base $\mathcal{B}$ de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang un

1. Montrer qu'il existe deux matrices unicolonnes X et Y telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = X.Y^T$
2. En déduire que $u^2 = \operatorname{tr}(u).u$

Familles de vecteurs, combinaisons linéaires

ALG 27
Soient $\vec{u} = (1,1,0,0), \vec{v} = (-2,1,3,2)$ et $\vec{w} = (1,0,-1,1)$.
Le vecteur $\vec{t} = (-1,2,2,0)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$?

ALG 28
Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $\operatorname{vect}(v,w)$ avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$

ALG 29 (dans un espace de polynômes)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (1,X-a,(X-a)^2,\ldots,(X-a)^n)$.
Montrer que $\operatorname{vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_n[X]$

ALG 30 (dans un espace de fonctions)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nx)$.
Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^4 x$.
Montrer que $g \in \operatorname{vect}(f_0,f_2,f_4)$

ALG 31 (Familles génératrices)
Indiquer si les familles suivantes sont génératrices de l'e.v. E

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{(1,2,3),(1,0,1)\}$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2+X, X^2+3X-1\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F} = \{1,X\}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{1,X,X^2,X^3\}$
6. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^3-2X, X^2-2X, -2X, 1\}$
7. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
8. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{\sin, \cos, \exp\}$

ALG 32 (Familles libres, rang)
Indiquer si les famille suivantes sont des familles libres de l'e.v. E

1. $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}\}$
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2-2X, 2X^2-4X\}$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2-2X, X-2\}$
4. $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^3, X^2-4X, 2\}$
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = \{X^2+2X, X^2+X, X^2-1\}$

6. $E=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\}$
7. $E=\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{F}=\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

ALG 33
On note $E=\mathbb{R}^4$ et $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}, u_4=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\a\end{pmatrix}$ et $u_5=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$

1. Déterminer une base et la dimension de $F_1=\text{vect}(u_1,u_2)$
2. A-t-on $u_5\in F_1$? Donner le rang de la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_5)$
3. Déterminer a tel que $u_4\in F_1$.
   A partir de maintenant a prendra cette valeur.
4. Justifier que $F_2=\text{vect}(u_3,u_4)=F_1$

ALG 34 (Familles libres)
1. Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $n\geqslant 1$ un entier
   Pour tout entier k on note $f_k : \begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & t^k\end{array}$.
   Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre
2. Soit $E=C^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et $n\geqslant 1$ un entier
   Pour tout entier k on note $f_k : \begin{array}{rcl}[0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \cos^k t\end{array}$.
   Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre
3. Montrer que la famille $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ où $P_j=\prod_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{i=n}(X-i)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

ALG 35
Montrer que l'ensemble de suites qui vérifient la relation $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-u_{n+1}+2.u_n=0$ est un ev de dimension 2

ALG 36
On considère $E=\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(\arccos,\arcsin,1)$ est une famille liée.
rem: ci-dessus le '1' désigne la fonction constante égale à un

ALG 37
On considère les trois suites complexes définies par:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1,\quad v_n=j^n,\quad w_n=\overline{j}^n \qquad \text{où } j=\exp(2i\pi/3)$$

1. Montrer que la famille $((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}},(w_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
   On note F le sous espace vectoriel engendré par ces trois suites.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}, \alpha_n=\cos(2n\pi/3)$ est une suite appartenant à F

ALG 38
Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ où

$$f_1 : x\mapsto\cos x \qquad f_2 : x\mapsto\cos^2 x \qquad f_3 : x\mapsto\cos(2x) \qquad f_4 : x\mapsto\sin^2 x \qquad f_5 : x\mapsto 1$$

ALG 39
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E tel que $f^2=-id$.
1. soit $\vec{a}\neq\vec{0}$. Montrer que $(\vec{a},f(\vec{a}))$ est une famille libre. Que dire dans le cas $n=2$?
2. on suppose $n>2$. Soit $(\vec{a},f(\vec{a}),\vec{b})$ une famille libre , montrer que $(\vec{a},f(\vec{a}),\vec{b},f(\vec{b}))$ est une famille libre.
3. dans le cas $n=4$, en déduire une matrice associée à f.
4. que dire dans le cas $n=5$?

ALG 40 (Famille libre)
On considère une matrice $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p. *(càd que $N^p=0$ et $N^{p-1}\neq 0$)*
Montrer que $(I_n,N,N^2,\ldots,N^{p-1})$ est une famille libre

ALG 41
Soit $n\geqslant 1$. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$
Pour tout $i\in\mathbb{N}$, on note $f_i : \begin{array}{rcl}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(i)\end{array}$
1. Montrer que f_i est une application linéaire
2. Montrer que $(f_0,f_1,\ldots,f_n,f_{n+1})$ est une famille liée.
3. Montrer que $(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ est une famille libre
4. Justifier que $\forall g\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K}), \exists!\,(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}, g=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i.f_i$

ALG 42 (interpolation et polynômes de Lagrange)
1. Soit x_1,x_2 et x_3 trois réels distincts. Donner g polynôme de degré 2 vérifiant $g(x_1)=g(x_2=0$ et $g(x_3)=1$
2. Soient $x_1,x_2,\ldots,x_n$, n réels distincts, et $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ une famille de n polynômes de degré $n-1$ vérifiant $f_i(x_i)=1$ et $f_i(x_j)=0$ pour $j\neq i$
   (a) Expliciter les f_i et reconnaître $f_1+\cdots+f_n$
   (b) Montrer que $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Soit $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme f de degré strictement inférieur à n tel que

$$f(x_1)=y_1 \qquad f(x_2)=y_2 \qquad \ldots \qquad f(x_n)=y_n$$

   On écrira f comme combinaison linéaire des f_i

Sous-espaces vectoriels

ALG 43
Soit $Q\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul fixé.
On note $F_Q=\{Q.P\,|\,P\in\mathbb{K}_n[X]\}$.
Montrer que F_Q est un sev de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$ et donner sa dimension

ALG 44
On note $F=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,M^T=M+\text{tr}(M).I_2\}$.
Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en donner une base

ALG 45
Soient $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - t = 0\}$ et $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | z - t = 0\}$.
On considère $C = A \cap B$.

1. Justifier de deux manières différentes que A est un sev de $\mathbb{R}^4$, et en donner une base.
2. Donner la dimension de B (on admet que c'est un sev)
3. A et B sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. Donner une base de C. A-t-on $A + B = \mathbb{R}^4$?
5. On note $D = \text{vect}((1,1,1,0),(0,1,0,1))$. Définir D à l'aide d'un système d'équations.

ALG 46
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul fixé.
On note $F_Q = \{Q.P \,|\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.
Montrer que F_Q est un sev de $\mathbb{K}[X]$

ALG 47
On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X], 2.P(X+1) = X.P'\}$

1. Montrer que si P est un polynôme NON nul de F alors $\deg(F) = 2$
2. Montrer que F est un sev de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base

ALG 48

1. Montrer que $F = \{aX^2 + (a+b)X + 2b \,|(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
2. Montrer que $F = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum\limits_{i=1}^{n} i.a_i = 0\}$ est un espace vectoriel
3. Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}\}$ est un espace vectoriel
4. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$
5. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t).dt\}$ est un espace vectoriel
6. Montrer que l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $y'' + y = y(0)$ est un espace vectoriel

ALG 49
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension

ALG 50
On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Pour tout couple de réels (λ,μ) on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda.t + \mu^2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda.t + \mu \end{array}}$
On note $F = \{f_{\lambda,\mu} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{g_{\lambda,\mu} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F n'est pas un sev de E
2. (a) Montrer que G est un sev de E
   (b) On considère $e_1 = g_{1,0}$ et $e_2 = g_{0,1}$
      i. Justifier que (e_1,e_2) est une base de G
      ii. Donner $\dim G$
      iii. Montrer que G est la stable $\circ$

ALG 51
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, AM = MA\}$ *(on l'appelle le commutant de A (HP))*

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel, stable par le produit interne.
   $\mathcal{C}_A$ peut-il être réduit au vecteur nul?
2. Que vaut $\mathcal{C}_{I_n}$?
3. Que peut-on dire de $\mathcal{C}_A$ lorsque A est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
4. Etude d'un cas particulier.
   Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On note $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Déterminer le commutant de A

ALG 52
Montrer que les ensembles suivants sont des sev et donner leur dimension

$$F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \qquad G = \{\begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ b & a+b & c \\ 0 & a-b & c \end{pmatrix} \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

ALG 53
Soit E un ev de dimension finie.
On considère H un hyperplan de E et F un sev de E de dimension p.
Montrer que $F \cap H$ est un sev de dimension $p-1$ ou p

Somme de sev

ALG 54
On note E l'ensemble des matrices 2×2 symétriques à coefficients réels, et F l'ensemble des matrices diagonales.
On considère également $G = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$.
Montrer que $E = F \oplus G$

ALG 55
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $m \in \mathbb{R}$.
On note $F = \{(x,y,z) \in E \,|\, x + y + z = 0\}$ et $D_m = \text{vect}((1,m,1))$.
Montrer que si $m \neq -2$ alors F et D_m sont supplémentaires dans E.
Que se passe-t-il lorsque $m = -2$?

ALG 56
Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \,|\, P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de E, et déterminer une base de F
2. Montrer que $G = \text{vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E

ALG 57
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On note

- $F_1 = \{P \in E, | \, P(1) = P'(1) = 0\}$
- $F_2 = \mathbb{R}_1[X]$

1. Déterminer une base de F_1 et une base de F_2
2. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E?

ALG 58
Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$.
On note

- $F_1=\{¶\in E, \mid P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\{P\in E, \mid \exists Q\in\mathbb{R}[X], P=X.Q\}$

1. Déterminer une base de F_1 et une base de F_2
2. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E?

ALG 59
Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\geqslant 2$
On note

- $F_1=\{P\in E, \mid P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

1. Montrer que $\dim F_1=n-1$
2. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E?

ALG 60
Soit $E=\mathbb{R}[X]$
On note

- $F_1=\{P\in E, \mid P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

1. Rappeler le théorème de la division euclidienne et en déduire que $E=F_1+F_2$
2. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E?

ALG 61 (par Analyse-Synthèse)
Soit $E=\mathbb{R}[X]$
On note

- $F_1=\{P\in E, \mid P(1)=P'(1)=0\}$
- $F_2=\mathbb{R}_1[X]$

Montrer par analyse-synthèse que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E?

ALG 62
Soit $n\geqslant 2$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On note $F=\{P\in E \mid P(2)=P(3)=0\}$ et $G=\mathrm{vect}(1,X)$

1. Rappeler la dimension de E et donner celle de G
2. Déterminer une base et la dimension de F
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E

ALG 63
Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $F_n=\mathrm{vect}(A^0,A^1,\dots,A^n)=\mathrm{vect}((A^k)_{0\leqslant k\leqslant n})$

1. Justifier que $\dim F_n\leqslant 4$ pour tout n
2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2=a.A+b.I_2$
3. Montrer par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}, A^k\in F_1$
4. En déduire que $\forall n\geqslant 1, F_n=F_1$

ALG 64
On considère $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0\}$

1. Montrer que F,G et $F\cap G$ sont des sev de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension
2. Trouver deux sev F_1 et G_1 tels que $\mathbb{R}^4=(F\cap G)\oplus F_1\oplus G_1$

ALG 65
On note F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et $G=\{f\in C([0,1],\mathbb{R} \mid \int_0^1 f(t)dt=0\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $C([0,1],\mathbb{R})$

ALG 66
On note:

- $E=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $F=\{f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(0)=f'(0)=0\}$
- $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi_1:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&1\end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi_2:\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&t\end{array}}$
- $G=\{a.\varphi_1+b.\varphi_2 | (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que G est un espace vectoriel et donner sa dimension. G est-il un ensemble stable par la loi de composition $\circ$?
2. En procédant par analyse-synthèse, justifier que $F\oplus G=E$
3. Donner alors la décomposition de sin .

ALG 67 (somme de n sev)
Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ et $p\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ on pose $F_k=\mathrm{vect}(X^k.Q)$.
Montrer que $F_1,F_2,\dots,F_p$ sont en somme directe
Ces espaces sont-ils supplémentaires dans E?

ALG 68 (somme de n sev)
Soit $E=\mathbb{K}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
On pose pour tout $k\in[\![O,n]\!]$ on pose $F_k=\mathrm{vect}((X-a)^k)$
Montrer que $F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n=E$

ALG 69 (somme de n sev)
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}1&3&-3\\0&2&-2\\0&4&-4\end{pmatrix}$
On note $F_1=\ker(f-id)$, $F_2=\ker(f+2id)$ et $F_3=\ker f$.

1. Sans déterminer F_1,F_2 et F_3, montrer qu'ils sont en somme directe.
2. Déterminer F_1,F_2 et F_3 puis justifier que $F_1\oplus F_2\oplus F_3=\mathbb{R}^3$

ALG 70
Soit E un ev de dimension finie n, et H un hyperplan de E.
Montrer que si $\vec{a}\notin H$ alors $H\oplus\mathrm{vect}(\vec{a})=E$

ALG 71
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels distincts de E de dimension $n-1$.

1. Montrer que $n\geqslant 2$
2. Montrer que $H_1+H_2=E$ et donner $\dim(H_1\cap H_2)$

ALG 72
On pose $F = \text{vect}((1,0,0,1)), G = \text{vect}((1,1,1,1))$ et

$$H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = z \,,\, y = t\} \qquad H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = -t \,,\, y = -z\}$$

1. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_1$?
2. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_2$?

ALG 73
On considère $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(0) = f(\pi/2) = 0\}$

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus \text{vect}(\cos) \oplus \text{vect}(\sin)$

Déterminants

ALG 74 (matrice antisymétrique et déterminant)
Soit A une matrice carrée antisymétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

ALG 75 (signe en damier)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$
Comparer $\det A$ et $\det B$

ALG 76
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u : P \mapsto a.P(X+2) + b.P(X+1) + c.P(X)$.
Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ssi $a + b + c \neq 0$

ALG 77 (classique)
Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \swarrow & \vdots \\ 0 & \swarrow & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

ALG 78 (classique)
Calculer le déterminant d'ordre n de terme général $\min(i,j)$ et celui de terme général $\max(i,j)$.

ALG 79 (déterminant de Vandermonde)
Soit $n \geqslant 2$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

On note $V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

1. Calculer $V_2(a_1,a_2)$ et $V_3(a_1,a_2,a_3)$ sous forme factorisée
2. On considère dans cette question le polynôme $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$
   (a) Que dire du degré de ce polynôme?
   (b) Que vaut le coefficient en facteur de X^{n-1}?
   (c) En déduire que $V_n(a_1, \dots, a_n) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}). \prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)$
3. Montrer que $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$

ALG 80 (est-ce vraiment un exercice sur les déterminants?)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
Nous allons montrer que $(n \neq p \Rightarrow \det(AB). \det(BA) = 0)$.
On suppose que $n < p$

1. A-t-on $\det(AB) = \det(A). \det(B)$?
2. Donner les tailles respectives des matrices AB et BA
3. Donner un majorant du rang des matrices AB et BA
4. Conclure!

ALG 81
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(X)$ la matrice d'ordre n et de coefficient général $a_{ij} + X$.

1. Montrer que $\det(A(X)) \in \mathbb{R}_1[X]$
2. Application:

   On note $A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}_n$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

   (a) Dans le cas où $a \neq b$, calculer $\det(A(-a))$ et $\det(A(-b))$, puis en déduire $\det(A)$
   (b) Dans le cas où $a = b$, calculer $\det(A)$ par le moyen de votre choix

ALG 82 (classique)
Calculer le déterminant d'ordre $2n$ suivant : $D_n = \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \swarrow & \\ 0 & & & & 0 \\ & \swarrow & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}$

ALG 83
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

ALG 84
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

1. Montrer que $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \dots, \sum_{k=1}^{n} e_k)$ est une base de E
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels.
   On note $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
   Montrer que $(e_1 + x, e_2 + x, \dots, e_n + x)$ est une base de E ssi $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq -1$

ALG 85
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.
Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on note $D_i = diag(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})$

1. Rappeler une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
2. Déterminer une cns pour que $(D_1, D_2, \dots, D_n)$ soit une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

ALG 86
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M).A \end{array}$
Calculer $\det(f)$

ALG 87
Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $P(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & 1 & 2^2 & 3^2 \\ (x+2)^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ (x+3)^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ (x+4)^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \end{vmatrix}$

1. La fonction P est-elle une fonction polynomiale? si oui, que dire de son degré?
2. Y a t il des racines évidentes de P?
3. Déterminer $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

ALG 88
Soit $(z_0,z_1,\dots,z_n)$ des complexes deux à deux distincts.
Montrer que $((X+z_k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

ALG 89
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, et a un réel.
On considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = (X^3+X^2+X+1, aX^2+X+1, 2X^2+2X+a, X+1)$
Donner une cns sur a pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E

ALG 90 (Polynômes de Bernstein)
Soit $n \geqslant 1$ fixé.
On note $P_k = \binom{n}{k}.X^k.(1-X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

ALG 91
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle.
On définit les deux endomorphismes d_A et g_A comme suit

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), d_A(M) = AM \quad \text{et} \quad g_A(M) = MA$$

1. Donner une cns sur A pour que d_A et g_A soient des automorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Calculer le déterminant de $d_A - g_A$

ALG 92 (déterminants tridiagonaux)
Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}_n$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $D_{n+2} = D_{n+1} + 2D_n$
2. En déduire l'expression de D_n en fonction de n

Applications linéaires

ALG 93
Pour chacune des applications suivantes, vérifier qu'elles sont linéaires et déterminer image et noya. Indiquer celles qui sont injectives et/ou surjectives

$$f_1(x,y) = (4x+y, x-y, 2x+3y) \qquad f_2(x,y,z) = (x+y, 0, z, x+2y)$$

ALG 94
Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Justifier que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \qquad f(e_2) = e_1 - e_2 \qquad f(e_1) + \lambda.e_3$$

définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit injective? surjective? pour que f soit un automorphisme?

ALG 95
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f

ALG 96
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c & -a \end{pmatrix} \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. f peut-elle être bijective? surjective?
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

ALG 97

1. Etude d'un cas particulier.
   Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1),P(2),P(3)) \end{array}$
   (a) Montrer que φ est un isomorphisme
   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme de $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 4, P(2) = 5$ et $P(3) = 6$
   (c) Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(1) = 1$ et $Q(2) = Q(3) = 0$. Pouvez-vous facilement le calculer?
2. Cas général.
   Soient $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$ $(n+1)$ réels distincts deux à deux. Soit $\boxed{\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_{n+1})) \end{array}}$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire surjective(!).
   (b) En déduire qu'il existe une famille unique de polynômes $(L_1,\dots,L_{n+1})$ de degré $\leqslant n$ tels que $L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

ALG 98

Soit $n \geqslant 1$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Donner le degré de $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$
3. Soit P un polynôme de degré n.
   Montrer que $(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \ldots, \varphi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
4. (a) Soient $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
   Combien existe t-il de polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient $P(X+1) - P(X) = Q(X)$? Combien en existe t-il qui vérifie en plus la condition $P(0) = 0$?
   (b) Déterminer un tel polynôme P pour $Q = X(X+1)(X+2)$ et en déduire un expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$

ALG 99

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $f(P) = \int_X^{X+1} P(t)dt$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ calculer $f(X^k)$. f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Prouver que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists!\, P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = Q$. A-t-on $\deg P = \deg Q$?
5. On note $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P'$.
   Montrer que $g \circ f = f \circ g$

ALG 100

n est un entier supérieur ou égal à un.
Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le degré de $f(X^k)$.
3. En déduire $\ker f$, $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f$.

ALG 101

Soit $n \geqslant 2$. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On pose pour tout $M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M).I_n$

1. Montrer que u est un automorphisme de E
2. Montrer que $u^2 - (n+2)u + (n+1).id_E = 0$
3. En déduire u^{-1} en fonction de u, id_E et n

ALG 102

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = 0$.

1. Etude d'un cas particulier
   On considère l'application $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z-y,0,0) \end{array}$
   (a) Vérifier que $u^2 = 0$
   (b) Trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, u(\vec{x}) = f(\vec{x}).\vec{a}$
2. Etude du cas général
   (a) Montrer que $\dim \mathrm{Im}\, u < 2$.
   (b) Montrer qu'il existe une app. linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, u(\vec{x}) = f(\vec{x}).\vec{a}$

ALG 103

Soit ϕ l'application suivante : $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & \phi_X \end{array}$ où ϕ_X est l'application qui à toute matrice M associe $\mathrm{tr}(MX)$

1. Dans le cas particulier où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donner ϕ_M ainsi que son image et son noyau.
2. Montrer que l'application ϕ est une application linéaire
3. Montrer l'équivalence $\phi_M = 0 \iff M = 0$
   (On pourra s'intéresser à $\phi_M(M^T)$)
4. Justifier que ϕ est un isomorphisme
5. On considère la forme linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + 2b + 3c \end{array}$
   Déterminer l'antécédent de f par ϕ

ALG 104

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
On pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \dfrac{1}{k!a^k} X(X-a)\ldots(X-(k-1)a)$

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. On considère $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = P(X+a) - P(X) \end{array}$.
   (a) Déterminer $f(P_k)$ pour tout k
   (b) Ecrire la matrice de f dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$
   (c) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Im}\, f^k$ et $\ker f^k$

ALG 105 (interpolation et polynômes de Lagrange)

1. Soit x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts. Donner g polynôme de degré 2 vérifiant $g(x_1) = g(x_2 = 0$ et $g(x_3) = 1$
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels distincts, et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de n polynômes de degré $n-1$ vérifiant $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$
   (a) Expliciter les f_i et reconnaître $f_1 + \cdots + f_n$
   (b) Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme f de degré strictement inférieur à n tel que
   $$f(x_1) = y_1 \qquad f(x_2) = y_2 \qquad \ldots \qquad f(x_n) = y_n$$
   On écrira f comme combinaison linéaire des f_i

Noyau et Image (abstrait)

ALG 106

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme
2. Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f - 2id_E)$.
3. On suppose que E est de dimension finie. Ecrire une matrice simple associée à f.

ALG 107
Soient f et g deux endomorphismes de E.
1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker(f) \iff \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

ALG 108
Soit f et g deux applications linéaires de $E \to G$
1. Comparer $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g)$
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

ALG 109
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = id_E$
1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - id_E) \subset \ker(f^2 + f + id_E)$
2. En déduire que $\ker(f - id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - id_E)$ sont supplémentaires dans E

ALG 110 (noyaux et images itérés)
Soit f un endomorphisme de E.
1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$
4. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$

ALG 111 (noyaux et images itérés)
Soient f et g deux endomorphismes de E, un espace vectoriel de dimension finie.
1. Prouver une inclusion entre $\ker(g)$ et $\ker(f \circ g)$, ainsi qu'une inclusion entre $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$
3. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$
   Dans la suite de l'exercice, p gardera cette définition
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$. A-t-on $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$?
5. Montrer par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{p+k}) = \mathrm{Im}(f^{p+k+1})$
6. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{p+k}) = \mathrm{Im}(f^{p+k+1})$
7. Montrer que $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E$

ALG 112
Soit E une espace vectoriel de dimension n.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n$

ALG 113
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g
(c'est à dire que $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$ et $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$)

ALG 114 (Forme linéaire)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
Soit f une *forme* linéaire sur E, càd une application linéaire de $E \to \mathbb{K}$
1. Que valent $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ si f est l'application nulle?
2. On suppose que f n'est pas l'application nulle.
   Montrer que f est surjective et que $\ker(f)$ est un hyperplan de E

ALG 115
On définit φ sur $\mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_1[X]$ à valeurs dans $\mathbb{C}_3[X]$ par $\varphi(P,Q) = (X^2+3).P + (4X-1).Q$
1. Montrer que φ est une application linéaire
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,(0,1),(X,0),(0,X))$ est une base de $\mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_1[X]$
3. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée

ALG 116 (automorphisme)
On définit l'application ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \phi(P) = X(X-1)P'(X) - (2X+1)P(X)$.
1. Prouver que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que $(X^2, X^2 - X, X^2 - 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner la matrice D de ϕ dans cette base.
3. Donner des matrices semblables à D

ALG 117
Soit E un ev de dimension 4, F un ev de dimension 3, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de rang 2.
Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{C}$ base de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ALG 118
On note f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
1. Donner l'expression de $f(x,y,z)$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et vérifier que $((1,1,-2),(1,-1,0))$ est une base de $\ker(f)$
3. On souhaite montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_{1},_{2},e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Est-il possible de choisir $e_2 = (1,1,-2)$ ou $e_2 = (1,-1,0)$?
   (b) On pose $e_2 = (1,0,-1)$.
   Déterminer des vecteurs e_1 et e_3 qui répondent au problème posé.

ALG 119
Soit un entier $n \geqslant 3$, et Δ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$
1. Montrer que $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Déterminer son image et son noyau
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$P(X+1) - P(X) = Q(X) \qquad \text{et} \qquad P(0) = \lambda$$
3. Soit P de degré n. Montrer que $(P, \Delta(P), \ldots, \Delta^2(P), \ldots, \Delta^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_[X]$

ALG 120
Soit $\boxed{\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (y+z-x).(1,0,1) \end{array}}$
On note $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}+\vec{k}, \vec{j}-\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$
1. Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$
2. Calculer l'image de la base $\mathcal{B}'$ par u et en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$

3. Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.P$

   Donner P.

ALG 121

Dans le $\mathbb{R}$ espace vetoriel $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ et $F = \mathrm{vect}\,\mathcal{B}$

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F
   (b) Montrer que F est un sev stable par la dérivation
2. (a) On note f l'endomorphisme de F induit par la dérivation et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
      i. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
      ii. Montrer que f est un automorphisme de F et calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$

ALG 122

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(-1).X.(X-2) + P(0).(X-2).(X+1) + P(2).X.(X+1) \end{array}}$

1. f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. On note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$.
   Donner A
3. On note A_1 la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = (3X^2,2X,1)$.
   (a) Donner A_1
   (b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.
   (c) Quelle relation existe-t-il entre A, A_1 et P?
4. On note $P_1(X) = X^2 - 2X$, $P_2(X) = X^2 + X$ et $P_3(X) = X^2 - X - 2$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1(X),P_2(X),P_3(X))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   (b) Ecrire la matrice de passage P' de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
   (c) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
   (d) On considère le polynôme $Q(X) = 3X^2 - 6$
      i. Quelles sont les coordonnées de $Q(X)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
      ii. Calculer $f^{2030}((Q(X)))$!

ALG 123 (classique - homothétie)

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\forall \vec{x} \in E,(\vec{x},f(\vec{x}))$ est liée.
   (a) Montrer que l'hypothèse revient à supposer que pour tout vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$ il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ (scalaire qui dépend de $\vec{x}$ a priori) tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
   (b) Soit $(\vec{x},\vec{y})$ une famille libre. En considérant le vecteur $\vec{x}+\vec{y}$ montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$
   (c) Soit $(\vec{x},\vec{y})$ une famille liée de vecteurs non nuls. Montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$
   (d) Montrer que f est une homothétie
2. On suppose que E est de dimension finie et que f n'est pas une homothétie.

   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & ? \\ 1 & ? & & ? \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$.

ALG 124 (représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent d'indice $n-1$)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Nous allons montrer qu' il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies?
   i. pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a $f^n(\vec{x}) = \vec{0}$
   ii. pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a $f(\vec{x}) = \vec{0}$
   iii. pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a $f^{(n-1)}(\vec{x}) \neq \vec{0}$
   iv. il existe un vecteur $\vec{x}_0$ de E tel que $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$
2. On va étudier le cas $n = 3$.
   On note $\vec{x}_0$ un vecteur tel que $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$
   (a) Montrer que la famille $(\vec{x}_0,f(\vec{x}_0),f^2(\vec{x}_0))$ est une famille libre de E
   (b) Justifier que cette famille est une base de E
   (c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{x}_0,f(\vec{x}_0),f^2(\vec{x}_0))$. A-t-on le résultat souhaité? Sinon donner une autre base.

ALG 125 (endomorphisme nilpotent d'ordre 2)

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n.

1. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Im}\, f = \ker f$.
   (a) montrer que n est un entier pair
   (b) déterminer le rang de f en fonction de n.
   (c) montrer que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E on a $(f \circ f)(\vec{x}) = \vec{0}$
2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}\, f$
   (a) montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$
   (b) en déduire que $\ker f = \mathrm{Im}\, f$
   (c) montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ où $p = \dfrac{n}{2}$
   (on pourra commencer par traiter le cas $n = 4$)

ALG 126

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A

1. Déterminer le rang de A et une base de $\mathrm{Im}(A)$
2. Vérifier que $f(i) \in \ker(A)$ puis déterminer une base de $\ker(A)$ contenant $f(i)$
3. A-t-on $\mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A) = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est la matrice de f dans une certaine base
5. Calculer $(I+A)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

ALG 127
Soit E un ev de dimension n, $\vec{u}$ un vecteur non nul de E et $g \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.
On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} - g(\vec{x}).\vec{u} \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$
2. Ecrire la matrice de f dans une base judicieuse, et en déduire $\operatorname{rg}(f)$

ALG 128
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est nilpotent lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
On appelle dans ce cas INDICE DE NILPOTENCE l'entier $p \geqslant 1$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$

1. Soit u un endomorphisme nilpotent et p son indice de nilpotence
   (a) Montrer que $id_E - u$ est inversible d'inverse $id_E + u + \cdots + u^{p-1}$
   (b) Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$
   (c) Montrer que $(a,u(a),\ldots,u^{p-1}(a))$ est une famille libre
   (d) On note F le sev de E engendré par cette famille. Montrer que F est stable par u
   (e) On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ de F dans laquelle la matrice de u est $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$
   (f) Montrer que $\ker(v) \subset \operatorname{Im}(v)$ et donner $\operatorname{rg}(v)$
2. Soit f un endomorphisme de E.
   On note F l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
   On suppose que $\dim E = n$ et que f est nilpotent d'indice $n-1$
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur a tel que $(a,f(a),\ldots,f^{n-1}(a))$ soit une base de E
   (b) Montrer que $(id_E,f,\ldots,f^{n-1})$ est une famille libre
   (c) Montrer que F contient $\operatorname{vect}(id_E,f,\ldots,f^{n-1})$
   (d) Soit $g \in F$.
   Montrer qu'il existe $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ tels que $g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.f^k(a)$.
   En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.f^k$
   (e) En déduire que F est un espace vectoriel de dimension n

ALG 129
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $f_k : x \mapsto e^{kx}$
On considère le $\mathbb{R}$−ev $E_2 = \operatorname{vect}(f_0,f_1,f_2)$

1. Déterminer la dimension de E_2
2. On considère l'application linéaire $\varphi : f \mapsto f'$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$
3. On note $A = \operatorname{Mat}_{(f_0,f_1,f_2)}(\varphi)$
   (a) Montrer que (I_3,A,A^2,A^3) est une famille liée et donner une relation entre ces matrices
   (b) En déduire que $\forall f \in E_2, f^{(3)} = 3.f^{(2)} - 2.f'$
   (c) Montrer que $\forall g \in E_2, \exists !\, f \in E_2, f^{(2)} + f' + f = g$

ALG 130
Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P = P(X) & \longmapsto & P(-X) \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que f est une symétrie et donner ses éléments
2. Déterminer la trace et le déterminant de f

ALG 131
Soit $n \geqslant 1$ et Q un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(0).Q \end{array}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de φ
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que φ soit un projecteur

ALG 132
Soit $E = \mathbb{R}^2$
On note $F_1 = \operatorname{vect}((1,-1))$ et $F_2 = \operatorname{vect}((1,0))$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 = E$
2. Donner l'expression de la projection sur F_1 parallèlement à F_2
3. Donner l'expression de la symétrie par rapport à F_2 parallèlement à F_1

ALG 133
Soit E un ev et deux projecteurs p et q de E tels que $p \circ q = 0$.
On définit l'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$

1. Justifier une inclusion entre $\operatorname{Im}(q)$ et $\ker(p)$
2. Montrer que r est un projecteur
3. Montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$
4. Montrer que $\operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$
5. Montrer que $\operatorname{Im}(r) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$

ALG 134
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, E_1 et E_2 trois de ses sev tels que $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$.
On note p_1 $[p_2]$ la projection sur F parallèlement à E_1 $[E_2]$

1. Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2$
2. On note $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de E_1 et $(e'_1,\ldots,e'_p)$ une base de E_2.
   On note aussi $(f_1,\ldots,f_q)$ une base de F
   (a) Que peut-ton dire des familles $(f_1,\ldots,f_q,e_1,\ldots,e_p)$ et $(f_1,\ldots,f_q,e'_1,\ldots,e'_p)$?
   (b) On considère g un application linéaire telle que $\begin{cases} \forall k \in [\![1,q]\!], g(f_k) = f_k \\ \forall k \in [\![1,p]\!], g(e_k) = e'_k \end{cases}$
      i. Justifier l'existence et l'unicité de g
      ii. g est-elle bijective?
      iii. Montrer que $p_1 = g^{-1} \circ p_2 \circ g$

ALG 135
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f+g=id_E$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant n$

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f=\ker g$
2. Qu'en déduit-on sur $g\circ f$?
3. Montrer que g et f sont deux projecteurs
4. Que représente pour f le noyau de g?

ALG 136
Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathcal{B}=(X^2,X+1,X-1)$.

On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A=\dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un projecteur et donner son rang
2. Déterminer les éléments de f. (on fournira une équation de $\mathrm{Im}\, f$ dans la base $\mathcal{B}$
3. Donner l'expression de $f(aX^2+bX+c)$

ALG 137
On considère les trois triplets $e_1=(1,2,1), e_2=(1,0,-1)$ et $e_3=(-2,1,1)$.
On note $E=\mathbb{K}^3,\ F=\mathrm{vect}(e_1)$ et $G=\mathrm{vect}(e_2,e_3)$

1. Montrer que $F\oplus G=\mathbb{K}^3$
   On note dorénavant p le projecteur sur F parallèlement à G.
2. Déterminer l'expression analytique de p. (càd $p((x,y,z))$ pour $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$)
3. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   A l'aide d'un dessin, donner sans justification une relation entre s et p ainsi que la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$
4. On considère un réel $\lambda\in\mathbb{K}$ et on définit l'endomorphisme $u=\lambda.id_E-s$.
   Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'expression de u^n en fonction de p et id_E.
   Déterminer les entiers n pour lesquels u^n est une homothétie.

ALG 138
Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à $A=\begin{pmatrix}4&2&4\\0&2&-4\\0&-1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$

On note $h=\dfrac{1}{4}f$

1. Préciser parmi f,g et h s'il y a des projecteurs et des symétries.
2. Donner les éléments géométriques de g et h
3. Comment décrire f?

ALG 139
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i,j,k) on considère le plan P d'équation $x+y-z=0$
et la droite $D=\mathrm{vect}(i-j+2k)$
Déterminer la matrice dans la base (i,j,k) de

1. la projection orthogonal sur D
2. la projection orthogonal sur P
3. la projection sur P parallèlement à D

ALG 140
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K})&\longrightarrow&\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\A&\longmapsto&A^T\end{array}$ avec $n\geqslant 2$

1. Dans le cas $n=2$, justifier que f est une symétrie et donner ses éléments
2. Même question dans le cas général.
3. Donner le déterminant et la trace de f

ALG 141
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_n[X]\\P=P(X)&\longmapsto&P(-X)\end{array}$ avec $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que f est une symétrie et donner ses éléments
2. Déterminer la trace et le déterminant de f

ALG 142
On note $E=\mathbb{R}_2[X]$.
On note $F=\{P\in E\,|\,\displaystyle\int_0^1 P(t)dt=0\}$ et $G=\mathrm{vect}(X^2+X+1)$

1. Montrer que F est un sev de E, et donner une base de F
2. Justifier que $F\oplus G=E$
3. On note p la projection sur F parallèlement à G.
   Donner l'expression de $p(P)$ en fonction de P et de $\int_0^1 P(t)dt$

-

ALG 143
On note $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_n[X]\\P=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k.X^k&\longmapsto&\displaystyle\sum_{k=0}^n a_{n-k}.X^k\end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que $\ker(f-id_E)\oplus\ker(f+id_E)=E$
3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E.
4. Donner la trace de f, et en déduire la dimension des deux sev ci-dessus

ALG 144
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
On considère

- le plan $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=0\}$
- la droite $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,\begin{cases}x-y+z&=0\\x+y+2z&=0\end{cases}\}$

1. Montrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur P parallèlement à D
3. Faire de même avec la symétrie par rapport à P parallèlement à D

ALG 145
Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+\frac{y}{2}+z,\frac{y}{2}-z,-\frac{y}{4}+\frac{z}{2})\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\longmapsto&(3x+4y+4z,-x-y-2z,-x-2y\end{array}$

1. Montrer que f est un projecteur et g une symétrie
2. Donner des équations des espaces caractéristiques de f et de g

ALG 146
Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{vect}(I_n) \oplus \ker(\text{tr})$
2. Soit p la projection sur $\text{vect}(I_n)$ parallèlement à $\ker(\text{tr})$.
   Donner pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'expression de $p(M)$
3. Que vaut la projection sur $\ker(\text{tr})$ parallèlement à $\text{vect}(I_n)$?

ALG 147
Soit E un ev et p un projecteur de E.
On considère l'application φ définie sur $\mathcal{L}(E)$ qui a tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ associe $f \circ p - p \circ f$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$
2. Montrer que si $\varphi(f) = 0$ alors $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f.
   (càd que $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$ et $f(\ker(p)) \subset \ker(p)$)
3. On suppose que $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par f, et l'on souhaite montrer que $\varphi(f) = 0$
   (a) Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
      i. Ecrire $\vec{x}$ comme la somme d'un vecteur de $\text{Im}(p)$ et d'un vecteur de $\ker(p)$
      ii. En déduire que $p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x}))$
   (b) Conclure

demo de cours

ALG 148 (démo du théo 2 sev)
Montrer l'équivalence entre

i) F_1 et F_2 sont en somme directe (càd $\forall x \in F_1 + F_2, \exists !\, (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$)
ii) s'il existe $(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, \vec{0} = x_1 + x_2$ alors $x_1 = x_2 = 0$
iii) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

ALG 149 (démo du théo 6 sev)
Montrer que si $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ est une famille libre de E alors les sev $\text{vect}(x_1,\dots,x_k)$ et $\text{vect}(x_{k+1},\dots,x_n)$ sont en somme directe.

ALG 150 (démo du théo 8 sev)
Montrer qu'une sous-famille d'une famille libre est encore libre

ALG 151 (démo de la rem 9 sev)
Soit $\mathcal{F} = (x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs et x un vecteur.
On suppose que $\mathcal{F}$ est libre et que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est une famille liée.
Montrer que $x \in \text{vect}(\mathcal{F})$

ALG 152 (démo du théo 19 sev)
Soient $\mathcal{F}_1 = (x_1,\dots,x_k)$ une famille génératrice de F_1 et $\mathcal{F}_2 = (y_1,\dots,y_p)$ une famille génératrice de F_2.
Montrer que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$

ALG 153 (démo de cours)
Montrer que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ ssi la décomposition du vecteur nul est unique.

ALG 154 (démo théo 4 app lin)
Soit f une application linéaire de $E \to G$

1. Soit F un sev de E. Montrer que $f(F)$ est un sev de G
2. Soit H un sev de G. Montrer que $f^{-1}(H) = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) \in H\}$ est un sev de E

ALG 155 (démo théo 13 app lin)
On considère E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,G)$ et F un supplémentaire de $\ker(u)$
On note v la restriction de u à F, càd $\boxed{\begin{array}{rcl} v : F & \longrightarrow & \text{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}}$
Montrer que v est un isomorphisme

ALG 156 (presque une démo de cours!)
Soit f une application linéaire de $E \to G$ et λ un scalaire non nul.

1. Montrer que $\ker(\lambda.f) = \ker(f)$
2. Montrer que $\text{Im}(\lambda.f) = \text{Im}(f)$

ALG 157 (produit de deux matrices élémentaires - démo à savoir)
Montrer que $E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}.E_{il}$

ALG 158 (produit de deux matrices triangulaires)
Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures d'ordre n. On note $C = AB$
Montrer que C est une matrice triangulaire supérieure et que $\forall i \in [\![1,n]\!], c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

ALG 159 (théo 14, matrices)

1. Montrer que si A est inversible alors son inverse est unique
2. Montrer que le produit de 2 matrices inversibles A et B est inversible et que l'on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ALG 160 (théo 30, matrices)
Montrer que "être semblable" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

ALG 161 (on redémontre ici un résultat de cours)
Soit f un endomorphisme et λ_1, λ_2 et λ_3 trois de ses vp distinctes.

1. Montrer que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$
2. Montrer que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3}$

Matrices semblables

ALG 162
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables

ALG 163 (matrices semblables)
Soient les deux matrices d'ordre 3 suivantes: $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace.
2. Calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$.
3. En déduire que A et B ne sont pas semblables. (si possible, de deux manières différentes)

ALG 164 (symétrie)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_2$ avec $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ALG 165
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
Montrer que $A^2 = 0_n$ ssi A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$

ALG 166
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice semblable à une matrice diagonale D qui a pour coefficients diagonaux 0,1 et 4.
Montrer que $A^3 = 5A^2 - 4A$.
Si f est un endomorphisme associé à la matrice A, que peut-on dire de f^3?

Polynôme caractéristique

ALG 167
Déterminer le polynôme caractéristique de $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+6y+2z, 2x+9y+4z, 3z) \end{array}$

ALG 168
Déterminer le polynôme caractéristique de $\boxed{f: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Une remarque?

ALG 169
Soit $n \geqslant 2$.
On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{ij} = i$.
Déterminer $\chi_A(X)$. *(On verra plus tard un moyen moins calculatoire d'obtenir le résultat!)*

ALG 170
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \geqslant 2$
1. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 1$ alors $\chi_f(X)$ est de la forme $X^n + a_{n-1}.X^{n-1}$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2$ alors $\chi_f(X)$ est de la forme $X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + a_{n-2}.X^{n-2}$.

ALG 171
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer χ_A
2. Vérifier que $\chi_A(A) = 0$
3. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$

ALG 172
Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + 3u + 4id = 0$.
1. Montrer que u ne possède pas de valeurs propres (réelles).
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\dim E$ est un nombre pair.

ALG 173
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note $g = f - id_E$ et $h = 2id_E - 3f$
Déterminer χ_g en fonction de χ_f, et montrer que $\chi_h(X) = 3^n.\chi_f\left(\frac{X-2}{3}\right)$

Eléments propres

ALG 174
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on considère $\boxed{s: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}}$ ainsi que $\boxed{p: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(M + M^T) \end{array}}$

Déterminer les éléments propres de s et p

ALG 175
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$f_k: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x) \end{array} \qquad g_k: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{kx} \end{array} \qquad h_k: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array}$$

1. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
2. (a) Montrer que la famille de fonctions $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
   (b) On considère $\varphi: \begin{array}{rcl} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$
      i. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}, \varphi(g_k)$
      ii. Retrouver le résultat de la question a) ci-dessus
3. Montrer que la famille de fonctions $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
4. A-ton le même résultat si dans la définition de h_k on remplace cos par sin?

ALG 176
Soit $E = \mathbb{R}[X]$
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$
1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de E.
   (on pourra commencer par déterminer le degré des vecteurs propres)

ALG 177
Soit u un endomorphisme de E.
1. Montrer que si λ est une valeur propre de u alors λ^2 est une valeur propre de u^2.
   A-t-on $\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda^k$ valeur propre de u^k?
2. Montrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de u alors $\vec{x}$ est aussi un vecteur propre de u^2.
   La réciproque est-elle vraie?

ALG 178
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie, et f et g deux endomorphismes de E.
1. Montrer que si 0 est vp de $f \circ g$ alors 0 est aussi vp de $g \circ f$
2. On suppose que $\lambda \neq 0$ est vp de $f \circ g$ associé au vecteur propre $\vec{x}$.
   Montrer que λ est aussi vp de $g \circ f$
3. En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

ALG 179
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice non nulle de E.
On considère $\boxed{f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A).M \end{array}}$ et $\boxed{g: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M).A \end{array}}$.
Déterminer les éléments propres de f et g

ALG 180
Soit $0 < q \leqslant p \leqslant n$, et $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & n-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ \\ \\ \\ n-p \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$
Déterminer les éléments propres de A.

ALG 181
Soit f un endomorphisme de E.
Soit $\vec{x}$ un $\vec{v}.p$ de f associé à une valeur propre λ.

1. (a) Monter que si $\lambda \neq 0$ alors $\vec{x} \in \text{Im}(f)$
   (b) Montrer que si $\lambda = 0$ alors $\vec{x} \in \ker(f)$
2. On note $g = 2.f$.
   Montrer que $\vec{x}$ est $\vec{v}.p$ de g. Quelle est la vp associé?
3. On suppose que de plus f est bijective (càd f est un automorphisme de E)
   (a) Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\vec{x}$ est $\vec{v}.p$ de f^{-1}. Quelle est la valeur propre associée?
   (b) Justifier que $E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$

ALG 182 (sev stables)
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
On rappelle que le sev F est dit stable par f lorsque $f(F) \subset F$

1. Des résultats généraux
   (a) Montrer que la droite vectorielle $D = \text{vect}\,\vec{u}$ est stable par f ssi $\vec{u}$ est un vecteur propre de f
   (b) Soit $P = \text{vect}(\vec{u},\vec{v})$.
   A-t-on l'équivalence
   $$P \text{ sev stable par } f \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ vecteurs propres de } f$$
   (c) Montrer que la somme de deux droites vectorielles stables est un sev stable.
2. Etude d'un cas particulier:
   On note f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer des sev stables par f

ALG 183
Soit E un ev, f un endomorphisme. On note $g = f - id_E$
Comparer les spectres et les sous-espaces propres de f et g

ALG 184
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice non nulle de E.
On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \text{tr}(A).M \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g : E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \text{tr}(M).A \end{array}}$.
Déterminer les éléments propres de f et g

ALG 185
Soit $n \geqslant 1$.
Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(1)X + P(4) \end{array}$
(On pourra commencer par $n = 2$)

ALG 186
Soit $a \in \mathbb{K}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la valeur de a pour que 2 soit valeur propre de f

ALG 187
Trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres

ALG 188
Soit $E = \{f \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
On considère l'endomorphisme $\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{array}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\begin{cases} O & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}.\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{sinon} \end{cases}$
Déterminer les éléments propres de T.
On devra trouver $sp(T) =]0,1[$ et que les sep sont des droites vectorielles

ALG 189
On considère les 3 fonctions
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x.e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2.e^x \end{array}$$

1. Montrer que ces 3 fonctions forment une famille libre.
   On note $E = \text{vect}(f,g,h)$ et $\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$
2. • Montrer que φ est un endomorphisme de E
   • Déterminer les éléments propres de φ.

Réduction

ALG 190
Soit la matrice $A = (\frac{i}{j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
A est-elle diagonalisable?

ALG 191
Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{3}(-7x+2y, -2x-11y) \end{array}}$

1. Montrer que f est trigonalisable (dans $\mathbb{R}$)
2. Donner une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure
3. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

ALG 192
L'ensemble des matrices diagonalisables d'ordre n est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

ALG 193
Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont méme rang, méme trace, méme déterminant, méme valeur propre, méme dimension du sep et pourtant ne sont pas semblables (calculer leurs carrés!)!

ALG 194
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha-4 & \alpha+1 \\ -\alpha-1 & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$
Réduire la matrice A_α

ALG 195
Soit $E=\mathbb{R}^3$.
On définit $f\in\mathcal{L}(E)$ par $f(x,y,z)=(2x+8y,-x+8y-z,2x-4y+4z)$.
Les calculs donnent

- $\chi_f(X)=(X-6)^2(X-2)$
- $E_2=\operatorname{vect} e_1$ avec $e_1=(-1,0,1)$
- $E_6=\operatorname{vect} e_2$ avec $e_2=(2,1,0)$

1. f est-elle diagonalisable? triangularisable?
2. Justifier qu'il existe un vecteur e_3 tel que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$
3. Justifier que $T=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}f=\begin{pmatrix} . & . & b\\ . & . & a\\ . & . & .\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
4. En considérant $\dim\ker(f-6id_E)$, montrer que $a\neq 0$
5. Montrer qu'il existe un vecteur e_3 tel que $a=1$ et $b=0$

ALG 196 (puissances d'une matrice triangulaire nilpotente(classique))
Soit $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
On veut montrer que $T^n=0$.
Pour cela on considère f l'endo.cano. asso. à T, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$
On note pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $F_k=\operatorname{vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_k)$ et $F_0=\{\vec{0}\}$

1. Montrer que $f(F_1)=F_0$
2. Montrer que $\forall k\in[\![1,n]\!], f(F_k)=\operatorname{vect}(f(\vec{e}_1),f(\vec{e}_2),\ldots,f(\vec{e}_k))$
3. Montrer $\forall k\in[\![1,n]\!], f(F_k)\subset F_{k-1}$
4. En déduire $f^n(F_n)$, puis que $T^n=0$
5. Dans le cas $n=3$, en effectuant un calcul matriciel, retrouver que $T^3=0$

ALG 197
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

On souhaite montrer que f se trigonalise sous la forme $T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

Les calculs donnent $P_f(X)=(X-2)^3$ et E_2 est le plan d'équation $x+y+z=0$

On sait que la question revient à déterminer une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $\begin{cases} f(\vec{e}_1) &=2\vec{e}_1\\ f(\vec{e}_2)&=2\vec{e}_2\\ f(\vec{e}_3)&=\vec{e}_2+2\vec{e}_3\end{cases}$

1. A quels espaces $\vec{e}_2$ doit-il nécessairement appartenir?
   Déterminer alors un vecteur $\vec{e}_2$ possible
2. Déterminez un vecteur $\vec{e}_3$ possible ainsi qu'un vecteur $\vec{e}_1$
3. Vérifiez que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est bien une base.
4. Conclure, et écrire une égalité liant les matrices A et T

ALG 198
Soit $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\boxed{f\in\mathcal{L}(E)\text{ définie par } f(P)=P+P'+P''+\cdots+P^{(n)}}$
Montrer que f est trigonalisable, mais n'est pas diagonalisable.

ALG 199
Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&-2\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est trigonalisable et trigonaliser la matrice A
2. Montrer que les matrices A et $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ sont semblables

ALG 200
Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}4&-1&1&7\\9&-2&-7&1\\0&0&5&8\\0&0&-2&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A et B sont semblables.
3. A et C sont-elles semblables?

ALG 201
Réduire les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-4&-6&0\\3&5&0\\3&6&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&8&0\\-1&8&-1\\2&-4&4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}11&-9&3\\3&-1&3\\0&0&8\end{pmatrix}$$

ALG 202 ($\dim E=3$ et f possède une vp simple et une double)
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension 3, et f un endomorphisme de E.
On suppose que f n'est pas diagonalisable, et que f posséde deux valeurs propres distinctes.

1. Expliquer pourquoi il existe $\lambda\neq\mu$ tel que $P_f(X)=(X-\lambda)(X-\mu)^2$
2. Donner la dimension de chaque sep
3. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de f est du type $\begin{pmatrix}\lambda&0&a\\0&\mu&b\\0&0&\mu\end{pmatrix}$
4. Justifier que $b\neq 0$ (on pourra considérer $\dim\ker(f-\mu id_E)$ et $\operatorname{rg}(f-\mu id_E)$
5. En posant $\vec{\varepsilon}_3=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$,

   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}f=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&1\\0&0&\mu\end{pmatrix}$
6. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}\mu&1&0\\0&\mu&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix}\mu&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix}\mu&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$?

ALG 203
Soit $k\in\mathbb{R}$.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}4k-1&1-2k\\6k-2&2-3k\end{pmatrix}$

1. Etudier la diagonalisabilité de A
2. On se place dans le cas où A est diagonalisable
   (a) Donner les matrices P et D telles que $A=P.D.P^{-1}$
   (b) Déterminer A^n pour $n\in\mathbb{N}$

ALG 204
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable
2. On note $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Justifier que $A = P.D.P^{-1}$
3. On souhaite déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.
   (a) A l'aide de la décomposition ci-dessus, donner 8 matrices X qui vérifient $X^2 = A$
   (b) Montrer que si $X^2 = A$ alors forcément $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale.
   (on pourra remarquer que si $X^2 = A$ alors $AX = XA$)
   (c) En déduire toutes les matrices X telles que $X^2 = A$

ALG 205
Soit $n \geqslant 1$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & (2X+1).P(0) \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Calculer $f \circ f$.
3. f est-il diagonalisable? Donner ses éléments propres

ALG 206
Déterminer les éléments propres et indiquer si les matrices suivantes sont diagonalisables

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ALG 207
Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.
   (On fera une démonstration avec matrice et une sans matrice)
2. Montrer que si v est diagonalisable alors il existe au moins un endomorphisme u diagonalisable tel que $u^2 = v$.
3. Soit μ une valeur propre non nulle de u^2 et λ un complexe tel que $\lambda^2 = \mu$
   Montrer que : $\ker(u^2 - \mu.id) = \ker(u - \lambda.id) \oplus \ker(u + \lambda.id)$.

ALG 208
Soit $n > 0$
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = nXP - (X^2-1)P'$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que la famille $(1, X-1, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de φ
4. L'application φ est-elle diagonalisable?

ALG 209
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$.

1. Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f - 2id_E)$.
2. On suppose que E est de dimension finie.
   f est-il diagonalisable? Montrer que $0 \leqslant \dfrac{\ln(\det(f))}{\ln 2} \leqslant \dim E$

ALG 210
Soit $n > 0$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X.(1-X).P' + n.X.P$

1. Montrer que P est un endomorphisme de E
2. Déterminer le spectre de f.
3. On souhaite déterminer maintenant les sous-espaces propres
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX - \lambda}{X.(1-X)}$
   (b) En vous aidant d'une équation différentielle, déterminer les sep de f
4. f est-elle diagonalisable?

ALG 211
On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit $E = \{aI_3 + bA + cA^2 | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

1. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3 \in E$
   Montrer que $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de E
2. Quelle équation vérifie les valeurs propres de A?
3. Déterminer, sans calculer ses val. propres, si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Même question dans $\mathbb{C}$.
4. On définit sur E l'application f en posant $\forall M \in E, f(M) = AM$
   Montrer que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
   f est-il diagonalisable?

ALG 212
Soit $n \geqslant 2$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+X)P(1) + (X^2-X)P(-1) \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de f
3. Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable? Que dire de $g = \dfrac{1}{2}f$?

ALG 213
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. f est-il diagonalisable? Si oui, diagonaliser f!
3. Chercher un endomorphisme g tel que $g^2 = f$

ALG 214
Justifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ e & \pi & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

ALG 215
Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (y, -2x + 2y + z, -x + y + z)$.

1. Montrer que f est trigonalisable. Que peut-on dire d'une matrice triangulaire associée?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ALG 216
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x + 25z, -5x - 4y - 25z, -4z) \end{array}$

1. Montrer que f est diagonalisable
2. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f

ALG 217
Soit $m \in \mathbb{R}$.
On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (m.x + (3-m).y + (3-m).z, x + y - z, -x + 2y + 4z) \end{array}$$

1. Etudier, suivant les valeurs de m, la diagonalisabilité de f.
2. Dans le cas où f est diagonalisable, donner une base de $\mathbb{R}^3$ composée de $\vec{v}.p$ de f
3. Dans le cas où $m = 2$, justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

ALG 218
Soit $\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,x) \end{array}}$
Montrer que f est diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mais pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ALG 219
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice diagonalisable, et donner les matrices P et D
2. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$

ALG 220
Pour $k \in \mathbb{C}$, on considére $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & -5+k & 4-k \\ -k+3 & 5-k & k-3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
Déterminer les éléments propres de A_k. A_k est-elle diagonalisable?

ALG 221 (A retenir)
Soit f et g deux endomorphismes d'un ev E

1. On suppose que f et g sont diagonalisables. A-t-on $f + g$ diagonalisable?
2. On suppose que f posséde une unique valeur propre.
   Montrer l'équivalence : f est diagonalisable $\iff$ f est une homothétie

ALG 222
Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes alors A et A^T sont semblables

ALG 223

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X(P' + P'' + \cdots + P^{(n)}) \end{array}$.
   Montrer que f est diagonalisable.
2. L'endomorphisme f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = X^2 P^{(2)}$ est-il un endomorphisme diagonalisable?

ALG 224
Soit f un endomorphisme de E diagonalisable de spectre $\{0,1,2\}$. (on a $\dim E < \infty$)

1. En utilisant les matrices, montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$
2. Sans utiliser les matrices, montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$
3. Déterminer f^{2020}

ALG 225
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes réelles
2. On suppose que $n = 3$ et que $\{-1, +1\} \subset sp(A)$.
   Montrer que A est diagonalisable

ALG 226
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que
$P^{-1}AP$ soit diagonale et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

On donne $E_{-2}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | x - y - z = 0\}$

et $E_1(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_2(B) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

ALG 227
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(X) = -X + (\operatorname{tr} X).I_n$

1. Déterminer les éléments propres de f
2. f est-il diagonalisable?
3. Trouver un polynôme du second degré qui annule f, c'est à dire telle que $P(f) = 0$
4. Montrer que f est bijective et donner $f^{-1}(X)$ explicitement.

ALG 228
Soit a un réel. On considére $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & ((a+2)x + ay, (a-2)x + ay) \end{array}$

1. Montrer que f est toujours trigonalisable
2. f est-elle toujours diagonalisable?

ALG 229
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 5$ et $\operatorname{tr}(A^2) = 4i + 5$.
Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale semblable à A.

ALG 230
Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

On note $F = \{M(a,b,c) | (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$. On considère également $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que F est un espace-vectoriel. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que T est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
   Donner une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D tel que $T = P.D.P^{-1}$.
3. Calculer T^2, puis justifier que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $M(a,b,c)$ est toujours une matrice diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).
   Indiquer les valeurs propres de $M(a,b,c)$

ALG 231
La matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle diagonalisable?
Si oui, trouver P et D

ALG 232
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 3 \\ 15 & -10 & 3 \\ 15 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A, B et C sont 3 matrices diagonalisables
2. Montrer que s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}CP$ sont diagonales alors $AC = CA$. A et C sont-elles diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage?
3. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que
   $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

On donne $E_4(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | -3x + 2y + z = 0\}, E_8(A) = \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

et $E_8(B) = \operatorname{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), E_{-4}(B) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, | 5x - 2y + z = 0\}$

ALG 233
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que A n'est pas diagonalisable, puis que A et B sont semblables.

ALG 234
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère f l'endomorphisme canoniqement associé à $A = \begin{pmatrix} m & 3-m & 3-m \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Etudier, en fonction de m, la diagonalisabilité de f

ALG 235
Soit E un $\mathbb{R}-$ev de dimensions 3 et f un endomorphisme de E tel que

$$\det(f) = 0 \qquad \operatorname{tr}(f) = 1 \qquad \text{et} \qquad \ker f \subset \operatorname{Im} f$$

1. Déterminer les dimensions de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$
2. Montrer que f est trigonalisable
3. Déterminer les valeurs propres de f et indiquer si f est diagonalisable

ALG 236
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & X^3.P(1/X) \end{array}$
f est-il diagonalisable? Donner ses éléments propres

ALG 237
Soit $n \geqslant 1$ et Q un polynôme de degré n à coefficients réels.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $f(P) = (P.Q)^{(n)}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que f est diagonalisable

ALG 238
Soit $a \in \mathbb{R}$.

Donner une cns sur a pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1+a & -a & -1-a \\ -a & a & 1+a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

ALG 239 (Calcul de la vp de plus grand module)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note les vp de A comptées avec leur multiplicité $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et on suppose qu'elles vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$

1. Justifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $P^{-1}.A.P = T$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P.T^k.P^{-1}$
3. Montrer que $\lambda_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)}$

ALG 240
On considère les matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour $a - b \neq 1$ la matrice $M(a,b)$ est diagonalisable
2. Montrer que pour $a - b = 1$ et $a \neq 1$ la matrice $M(a,b)$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Dans le cas où $a - b \neq 1$, calculer $M(a,b)^n$.
   En déduire une CNS portant sur (a,b) pour que la suite $(M(a,b)^n)_n$ converge

ALG 241
Soit $\dim E = n$ et f,g deux endomorphismes de E qui commutent.
On suppose f possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ associées aux $\vec{v}.p$ respectifs $e_1, \ldots, e_n$

1. Que peut-on dire de f et de la dimension de chacun de ses sep?
2. Justifier que chaque e_i est aussi vecteur propre de g.
3. g est-il diagonalisable? les valeurs propres de g sont-elles toutes distinctes?

ALG 242
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
On pose $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto ((\alpha X + \beta)P)'$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer les éléments propres de f
3. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f
4. Ecrire la matrice A de l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$, dans la base canonique
5. Diagonaliser A

ALG 243
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}.A.P$
2. Montrer que si une matrice Δ commute avec D alors Δ est une matrice diagonale
3. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + M = A$ alors $P^{-1}.M.P$ commute avec D , et en déduire que $P^{-1}.M.P$ est diagonale
4. Résoudre l'équation matricielle $M^2 + M = A$

ALG 244
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = a.I_3 + b.A + c.A^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les éléments propres de A
2. En déduire ceux de B

ALG 245
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$
2. Montrer que si λ est valeur propre de f alors $\lambda^3 + \lambda = 0$. Déterminer si f est diagonalisable
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f^2 + id)$ et que, si $f \neq 0$, il existe une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ALG 246
Soit $n \geqslant 2$ et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (2X-1)P' + (X^2 - X - 2)P''$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Déterminer les valeurs propres de f et en déduire que A est diagonalisable
4. On note $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
   Montrer que si P est un polynôme propre (=vecteur propre) associé à λ_k alors $\deg P = k$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que, pour tout k, P_k soit un polynôme unitaire de degré k et un vecteur propre de f associé à λ_k
6. Dans le cas $n = 3$, donner (P_0,P_1,P_2,P_3)

ALG 247
Dans cet exercice, on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ on considère $f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a.z + b.\overline{z} \end{array}$

1. rappeler une base et la dimension de $\mathbb{C}$
2. Montrer que $\{f_{a,b} \,|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \mathcal{L}(\mathbb{C})$
   (on pourra considérer l'image d'une base)
3. Donner la trace et le déterminant de $f_{a,b}$ en fonction de a et b
4. Donner une cns pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable
5. Donner en fonction de a et b le déterminant et la trace de $f_{a,b}$

ALG 248
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim finie, $\mathcal{B}$ sa base et f un endomorphisme de E telle que

$$\forall x \in E, \exists\, p_x \in \mathbb{N}^*, f^{p_x}(x) = x$$

1. Pour tout $e \in \mathcal{B}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^p(e) = e$
   En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^m = id_E$
2. On suppose que f est diagonalisable. Montrer de $f^2 = id_E$