# FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES
# A VALEURS REELLES

## Table des matières



*On rappelle la définition de la dérivabilité pour une fonction $h$ d'une variable:*
. *$h$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie*

## Notations

- $p$ est un entier supérieur ou égal à 2
- $D$ est une partie de $\mathbb{R}^p$
- $f$ une fonction de $D$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On pourra donc écrire $f$ sous la forme

$$\boxed{\begin{array}{llll} f : & D \subset \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_p) \end{array}}$$

- Les $p$ variables $x_1, \dots, x_p$ s'appellent <u>les variables de $f$</u>.
- $x_1$ est la première variable de $f$, $x_2$ est la deuxième variable de $f$,...
- Lorsque $f$ est une fonction de 2 ou 3 variables, on préférera noter $(x,y)$ ou $(x,y,z)$ les variables de $f$.

**exemple 1:**

Que dire des 4 fonction suivantes?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1.\sin(x_2) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \end{array}$$

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x.\sin(y) \end{array}$$

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \end{array}$$

# 1 Préliminaires : topologie de $\mathbb{R}^p$ avec $p = 2$ ou $3$ (V085)

## 1.1 norme et distance euclidiennes

**définition 1: norme et distance euclidiennes**

i) On appelle NORME EUCLIDIENNE sur $\mathbb{R}^p$ , l'application $||.|| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2} \end{array}$

ii) On appelle DISTANCE EUCLIDIENNE sur $\mathbb{R}^p$ l'application

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_p-y_p)^2} \end{array}$$

**proposition 1 (*rappel*)**

*la distance euclidienne est une application de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

*i.)* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

*ii.)* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, d(x,y) = d(y,x)$

*iii.)* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

## 1.2 boules

**définition 2:**

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ et $r$ un réel strictement positif.

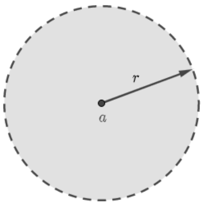
i) On appelle BOULE OUVERTE DE CENTRE $a$ ET DE RAYON $r$ l'ensemble .

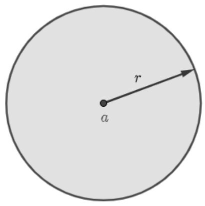
$$\boxed{B_o(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p | d(a,x) < r\}}$$

ii) On appelle BOULE FERMÉE DE CENTRE $a$ ET DE RAYON $r$ l'ensemble

$$\boxed{B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p | d(a,x) \leqslant r\}}$$

*Les notions de boules généralisent dans $\mathbb{R}^p$ la notion d'intervalle existant dans $\mathbb{R}$*




## 1.3 vocabulaire

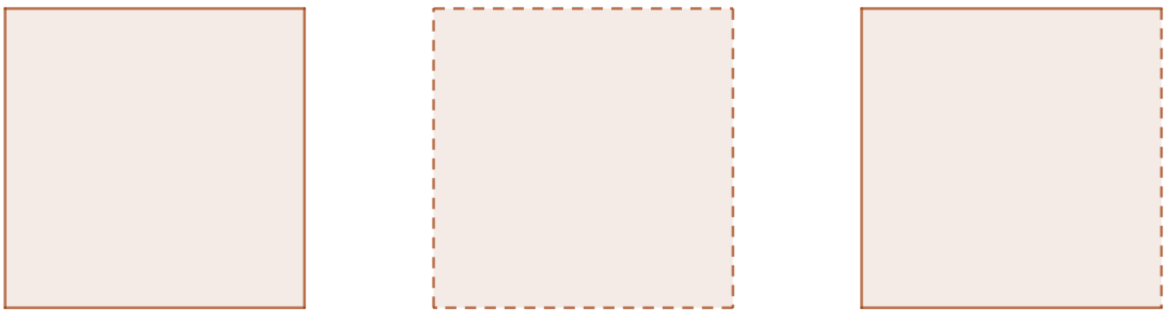
**définition 3: intérieur, extérieur, frontière**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que $a$ EST UN POINT INTÉRIEUR DE $D$ lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_0(a,r) \subset D$
2. On dit que $a$ EST UN POINT EXTÉRIEUR DE $D$ lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_0(a,r) \cap D = \emptyset$.
3. On dit que $a$ EST POINT ADHÉRENT À $D$ lorsque pour tout $r > 0, B_0(a,r) \cap D = \emptyset$
4. On appelle FRONTIÈRE DE $D$ l'ensemble des points adhérents à $D$ mais pas intérieurs

*rem: tout élément $a$ de $D$ est adhérent à $D$ car $\forall r > 0, a \in B_0(a,r) \cap D$ et donc $B_0(a,r) \cap D \neq \emptyset$*

Illustration:



*Les trois ensembles ci-dessus possèdent la même frontière*

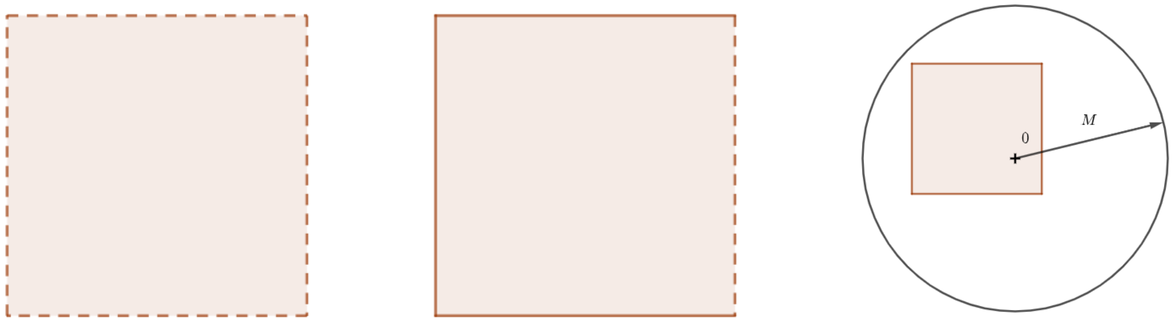
### définition 4: partie ouverte, fermée, bornée

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que $D$ est UN OUVERT, OU UNE PARTIE OUVERTE, de $\mathbb{R}^p$ lorsque tout point de $D$ est un point intérieur de $D$, autrement dit lorsque $\forall a \in D, \exists r > 0, B_o(a,r) \subset D$

2. On dit que $D$ est UN FERMÉ, OU UNE PARTIE FERMÉE, de $\mathbb{R}^p$ lorsque $\mathbb{R}^p \setminus D$ est un ouvert

3. On dit que $D$ EST UNE PARTIE BORNÉE lorsqu'il existe $M > 0$ tel que $\forall a \in D, ||a|| \leqslant M$




**remarque 1**

1. *l'intérieur de $D$ est le plus grand ouvert contenu dans $D$*
2. *l'extérieur de $D$ est le plus grand ouvert contenu dans le complémentaire de $D$*
3. *un point $x$ adhérent à $D$ est soit à l'intérieur de $D$ soit sur sa frontière*

### exemple 2: un peu compliqué

1. Montrer que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $[0,1[\times[0,1[$ n'est pas un ouvert

1. *Soit $a = (x_0,y_0) \in D$. (on a donc $y_0 > 0$)*

   *Posons $r = \dfrac{y_0}{2} > 0$ et montrons que $B_0(a,r) \subset D$.*
   *Soit $(x,y) \in B_0(a,r)$.*
   . *on a $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$*
   . *or $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geqslant \sqrt{(y-y_0)^2} = |y - y_0|$*
   . *ainsi $|y - y_0| < r = \dfrac{y_0}{2}$*
   . *càd $y_0 - r < y < y_0 + r$*
   . *or $y_0 - r = y_0 - \dfrac{y_0}{2} = \dfrac{y_0}{2} > 0$*
   . *ainsi $y > 0$*
   *et donc $(x,y) \in D$ !*

2. *Notons $D = [0,1[\times[0,1[$*

   *Soit $a = (0,0) \in D$*
   *Soit $r > 0$*
   . *Nous allons montrer que $B_O(a,r) \not\subset D$*
   . *on a $x = (\dfrac{-r}{2},0) \in B_O(a,r)$*
   . *en effet, $d(x,a) = \sqrt{(\dfrac{-r}{2} - 0)^2 + (0-0)^2} = \dfrac{r}{2} < r$*
   . *mais $x \notin D$ car $\dfrac{-r}{2} < 0$*

   *On a montré qu'il n'existait pas de boule ouverte centrée en a incluse dans $D$ donc $D$ n'est pas un ouvert!*

**remarque 2**

- *une boule ouverte est une partie ouverte.*
- *une boule fermée est une partie fermée.*
- $\mathbb{R}^p$ *et l'ensemble vide sont des parties à la fois ouvertes et fermées. Ce sont les seules à posséder cette propriété.*
- *Dans* $\mathbb{R}^2$, *un demi-plan fermé est un fermé, un demi-plan ouvert est un ouvert, ...*

### méthode 1: pour justifier qu'une partie est fermée ou ouverte

On démontre que si $f$ est une fonction CONTINUE de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) > 0\}$ est un ouvert *(ex:* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 > 0\}$*)*
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) = 0\}$ est un fermé *(ex:* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0\}$*)*
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé *(ex:* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leqslant 0\}$*)*
-
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | 0 < f(x) \geqslant x\}$ n'est ni un fermé, ni un ouvert.

### méthode 2: pour montrer qu'une partie n'est pas bornée

Il suffit de trouver "un chemin" dans $D$ qui nous amène infiniment loin, càd de trouver un arc paramétré $(I,\gamma)$ tel que

i) $\forall t \in I, \gamma(t) = (x(t),y(t)) \in D$

ii) $\lim\limits_{t\to b} ||\gamma(t)|| = +\infty$ où $b$ désigne une borne de $I$

ou à défaut(très très rare) d'exhiber une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n|| = +\infty$

### exemple 3:

Montrer que

1. $D = \{(x,x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé non borné
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sin x > y\}$ est un ouvert non borné
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 5y^2 + \cos(xy) \leqslant 18\}$ est un fermé borné

### exemple 4: compliqué car plus théorique

Montrer les équivalences entre les propriétés suivantes:

i) $D$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$

ii) $D$ est contenue(=incluse) dans une boule

iii) $\exists M > 0, \forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$

mais cela n'équivaut évidemment pas à $\forall (x,y) \in D^2, \exists M > 0, d(x,y) \leqslant M$

*(Faire des dessins pous illustrer chacune des implications, ça aide!)* **démonstration:**

- $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ On suppose $\exists M > 0, \forall x \in D, ||x|| \leqslant M$
  *Il est alors clair que* $D$ *est incluse dans la boule fermée de centre* $0$ *et de rayon* $M$

- $\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ On suppose $\exists R > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}^p, \forall x \in D, d(x,x_0) \leqslant R$
  *Soient* $(x,y) \in D^2$.
  *Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire* $d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) \leqslant R + R$.
  *En notant* $M = 2R$, *on a montré que* $\forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$

- $\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ On suppose $\exists M > 0, \forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$
  *Considérons un élément particulier* $y_0 \in D$.
  *D'après l'hypothèse, pour tout* $x \in D$ *on a* $d(x,y_0) \leqslant M$ *, càd* $x \in B_f(y_0,M)$
  *Ceci signifie que* $D$ *est incluse dans la boule de fermée de centre* $y_0$ *et de rayon* $M$

# 2 Limite en un point adhérent (V086)

## 2.1 ensemble de définition, lignes de niveau

### exemple 5: quelques fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Préciser à chaque fois le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction est définie et dessiner les lignes de niveau

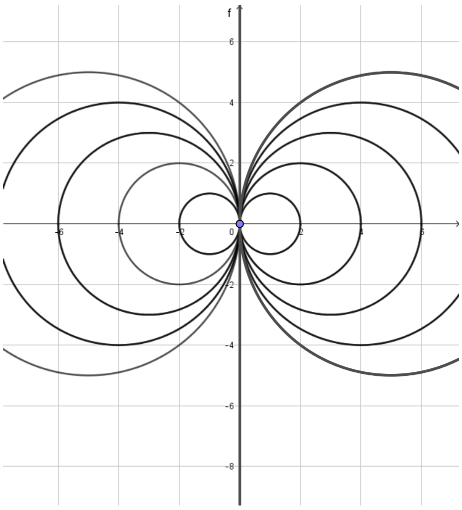
$\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 : D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_2 : D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_3 : D_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{y} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_4 : D_4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+y^2} \end{array}}$

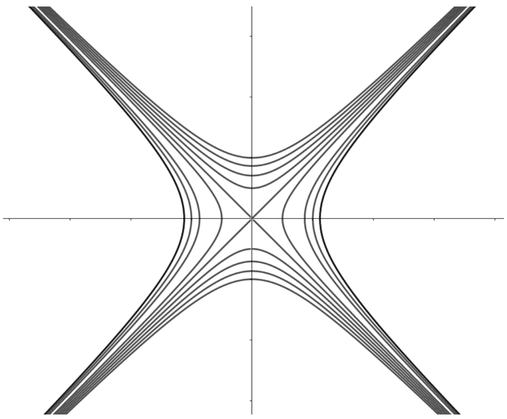
$\boxed{\begin{array}{rcl} f_5 : D_5 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{xy} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_6 : D_6 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_7 : D_7 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2-y^2} \end{array}}$

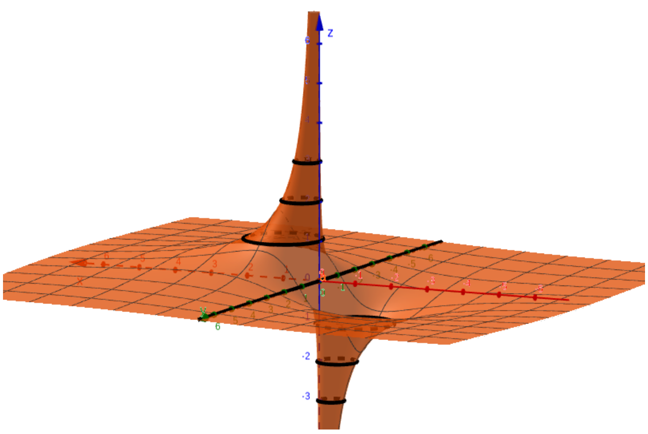
### définition 5: lignes de niveau (fonctions de deux variables)

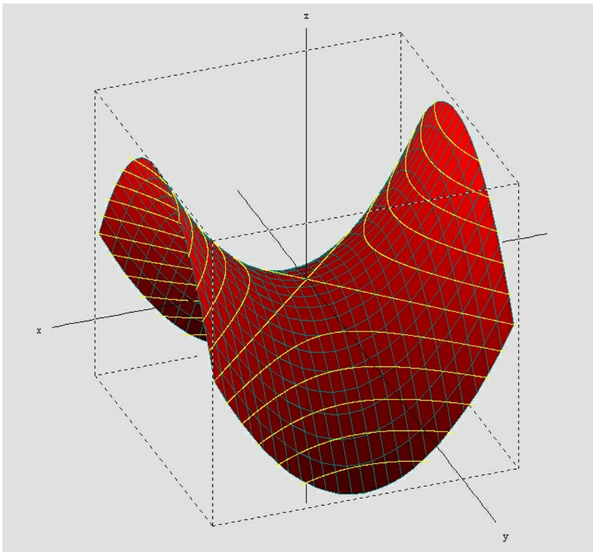
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{R}$ fixé, on appelle LIGNE DE NIVEAU D'INDICE $k$ la courbe d'équation $f(x,y) = k$

Vous pourriez dessiner les lignes de niveau des fonctions ci-dessus?









LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION $f$ DE 2 VARIABLES EST LA SURFACE D'ÉQUATION $z = f(x,y)$

## 2.2 limite en un point adhérent

### définition 6: se généralise bien sûr pour une fx de 3 variables

Soient

. $D$ une partie de $\mathbb{R}^2$

. $a = (x_0,y_0)$ un point adhérent à $D$

. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction

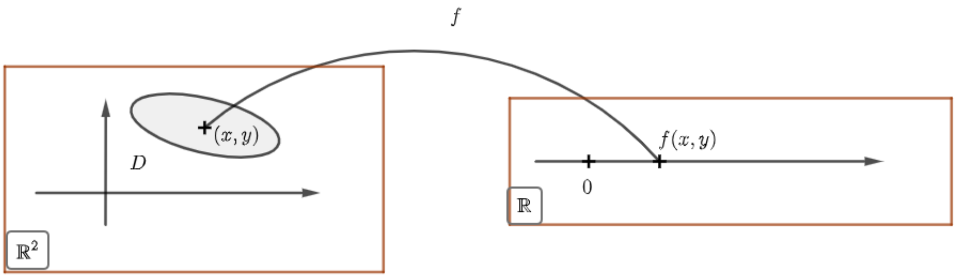
On dit que LA FONCTION $f$ ADMET UNE LIMITE FINIE $l \in \mathbb{R}$ EN $a$, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, lorsque

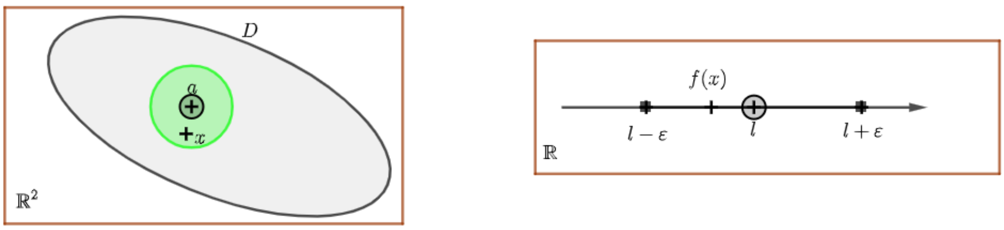
$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \epsilon}$$

*rem: cela revient à dire que quel que soit le chemin $(I,\gamma)$ dans $D$ qui mène à $a = (x_0,y_0)$, on a $f(\gamma(t))$ qui tend vers $l$*

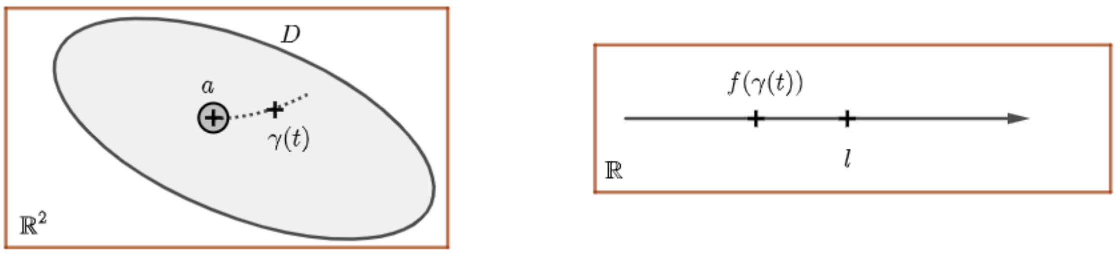
**remarque 3**

- *Par exemple pour une fonction de 2 variables et $a = (x_0,y_0)$, on pourra écrire*
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \text{ ou bien } \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h,y_0 + k) = l$$
- *L'étude la continuité n'est psa un objectif du programme: il ne devrait pas y avoir de question sur ce thème.*
- *A savoir cependant que dire que $(x,y) \to (x_0,y_0)$ n'est pas équivalent à faire tendre $x$ vers $x_0$ puis $y$ vers $y_0$ (ou vice-versa).*




QUAND LA DISTANCE ENTRE $x$ ET $a$ EST INFÉRIEURE À $\eta$,
ON EST ASSURÉ QUE LA DISTANCE ENTRE $f(x)$ ET $l$ EST INFÉRIEURE À $\varepsilon$




QUAND $\gamma(t)$ TEND VERS $a$, ON A $f(\gamma(t))$ QUI TEND VERS $l$

### exemple 6: composition de limites de manière détaillée

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{llll} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{array}}$

- le point $a = (0,0)$ n'est pas un point appartenant à $D$, mais c'est un point adhérent à $U$.
- Notons $\boxed{\begin{array}{llll} g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{llll} h: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{\sin t}{t} \end{array}}$
- La fonction $g$ est une fonction polynomiale de 2 variables: on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$
- La fonction (d'une seule variable) bien connue $h$ possède 1 comme limite en 0: $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 1$
- Par le théorème de composition des limites, comme $f = h \circ g$, on peut affirmer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

### méthode 3: pour montrer qu'une fonction ne possède pas de limite en un point

Il suffit de trouver "deux chemins $(I_1,\gamma_1)$ et $(I_2,\gamma_2)$ dans $D$ qui nous amènent à $a$ mais tels que les images de ces chemins par $f$ ne tendent pas vers la même limite", càd

i) $\forall t \in I_1, \gamma_1(t) = (x_1(t),y_1(t)) \in D$ et $\lim\limits_{t\to borne_1} \gamma_1(t) = a$

ii) $\forall t \in I_2, \gamma_2(t) = (x_2(t),y_2(t)) \in D$ et $\lim\limits_{t\to borne_2} \gamma_2(t) = a$

iii) $\lim\limits_{t\to borne_1} f(\gamma_1(t)) \neq \lim\limits_{t\to borne_2} f(\gamma_2(t))$

*A retenir: il ne suffit pas de regarder ce qui se passe uniquement à $x$ fixé ou $y$ fixé!*

### exemple 7:

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array}}$

Montrer que $f$ ne possède pas de limite en $(0,0)$

## 3 Continuité (V087)

**définition 7:**

1. Soit $a \in D$ , on dit que $f$ EST CONTINUE AU POINT $a$ lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ c'est à dire :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$$
2. On dit que $f$ EST CONTINUE SUR $D$ lorsqu'elle est continue en tout point de $D$

**exemple 8:**

Montrer que la fonction $\boxed{\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$ n'est pas continue en (0,0)

**théorème 1: théorèmes généraux**

1. La composée de fonctions continues est encore continue
2. Une combinaison lin"aire de fonctions continues est encore une fonction continue
3. Le produit de fonctions continues est encore continue
4. Le quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas, est encore une fonction continue

**théorème 2: théorème des bornes atteintes pour une fx de plusieurs var.**

Si $D$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ et si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue sur $D$ alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.
*rem: ceci signifie que si $f$ est une fonction continue sur une partie fermée et bornée alors $f$ possède un maximum global et un minimum global*
*rem: on rappelle que l'on a déjà vu le théorème des bornes atteintes pour une fonction d'une seule variable continue sur un segment de $\mathbb{R}$*

### exemple 9: application possible aux intégrales à paramètre qd non généralisées

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)dt$ pour $x \neq \pm 1$

1. Montrer que pour $x \neq \pm 1$ l'intégrale existe bien car elle est non généralisée
2. Montrer que $g$ est continue sur tout segment $[a,b] \subset I$ avec $I = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

### méthode 4: application possible aux intégrales à paramètre qd non généralisées

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{x^2 - 2x\cos t + 1}dt$ pour tout $x$ réel.

Montrer que $g$ est continue sur sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

*On constatera qu'il est inutile de chercher une majoration détaillée mais que l'on pourra simplement justifier d'une fonction majorante $\varphi$ constante.*

### exemple 10:

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$

1. La fonction $f$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction $f$ est bornée sur tout rectangle $[a,b] \times [c,d]$
   (On précisera un majorant de $|f|$ en fonction de $(a,b,c,d)$
3. Montrer que la fonction $f$ est bornée sur tout ensemble borné

1. *$f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ car* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
2. 
   - *Comme $D = [a,b] \times [c,d]$ est un domaine fermé (car produit cartésien de fermés) et borné,*
     *et que $f$ est une fonction continue sur $D$,*
     *le théorème des bornes atteintes affirme que $f$ est bornée sur $D$*
   - *Pour tout $x \in [a,b]$, on a $|x| \leqslant \max(|a|,|b|) = M_1$*
     *Pour tout $y \in [c,d]$, on a $|y| \leqslant \max(|c|,|d|) = M_2$*
     *On a ainsi*
     $$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d], |f(x,y)| = |xy| = |x|.|y| \leqslant M_1.M_2$$
3. *Soit $D$ un domaine borné (par forcément fermé).*

   *On sait alors que*
   $$\exists R > 0, \forall a \in D, ||a|| \leqslant R$$
   *Notons $D_1 = B_f(0,R)$,*
   *on vient d'établir que $D \subset D_1$*

   *Comme $f$ est continue sur le domaine fermé borné $D_1$,*
   *on peut affirmer d'après le théorème des bornes atteintes que $f$ est bornée sur $D_1$.*
   *Ainsi $\exists M \geqslant 0, \forall a \in D_1, |f(a)| \leqslant M$*
   *Comme $D \subset D_1$, on a a fortiori $\exists M \geqslant 0, \forall a \in D, |f(a)| \leqslant M$*
   *ce qui prouve bien que $f$ est bornée sur $D$*

### exemple 11:

Soit $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$ une fonction continue. On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} h: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(3,y) \end{array}}$

1. Justfier que $g$ et $h$ sont continues
2. D'une manière générale, montrer que si $x_0$ et $y_0$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ alors les applications $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

**remarque 4 (*continuité par rapport à une variable*)**

*Soit $f$ une fonction de deux variables.*

*i) On dit que* ***la fonction $f$ est continue par rapport à $x$ (ou par rapport à la première variable)*** *lorsque à $y_0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ est une fonction continue.*

*ii) On dit que* ***la fonction $f$ est continue par rapport à $y$ (ou par rapport à la deuxième variable)*** *lorsque à $x_0$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est une fonction continue.*

*iii) On vient de montrer dans l'exemple 11 que*

***La continuité entraîne la continuité par rapport à chaque variable***

*iv) Mais attention, la réciproque est fausse! :-(*

***La continuité par rapport à chaque variable n'entraîne pas la continuité.***

*Autrement dit, il ne suffit pas de vérifier que les applications $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ sont continues pour pouvoir affirmer que la fonction $f$ est continue en $(x_0,y_0)$!*

### méthode 5: pour justifier de la continuité

- On utilise les théorèmes généraux sur les domaines où ils peuvent être appliqués.
- On étudie les éventuels point litigieux (par des DLS pour les fonctions d'une seule variable, en passant en polaire pour les fonctions de 2 variables)

### exemple 12: c'est la même méthode que pour les fonctions d'une seule variable

Soit la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$

### exemple 13:

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2.y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

1. Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$ en posant $\begin{cases} x &= r.\cos\theta \\ y &= r.\sin\theta \end{cases}$
2. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

# 4 Dérivées partielles des fonctions à valeurs réelles (V088)

## 4.1 dérivées partielles premières

**définition 8: dérivée partielle première pour une fonction de deux variables**

Soit $\boxed{\begin{array}{ccc} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$ et $(x_0,y_0)$ un point intérieur de $D$

1. On dit que
   $f$ ADMET UNE DÉRIVÉE PARTIELLE PREMIÈRE PAR RAPPORT À LA PREMIÈRE VARIABLE EN $a = (x_0,y_0)$

   lorsque la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ est dérivable en $x_0$

   c'est à dire lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$ ou $\boxed{\partial_1 f(x_0,y_0)}$ cette limite

2. On dit que
   $f$ ADMET UNE DÉRIVÉE PARTIELLE PREMIÈRE PAR RAPPORT À LA DEUXIÈME VARIABLE EN $(x_0,y_0)$

   lorsque la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est dérivable en $y_0$

   c'est à dire lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$ ou $\boxed{\partial_2 f(x_0,y_0)}$ cette limite

3. Lorsque toutes les dérivées partielles premières en $a$ existent,
   on appelle GRADIENT DE $f$ EN $a$, et on note $\overrightarrow{grad(f)}(a)$ ou $\nabla_a f$ ou $\nabla f(a)$, le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$

*rem: La notation correcte est* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *et non pas* $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$
*rem: on définit de manière identique les dérivées partielles premières pour une fonction de 3 variables*

**exemple 14: Etude de dérivées partielles premières en un point particulier**

Soit $\boxed{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^4+y^2} \end{array}}$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en (0,0)

**exemple 15:**

Soit $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y.|x| + x.|y| + z \end{array}$

Etude des dérivées partielles premières en (0,0,0)

*solution:*

- *La fonction* $g : x \mapsto f(x,0,0) = 0$ *est dérivable en* $0$, *avec* $g'(0) = 0$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0$
- *La fonction* $g : y \mapsto f(0,y,0) = 0$ *est dérivable en* $0$, *avec* $g'(0) = 0$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$
- *La fonction* $g : z \mapsto f(0,0,z) = z$ *est dérivable en* $0$, *avec* $g'(0) = 1$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1$

### définition 9: fonction de classe $C^1$

La fonction $f$ est dite DE CLASSE $C^1$ SUR UN OUVERT $D$ lorsque $f$ admet en tout point de $D$ toutes ses dérivées partielles premières, et que de plus, chacune des dérivées partielles premières est continue sur $D$.

*rem: pour une fonction de 2 variables $f : (x,y) \subset D \to f(x,y)$, dire que $f$ est de classe $C^1$ sur $D$ signifie que $f$ admet des dérivées partielles en tout point de $D$ et que de plus les applications $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur $D$*

**remarque 5 (*On signale une différence avec les fonctions d'une seule variable*)**

- *On sait que si $f$ est une fonction d'une seule variable on a*

$$f \text{ est } C^1 \Longrightarrow f \text{ est dérivable} \Longrightarrow f \text{ est continue}$$

- *Si $f$ est une fonction de 2 variables on a encore*

$$f \text{ est } C^1 \Longrightarrow f \text{ est continue}$$

*mais en revanche*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ existent} \not\Longrightarrow f \text{ est continue}$$

### théorème 3: théorème généraux pour les fonctions $C^1$

- On note $\boxed{C^1(D,\mathbb{R})}$, l'ensemble des fonctions de classe $C^1$ définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
- L'ensemble $C^1(D,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit interne, et l'on a
  - $\partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g$
  - $\partial_i(\lambda.f) = \lambda.\partial_i f$ lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ (constante)
  - $\partial_i(f \times g) = \partial_i f \times g + f \times \partial_i g$
  - $\partial_i \dfrac{f}{g} = \dfrac{\partial_i f \times g - f \times \partial_i g}{g^2}$ lorsque $g$ ne s'annule pas sur $D$
- Si $\varphi$ désigne une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle $I$ tel que $f(D) \subset I$ alors $\partial_i(\varphi \circ f) = \partial_i f \times \varphi' \circ f$

*rem: pour les fonctions d'une seule variable, on continue de noter la dérivée avec le ' (prime)*

### exemple 16: Etude des dérivées partielles premières en tout point

Soit $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x.e^{xy} \end{array}}$

Justifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et donner leurs valeurs

### exemple 17:

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & x^2t^3 \end{array}$

Justifier que les dérivées partielles premières de $f$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer

**théorème 4: "$C^1$ implique existence $DL_1$"**

Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ sur $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Alors:

- en tout point $a = (x_0,y_0) \in D$, $f$ admet un développement limité d'ordre un
- et l'on a

$$f(a+h) = f(x_0+h_1,y_0+h_2) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \underbrace{||h||}_{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.\varepsilon(h)$$

- cette formule s'écrit encore

$$f(a+h) = f(a) + < h,\overrightarrow{\nabla_a f} > + ||h||.\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \lim_{h\to(0,0)} \varepsilon(h) = 0$$

*rem:*
*dans le cas d'une fonction de trois variables, on a*

$$f(a+h) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + h_3.\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}.\varepsilon(h)$$

**exemple 18:**

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2y+2y \end{array}}$

1. Montrer que $f$ admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ un DL à l'ordre 1
2. Donner le DL au point $a = (1,2)$

- *La fonction $f$ est une fonction polynomiale, elle est donc $C^1$ ($C^\infty$ même) sur $\mathbb{R}^2$*
- *Comme $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ alors $f$ possède en tout point de $\mathbb{R}^2$ un $DL_1$*
- *On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+2$*

  *et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3$*
- *On a $f(1,2) = 6$, et donc le $DL_1$ de $f$ au point $a = (1,2)$ est*

$$\forall h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2, f(1+h_1,2+h_2) = 6 + 4h_1 + 3h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}.\varepsilon(h)$$

*Ce DL peut servir pour obtenir une valeur approchée de $f(x,y)$ quand $(x,y)$ est "proche" de $(1,2)$*
*Par exemple, ce DL donne pour valeur approchée de $f(1.01,1.98)$ la quantité* $6 + 4 \times 0.01 + 3 \times (-0.02) = 5.98$
*(la valeur exacte est* $5.979798$*)*

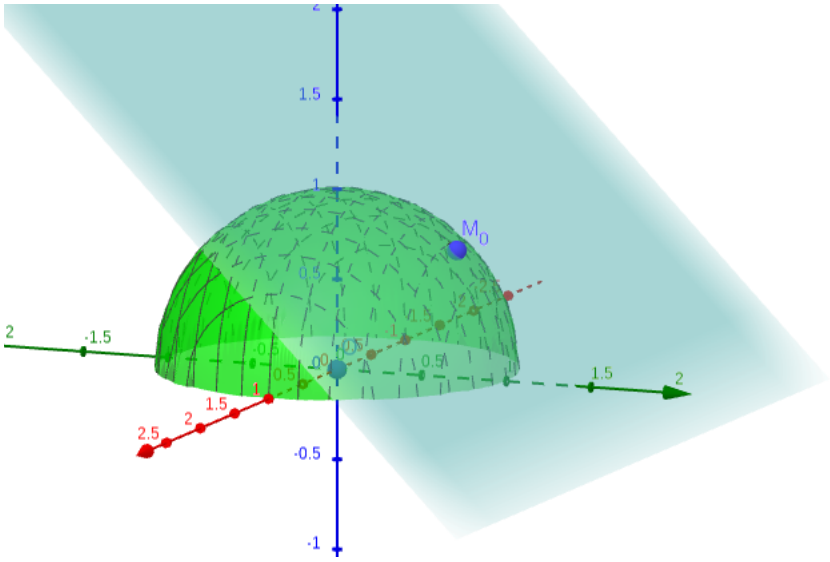
**exemple 19: développement limité vu comme plan tangent à une surface**

- La formule précédente peut s'écrire encore

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \sqrt{(x-x_0)_1^2+(y-y_0)^2}.\varepsilon(x,y)} \text{ avec } \lim_{(x_0,y_0)} \varepsilon = 0$$

- Considérons la surface $\Sigma$ d'équation $z = f(x,y)$ et $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$
- Notons $F : (x,y,z) \mapsto z - f(x,y)$

1. Ecrire l'équation du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ à $\Sigma$ en $M_0$
2. Comparer avec le DL




## 4.2 dérivée d'une fonction composée

**exemple 20:**

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy^2 \end{array} \qquad u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$

On pose $g : t \mapsto f(u(t),v(t))$

1. Calculer successivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$ et enfin $u'(t).\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) + v'(t).\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$
2. Calculer $g(t)$ puis $g'(t)$. Remarque?

**théorème 5: dérivée d'une fonction composée: règle de la chaîne**

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f$ et $\gamma$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $D$ et $I$ respectivement.

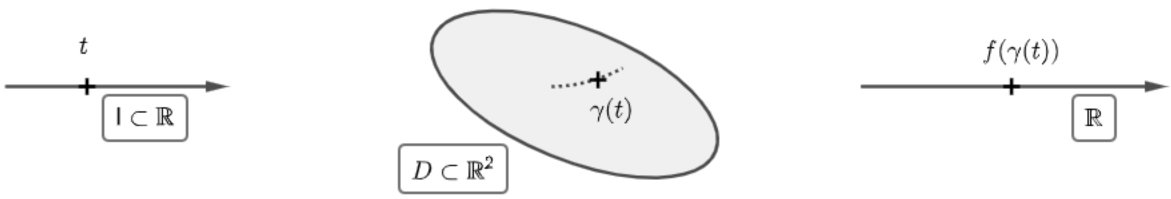
$$f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$$

Alors:

1. $f \circ \gamma$ est de classe $C^1$ sur $I$
2. $\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = x'(t).\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t).\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) = < \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >$

*rem: cette formule s'appelle "règle de la chaîne" et s'interprète comme la dérivée de $f$ le long de la courbe $\gamma$*
*rem: si les variables de $f$ ne sont pas déclarées au départ, on peut toujours écrire*

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t).\partial_1 f(x(t),y(t)) + y'(t).\partial_2 f(x(t),y(t))$$



### exemple 21:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
On pose $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(2t,1+t^2) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & f(\cos\theta,\sin\theta) \end{array}}$
Exprimer $g'(t)$ et $h'(\theta)$ en fonction des dérivées partielles de $f$.

### exemple 22: dérivée suivant un vecteur(au programme)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$ sur l'ouvert $D$
Soit $a \in D$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$
On appelle DÉRIVÉE DE $f$ EN $a$ SUIVANT LE VECTEUR $\vec{u}$ la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + t.\vec{u})$.
Montrer que cette dérivée est $< \nabla f(a),\vec{u} >$

**remarque 6 (*règle de la chaîne, version deux*)**

*Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ sur l'ouvert $D$*
*Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions de classe $C^1$ sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ telles que $\forall (u,v) \in \Delta, (\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)) \in D$.*
*Alors*

1. *la fonction $F : (u,v) \mapsto f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ est $C^1$ sur $\Delta$*

2. *.*

*rem: si on note $\varphi_1(u,v) = x(u,v)$ et $\varphi_2(u,v) = y(u,v)$, on peut alors écrire par abus de notation .*

### exemple 23: (règle de la chaîne )

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = f(u^2+v^2,uv) \end{array}}$

Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de $f$ .

**remarque 7** (***même formule pour avec des fonctions de 3 variables***)

*on a un résultat analogue si $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ : sous des hypothéses aussi larges et du même genre...*
*La fonction* $\boxed{\begin{array}{rcl} g: I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(u(t),\, v(t),\, w(t)) \end{array}}$ *est de classe $C^1$ avec*

$$\boxed{\forall t \in I, g'(t) = u'(t).\partial_1 f(u(t),\, v(t),\, w(t)) + v'(t).\partial_2 f(u(t),\, v(t),\, w(t)) + w'(t).\partial_3 f(u(t),\, v(t),\, w(t))}$$

## 5 Dérivées d'ordre supérieur (V090)

### exemple 24: présentation des dérivées d'ordre supérieur

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y + y^3$
Calculer les dérivées partielles secondes de $f$. Que remarque-t-on?

### définition 10:

Soit $f$ une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. où $D$ est un ouvert
On dit que la fonction $f$ est DE CLASSE $C^2$ SUR $D$ lorsque elle admet toutes ses dérivées partielles secondes sur $D$ et que qu'elles sont continues sur $D$.

### théorème 6: théorème de Schwarz , admis

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ sur l'ouvert $D$.
**Alors** , pour tout $i$ et $j$, $\boxed{\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f}$

*rem: en particulier si $f$ est une fonction de classe $C^2$ de deux variables on a* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

*On rappelle que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \partial_1\partial_2 f = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \partial_2\partial_1 f = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$

### exemple 25:

Soient $g$ et $h$ deux fonctions de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x)+h(y) \end{array}}$

Les dérivées croisées de $f$ sont elles égales?

- *On a* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$
- *La fonction* $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$ *est dérivable (fonction constante!) on a donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 0$
- *La fonction* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$ *est dérivable (fonction constante!) on a donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 0$
- *Même si $f$ n'est pas de classe $C^2$, les dérivées croisées sont égales!*

# 6 Exemples d'équations aux dérivées partielles

**proposition 2**

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $D = I \times J$.*

- *Les solutions de classe $C^1$ sur $D$ de l'équation* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0}$ *sont les fonctions* $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & A(y) \end{array}}$

  *où $A$ est une fonction $C^1(J,\mathbb{R})$.*
- *Les solutions de classe $C^1$ sur $D$ de l'équation* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0}$ *sont les fonctions* $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & A(x) \end{array}}$

  *où $A$ est une fonction $C^1(I,\mathbb{R})$.*

**preuve:**

- On va raisonner par Analyse-Synthèse
- $\boxed{\text{Partie Analyse}}$

  On suppose que $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ vérifie $\forall (x,y) \in D = I \times J, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

  – Pour $y \in J$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g: I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$.

  On alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ .
  Ainsi la fonction $g$ est constante sur l'intervalle $I$
  Ainsi, il existe un réel, a priori dépendant de $y$ c'est pourquoi nous le noterons $A(y)$, tel que $\forall x \in I, g(x) = A(y)$

  On a ainsi
  $$\boxed{\forall (x,y) \in D = I \times J, f(x,y) = A(y)}$$

  – **Montrons maintenant que l'application** $A : y \mapsto A(y)$ **est** $C^1$ **sur** $J$
  Pour $x_0 \in I$ fixé, on remarque que $A : y \mapsto A(y) = f(x_0,y)$
  Comme la fonction $y \mapsto (x_0,y)$ est $C^1$ sur $J$ et que la fonction $f$ est $C^1$ sur $I \times J$,
  par composition on sait que la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est $C^1$ sur $J$, càd que $A$ est $C^1$ sur $J$

  – **A la fin de la partie synthèse, on a montré que si** $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ **vérifie** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ **alors nécessairement** $f : (x,y) \mapsto A(y)$ **avec** $A \in C^1(J,\mathbb{R})$
- $\boxed{\text{Partie Synthèse}}$

  Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f: I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y) \end{array}}$ avec $A \in C^1(J,\mathbb{R})$

  Il est clair que $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ et vérifie $\forall (x,y) \in D, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

**VOUS TROUVEREZ DE NOMBREUX EXERCICES CORRIGES SUR LE SITE !**

# 7 Recherche d'extremum

## 7.1 rappel: fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses?

1. Si $f'(a) = 0$ alors $f$ présente un extremum en $a$
2. Si $f$ présente un extremum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$

## 7.2 extrema d'une fonction de plusieurs variables

**définition 11: extremun local ou global**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}^p$ et $f$ une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément de $D$.

- On dit que $f$ présente un MAXIMUM GLOBAL [resp. MINIMUN GLOBAL ] au point $a$ lorsque

$$\forall x \in D, f(x) \leqslant f(a) \text{ [resp. } \forall x \in D, f(x) \geqslant f(a)]$$

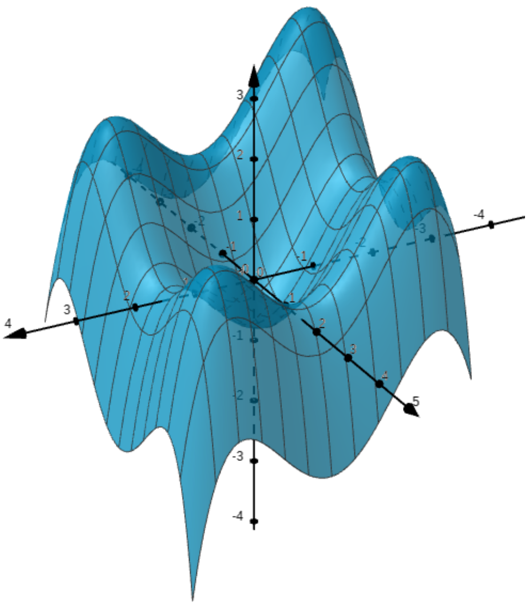
- On dit que $f$ présente un MAXIMUM LOCAL [resp. MINIMUM LOCAL ] au point $a$ lorsque

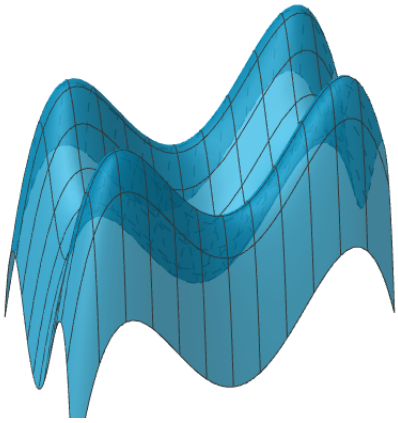
il existe $B$ une boule ouverte de centre $a$ telle que

$$\forall x \in B \cap D, f(x) \leqslant f(a) \text{ [resp. } \forall x \in B \cap D, f(x) \geqslant f(a) \text{ ]}$$

- On appelle EXTREMUM un minimum ou un maximum

*Les extrema globaux sont bien sûr aussi des extrema locaux.*





**exemple 26:**

Etude en $a = (0,1,-2)$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$

## exemple 27:

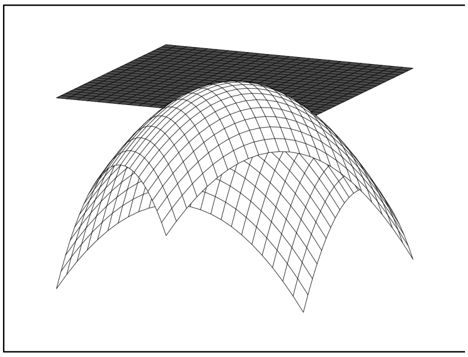
Etude en $a = (0,0)$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^2$

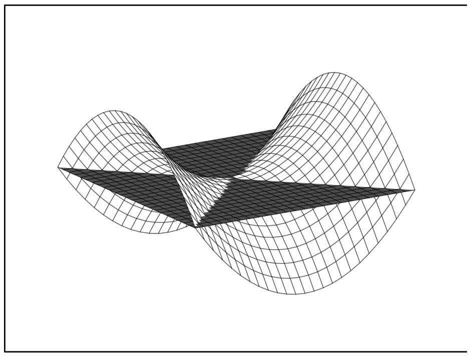
## définition 12: point critique=point en lequel le gradient est nul

On dit que le point $a \in D \subset \mathbb{R}^2$ est UN POINT CRITIQUE de $f$ lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

*autrement dit, $a$ est un point critique de $f$ lorsque $\nabla_a f = \vec{0}$*

*rem: si la fonction possède 3 variables, on y ajoute $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$*





## exemple 28:

Etude en $(0,0)$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3y^3$

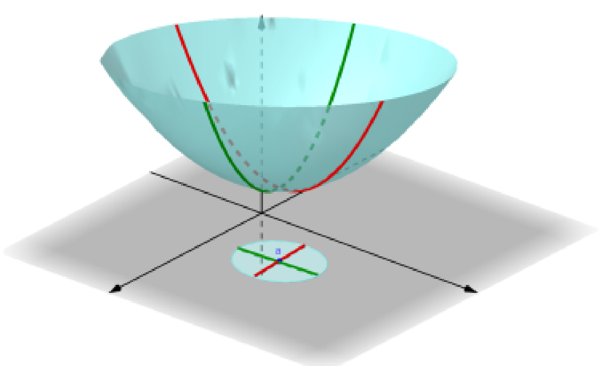
## théorème 7: condition nécessaire d'existence d'un extremum

Soit $D$ un OUVERT de $\mathbb{R}^p$, $a \in D$ et $f \in C^1(D,\mathbb{R})$.
**Si** $f$ présente un extremum local au point $a$ **alors** $a$ est un point critique de $f$

### théorème 8: rappel sur les fonctions d'une seule variable

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
**Si** $f$ présente un extremum local en $a$ **alors** $f'(a) = 0$

*rem: sur un OUVERT, les éventuels extrema sont à chercher parmi les points critiques*
*rem: pour une fonction de deux variables, un point critique correspond à un point où le plan tangent est horizontal pour la surface d'équation $z = f(x,y)$*



**exemple 29:**

Etudier les extrema éventuels de la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+3y^2-4yz \end{array}$

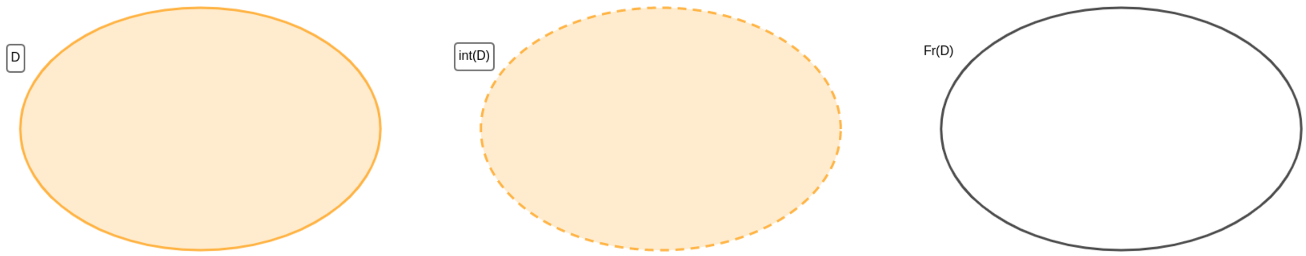
**exemple 30:**

Etudier les extrema éventuels de la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+(y-1)^2+(z+2)^2 \end{array}$

**méthode 6: méthode pour la recherche des extrema éventuels**

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction au moins $C^1$

1. Si $D$ est un FERMÉ BORNÉ, on le dit, et on cite le THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES qui prouve déjà qu'un maximum global et un minimum global existeront
2. Si $D$ est un ouvert alors on est content car il n'y aura pas d'étude à faire sur le bord de $D$
3. On détermine les points critiques de $f$ dans l'intérieur de $D$, puis pour chaque point critique, on détermine sa nature (très souvent avec la matrice hessienne)
4. Si $D$ n'est pas un ouvert, on regarde en plus ce qui "se passe sur le bord". Pour cela on paramétrise le bord par une fonction $t \mapsto \gamma(t)$, et on cherche les extrema de $t \mapsto f(\gamma(t))$
5. On fait une synthèse des résultats en conclusion




### 7.3 extrema d'une fonction de deux variables

**Nous allons maintenant étudier plus à fond le cas où $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f$ désigne une fonction de deux variables définie sur $D$ et $a$ est un point critique de $f$ .**

**théorème 9: Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$.
**Alors** , en tout point $a=(x_0,y_0)$ de $D$, $f$ admet un développement limité d'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}h_1^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_1h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{1}{2}h_2^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + ||h||^2\epsilon(h)$$

*remarque: si $a=(x_0,y_0)$ est un point critique, on a*

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h_1^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_1h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{1}{2}h_2^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + ||h||^2\epsilon(h)$$

En identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on peut écrire $\boxed{\frac{1}{2}h_1^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_1h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{1}{2}h_2^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}^T.H_f(a).\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}$

### définition 13: Matrice hessienne

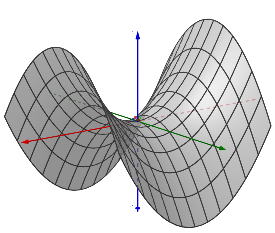
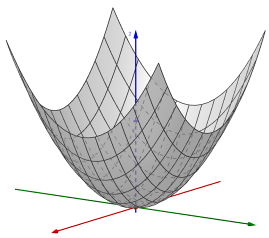
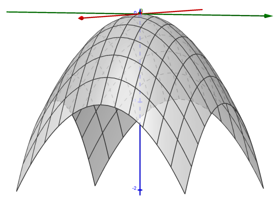
Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$.
Alors, en tout point $a = (a_1,a_2)$ de $D$, on définit LA MATRICE HESSIENNE DE $f$ EN $a$ par

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

### théorème 10: nature d'un point critique

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ sur un OUVERT $D$ , et $a$ un POINT CRITIQUE
Notons $H = H_f(a)$.
Alors:

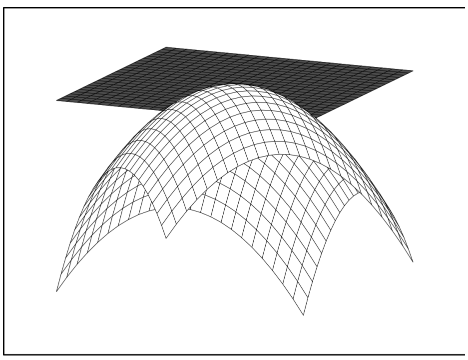
i) **si** $\det(H) < 0$ **alors** $f$ ne présente pas d'extremum local en $a$
ii) **si** $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) > 0$ **alors** $f$ présente UN MINIMUM LOCAL en $a$
iii) **si** $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) < 0$ **alors** $f$ présente UN MAXIMUM LOCAL en $a$
iv) **si** $\det(H) = 0$ **alors** il n'y a pas de conclusion

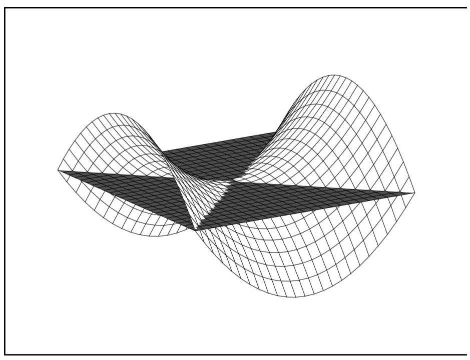
**remarque 8** (***interprétation géométrique du théorème précédent***)

*Soit $\Sigma$ la surface d'équation $z = f(x,y)$.*
*Soit $(x_0,y_0)$ un point critique de $f$.*
*On note $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$ avec $z_0 = f(x_0,y_0)$.*
*Notons $H = H_f(x_0,y_0$ la matrice hessienne Notons $\mathcal{P}_{M_0}$ le plan tangent à $\Sigma$ en $M_0$*

- *$\mathcal{P}_{M_0}$ a pour équation $z = z_0$*
- *si $\det(H) < 0$ alors $\mathcal{P}_{M_0}$ "traverse" $\Sigma$ au voisinage de $M_0$*
- *si $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) > 0$ alors $\mathcal{P}_{M_0}$ est situé en dessous $\Sigma$ au voisinage de $M_0$*
- *si $\det(H) > 0$ et $\operatorname{tr}(H) < 0$ alors $\mathcal{P}_{M_0}$ est situé au dessus $\Sigma$ au voisinage de $M_0$*



POINT ELLIPTIQUE
POINT BALLON



POINT HYPERBOLIQUE
POINT COL

**exemple 31:**

1. Extrema de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$
2. Extrema de la fonction définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ par $f(x,y) = xy$

**exemple 32:**

Déterminer les extrema de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 3xy \end{array}$

- Comme $f$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert,

  On sait que si $f$ présente un extremum en $a$ alors $a$ est un point critique.

- On a les équivalences

$$\overrightarrow{grad}_{(x,y)} f = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y & = 0 \\ 3y^2 - 3x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x & = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x & = x^4 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x.(x^3 - 1) & = 0 \end{cases}$$

- Il y a ainsi deux points critiques $a = (0,0)$ et $b = (1,1)$

- La matrice hessienne de $f$ en $(x,y)$ est $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude du point** $a = (0,0)$
  - On a $H = H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
  - On a $\det(H) = -9 < 0$ donc $\boxed{f \text{ ne présente pas d'extremum en } a = (0,0)}$

- **Etude du point** $b = (1,1)$
  - On a $H = H_f(b) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
  - On a $\det(H) = 27 > 0$ et $\mathrm{tr}(H) = 12 > 0$ donc $\boxed{f \text{ présente un minimum local en } b = (1,1)}$

    *rem: ce minimum local vaut* $f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1$

    *On remarque que ce n'est pas un minimum global car* $f(-2,0) = -8$

**exemple 33:**

Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$

# 8 Compléments: fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$

*Nous allons donner les définitions et les résultats pour* $(p,n) = (2,3)$*: ils se généralisent facilement à d'autres valeurs de* $(p,n)$

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

On pourra donc écrire $f$ sous la forme $\boxed{\begin{array}{ccc} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v)) \end{array}}$

Les fonctions $f_1, f_2$ et $f_3$ s'appellent LES FONCTIONS COORDONNÉES de $f$.

### définition 14:

Soit $l=(l_1,l_2,l_3)\in\mathbb{R}^3$ et $a$ un point adhérent de $U$.

1. On dit que $f$ POSSÈDE EN $a$ LA LIMITE $l$, et on note $\lim\limits_{w\to a} f(w)=l$ lorsque
$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,\forall w\in U,||w-a||\leqslant\eta\Rightarrow||f(w)-l||\leqslant\epsilon$$
2. Si $a\in D$, on dit que $f$ EST CONTINUE EN $a$ lorsque $\lim\limits_{(u,v)\to a} f(u,v)=l$
3. On dit que $f$ EST CONTINUE SUR $U$ lorsque $f$ est continue en tout point de $U$

### théorème 11:

1. $f$ tend vers $l=(l_1,l_2,l_3)$ en $a$ ssi $\begin{cases}\lim\limits_a f_1 &= l_1\\ \lim\limits_a f_2 &= l_2\\ \lim\limits_a f_3 &= l_3\end{cases}$
2. $f$ est continue en $a$ ssi les fonctions coordonnées $f_1, f_2$ et $f_3$ est continue en $a$

**remarque 9**

- *La dérivation se fait coordonnée par coordoonnée*

$$\text{si } f=f_1,f_2,f_3) \qquad \text{alors} \qquad \partial_1 f=(\partial_1 f_1,\partial_1 f_2,\partial_1 f_3) \qquad \frac{\partial f}{\partial u}=(\frac{\partial f_1}{\partial u},\frac{\partial f_2}{\partial u},\frac{\partial f_3}{\partial u})$$

- *Les définitions des fonctions $C^1$ et $C^2$ sont celles que nous attendons. Leurs caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées est également sans surprise!*

### théorème 12: règle de la chaîne généralisée

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\end{array}}$ une fonction de classe $C^1$ sur l'ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} \varphi: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),y(u,v))\end{array}}$ une fonction de classe $C^1$ sur l'ouvert $V$ de $\mathbb{R}^2$

Alors

1. la fonction $F=f\circ\varphi:(u,v)\mapsto f(x(u,v),y(u,v))$ est $C^1$ sur $V$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))+\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$
3. $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))+\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$