Variables aléatoires discrètes II

Table des matières

1 Espérance

définition 1: espérance lorsque $X(\Omega)$ est fini (rappel)

Soit X une va telle que $X(\Omega)$ soit fini
On appelle ESPÉRANCE DE X la quantité $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)$

rem: l'espérance de X est "la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités de réalisations".
rem: l'espérance est un indicateur de position

remarque 1

Cette définition permet d'écrire aussi que

- *(peu usité voire jamais)* $E(X)=\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega).P(\{\omega\})$
- *si* $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ *alors* $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i)$
- *En particulier si* $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ *alors* $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} i.P(X=i)$

On veut généraliser la notion d'espérance d'une variable aléatoire réelle que vous avez vue l'année dernière dans le cas où $X(\Omega)$ était un ensemble fini et ainsi donner un sens à la notation $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)$

Mais les choses ne sont plus aussi simples car nous aurons affaire à une somme avec une infinité de termes, c'est à dire une série.

définition 2: espérance lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r telle que $X(\Omega)=\{x_n/n\in\mathbb{N}\}$ soit dénombrable.

On dit que la var X est D'ESPÉRANCE FINIE OU ADMET UNE ESPÉRANCE lorsque la série de terme général $x_n.P(X=x_n)$ est **absolument convergente**.

Dans ce cas, on appelle ESPÉRANCE DE X, et on note $E(X)$ le réel $\boxed{E(X)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n.P(X=x_n)}$

rem: l'espérance d'une va ne dépend que de sa loi!
Si $X\sim Y$ alors X possède une espérance ssi Y possède une espérance, et dans ce cas $E(X)=E(Y)$

remarque 2

- *Pourquoi avoir imposé l'absolue convergence de la série plutôt que simplement la convergence? Un théorème cité dans le chapitre sur les séries numériques indique qu'une série absolument convergente est commutativement convergente (c'est à dire que l'ordre de sommation, donc ici l'étiquettage de nos événements, ne change pas la valeur de la somme). On peut donc noter également* $\boxed{E(X)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)}$
- *On rappelle que la série de terme général u_n est ACV lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.*
- *Certaines valeurs aléatoires ne possèdent pas d'espérance*

exemple 1:

Retrouver l'espérance des lois géométriques et de Poisson

méthode 1: comment montrer qu'une v.a. possède une espérance

- Si $X(\Omega)$ est fini, l'espérance existe toujours! Il n'y a rien à prouver!
- Si $X(\Omega) = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on étudie l'ACV de la série $\sum x_n.P(X = x_n)$

exemple:

1. *On considère la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$. Montrer que X est d'espérance finie, et donner $E(X)$*
2. *La variable aléatoire $Y = X^2$ possède-t-elle une espérance finie?*

théorème 1: théorème de transfert-admis

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$
Soit g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.
Alors:

i) la var $g(X)$ est d'espérance finie $\iff$ la série $\sum g(x_n).P(X = x_n)$ est absolument convergente

ii) et dans ce cas $E(g(X)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(x_n).P(X = x_n)$

rem: dans le cas particulier courant où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, on a donc

- *la var $g(X)$ est d"espérance finie $\iff$ la série $\sum g(n).P(X = n)$ est absolument convergente*
- *et dans ce cas, $E(g(n)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(n).P(X = n)$*

rem: le théorème de transfert permet de déterminer l'espérance d'une va sans connaître sa loi!

exemple 2:

Soit X une v.a qui suit une loi de Poisson, et $Y = (X - 5)^2$
On sait donc que:

i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$

Le théorème de transfert nous permet d'affirmer que:

- *Y possède une espérance* $\boxed{\textit{ssi}}$ *la série de terme général $(n-5)^2.P(X = n) = (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est ACV.*

  Posons $u_n = (n-5)^2.P(X = n) = (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

  On a $u_n \sim n^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$

  et donc $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \sim \dfrac{(n+1)^2}{n^2}.\dfrac{\lambda}{(n+1)} \sim \dfrac{\lambda}{n}$

  On en déduit que $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, ce qui nous permet d'affirmer d'après la règle de D'Alembert que la série est ACV.
  Ceci justifie que Y possède une espérance

- *On sait alors que $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-5)\cdot P(X = n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$*

  A vous de calculer la somme de cette série numérique! Vous devez trouver $\lambda^2 - 9\lambda + 25$

exemple 3:

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Justifier que $Y = \dfrac{(-1)^X}{X}$ est d'espérance finie et la calculer

exemple 4: un exemple de var. d'espérance non finie

Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche.
Déterminer la loi de X. Est-elle d'espérance finie?

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \geqslant 1$ fixé.
   Avec les notations habituelles, on a
   $$(X = n) = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$
   La formule des probabilités composées donne
   $$P(X = n) = P(N_1).P_{N_1}(N_2).P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \ldots P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-2}}(N_{n-1}).P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1}} P(B_n)$$
   et ainsi
   $$P(X = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
2.
   - On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n.P(X = n) = n.p_n = \dfrac{1}{n+1}$
   - Or $\sum \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divegente, on a donc prouvé que $\sum n.P(X = n)$ est une série divergente.
   - Ceci prouve que X n'est pas une var d'espérance finie: elle n'admet pas d'espérance

théorème 2: linéarité - positivité - croissance...

Soient X et Y deux v.a.r.d POSSÉDANT DES ESPÉRANCES sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$
Soient a et b deux réels.

i) **(linéarité):** Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la var $aX + bY$ possède une espérance et
$$\boxed{E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)}$$
ii) **(positivité):** Si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$
iii) **(croissance):** Si $X \geqslant Y$ alors $E(X) \geqslant E(Y)$
iv) Si X est POSITIVE ET D'ESPÉRANCE NULLE (càd $E(X) = 0$) alors $P(X = 0) = 1$
(càd $(X = 0)$ est un événement presque sûr)
v) Si X et Y sont indépendantes alors XY possède aussi une espérance et
$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

rem: le premier point permet de dire qu'une combinaison linéaire de va qui possèdent des espérances est une va qui possède une espérance

démo

i) admis
ii) On suppose que $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant 0$.
On a $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.P(X = x_n)$.
C'est la somme d'une série à termes positifs, elle est donc positive!
iii) On suppose que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant Y(\omega)$.
La va $Z = X - Y$ possède une espérance d'après i).
De plus $Z = X - Y$ est positive ; d'après le point ii) on peut dire que $E(X - Y) \geqslant 0$.
Comme $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$ on a bien prouvé que $E(X) \geqslant E(Y)$
iv) admis

théorème 3: admis

Soient X et Y deux va.
Si Y possède une espérance et si $|X| \leqslant Y$ alors X possède une espérance

théorème 4: cas particulier d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (peu utilisé)

Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. (càd $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$).
Alors, on a l'équivalence:

$$X \text{ possède une espérance ssi la série } \sum_{n \geqslant 1} P(X \geq n) \text{ converge}$$

et dans ce cas $\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)}$

2 Variance V142

théorème 5: "la variance implique l'espérance"

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

Si X^2 est d'espérance finie, **alors** X est aussi d'espérance finie

rem: On montre d'une manière plus générale que si X^k possède une espérance, alors $X^{k-1},X^{k-2}\dots,X^2,X$ possèdent des espérances

démo:

On note $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = x_n)$

On suppose que X^2 possède une espérance

càd que la série $\sum x_n^2.p_n$ converge

- On commence par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(1 + x_n^2)$.

  En effet, $0 \leqslant (1 - |x_n|)^2 = 1 - 2|x_n| + |x_n|^2 = 1 - 2|x_n| + x_n^2$

- On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |x_n|.p_n \leqslant \frac{1}{2}(p_n + x_n^2.p_n)$$

  (on multiplie par $p_n \geqslant 0$)

  Comme $\sum x_n^2.p_n$ converge par hypothèse et que $\sum p_n$ converge aussi (vers 1),

  on peut affirmer que $v_n = \frac{1}{2}(p_n + x_n^2.p_n)$ est le tg d'une série convergente.

  Le théorème de convergence des séries positives permet d'affirmer que $\sum |x_n|.p_n$ converge

  Ce qui est la définition de X possède une espérance finie

Remarque: Il est possible aussi de montrer la majoration plus fine: $|x_n| \leqslant \max(1,x_n^2)$

définition 3:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$
Si X^2 est d'espérance finie, on appelle VARIANCE DE X le réel

$$\boxed{V(X) = E([X - E(X)]^2)}$$

et on appelle ÉCART-TYPE DE X le réel $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$
rem: la variance existe donc uniquement dans le cas où X^2 est d'espérance finie
rem: la variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion

méthode 2: comment montrer qu'une v.a. possède une variance

- Si $X(\Omega)$ est fini, la variance existe toujours: il n'y a rien à prouver!
- Si $X(\Omega) = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on étudie l'ACV de la série $\sum x_n^2.P(X = x_n)$
- Une astuce classique consiste à passer par $E(X.(X-1))$ ou $E(X.(X+1))$

exemple 5:

On considère une va X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}, P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$ et sinon $P(X = n) = \dfrac{1}{3^n}$.
Montrer que X admet une variance et la calculer.

exemple 6:

Retrouver la variance d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson

théorème 6: Formule de Koenig-Huygens

Si X possède une variance alors $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

démo:
On a $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X).X + E(X)^2$

Comme X possède une variance,

on sait que cela signifie que X^2 possède une espérance

et par théorème on sait que X possède alors aussi une espérance.

D'après la linéarité de l'espérance, on peut écrire

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X).X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

théorème 7:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

1. Si X possède une variance alors pour tous réels a et b:
   i) $aX + b$ possède une variance
   ii) $\boxed{V(aX+b) = a^2V(X)}$ et $\boxed{\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)}$
2. $V(X) = 0$ ssi l'événement "X est constante" est presque certain
   (càd s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$)

remarque 3

- *si X est une va constante(de valeur c) alors $V(X) = 0$ et $E(X) = c$*
- *On dit que la variable aléatoire X est*
  - *CENTRÉE lorsque $E(X) = 0$*
  - *RÉDUITE lorsque $V(X) = 1$*
  - *CENTRÉE RÉDUITE lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$*
- *si $\sigma(X) > 0$ alors la va $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite*

3 Fonctions génératrices V143

On va se doter d'un objet mathématique qui caractérisera chaque v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

définition 4:

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

On définit LA FONCTION GÉNÉRATRICE DE X par $\boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n).t^n = E(t^X)}$

rem: si la var X ne prend qu'un nombre fini de valeurs alors G_X est un polynôme.

théorème 8: fonctions génératrices des lois de référence(à savoir retrouver)

loi de Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$G_X(t) = q + pt$	$R = +\infty$
loi binomiale	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$G_X(t) = (q+pt)^n$	$R = +\infty$
loi de Poisson	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)}$	$R = +\infty$
loi géométrique	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$	$R = \dfrac{1}{q}$

théorème 9: cela résulte du chapitre Séries Entières directement

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

1. Le rayon de convergence R de la série entière $G_X(t)$ est supérieur ou égal à un, et $G_X(1) = 1$
2. La fonction génératrice est C^∞ sur $]-R,R[$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}}$

On en déduit que

$$\boxed{X \sim Y \text{ ssi } G_X = G_Y}$$

c'est pour cela qu'une loi d'une va X est CARACTÉRISÉE *par sa fonction génératrixe G_X*

théorème 10:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
On note G_X sa fonction génératrice de rayon R

1. Si $R>1$ alors G_X est C^∞ en 1.
2. X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas

$$\boxed{G'_X(1)=E(X)}$$

3. X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas

$$\boxed{V(X)=G"_X(1)+G'_X(1)(1-G'_X(1))}\text{ (à savoir retrouver)}$$

rem(HP): on montre que pour tout $n\geqslant 1$ entier on a $G_X^{(n)}(1)=E(X(X-1)\dots(X-(n-1)))$

démo dans le cas où $R>1$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on sait que

i) G_X est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$

ii) la dérivée est obtenue par dérivation terme à terme, càd

$$\forall t\in]-R,+R[, G'_X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n.P(X=n).t^{n-1}$$

$$\forall t\in]-R,+R[, G''_X(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n.(n-1).P(X=n).t^{n-2}$$

Comme on se place dans le cas où $R>1$ il est légitime de remplacer t par 1 ce qui donne

i) $G'_X(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n.P(X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n.P(X=n)=E(X)$ *(on reconnait la définition de $E(X)$!)*

ii) $G''_X(1)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n.(n-1).P(X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n.(n-1).P(X=n)=E(X(X-1))$

(par utilisation du théorème de transfert)

On a alors bien

$$\begin{aligned}V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X(X-1)+X)-(E(X))^2&=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2\\&=G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2\\&=G''_X(1)+G'_X(1).(1-G'_X(1))\end{aligned}$$

exemple 7: amusons-nous à retrouver les espérances

A l'aide de la fonction génératrice, retrouver l'espérance et la variance pour les lois usuelles.

exemple 8:

Soit X une va de fonction génératrice $G_X: t\mapsto \dfrac{\lambda.t}{2-t^2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

1. Déterminer λ
2. Justifier que X possède une variance et une espérance et les déterminer

théorème 11: fonction génératrice de la somme de v.a. indépendantes

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé
Soient X et Y deux v.a indépendantes telles que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$
On note G_X et G_Y leurs fonctions génératrices,et R_X, R_Y leurs rayons.
Alors:

i) le rayon de G_{X+Y} est au moins égal à $R=\min(R_X,R_Y)$
ii) $\boxed{G_{X+Y}(t)=G_X(t).G_Y(t)}$ pour tout $t\in]-R,R[$

démo:

- Notons $G_X(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(X=n)t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ et $G_Y(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(Y=n)t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nt^n$
- Notons $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ le produit de Cauchy de ces 2 séries entières
  i) Par théorème on sait déjà que le rayon de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_X,R_Y)$
  ii) Par définition on sait que

$$\forall n\in\mathbb{N},c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}P(X=k).P(Y=n-k)=P(X+Y=n)$$

  iii) Ainsi le produit de Cauchy de ces 2 séries est $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(X+Y=n).t^n$

  ceci prouve que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ n'est rien d'autre que $G_{X+Y}(t)$. cqfd!
- *Démonstration beaucoup plus rapide: On peut aussi remarquer que*

  si X et Y sont indépendantes alors t^X et t^Y sont indépendantes

  et l'on peut alors écrire, sous réserve d'existence des espérances,

$$G_X(t).G_Y(t)=E(t^X).E(t^Y)=E(t^X.t^Y)=E(t^{X+Y})=G_{X+Y}(t)$$

exemple 9: amusons-nous à retrouver des résultats connus

A l'aide des fonctions génératrices, déterminer la loi de $X+Y$ lorsque X et Y sont indépendantes
i) avec $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_2)$
ii) avec $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$
iii) avec $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$

remarque 4 (***Le résultat du théorème se généralise***)

Si $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des va (mutuellement) indépendantes alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)$$

On retrouve les cas particuliers au programme

i) somme de v.a. de Bernouilli indépendantes et de même paramètre:
$G_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\prod\limits_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)=\prod\limits_{i=1}^{n}(q+pt)=(q+pt)^n$ *On retrouve* $X_1+\cdots+X_n\sim\mathcal{B}(n,p)$

ii) somme de v.a. de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$
$G_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\prod\limits_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)=\prod\limits_{i=1}^{n}e^{\lambda_i(t-1)}=e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(t-1)}$ *On retrouve* $X_1+\cdots+X_n\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$

exemple 10:

Soit X une v.a.r.d. prenant pour valeurs les entiers naturels congrus à 0 ou 1 modulo 3, et dont la loi de probabilité est donnée par $\forall n \in X(\Omega), P(X=n) = \lambda.3^{-n}$ où λ est une constante.

1. Déterminer λ
2. Déterminer la fonction génératrice de X. Justifier que X possède une espérance et une variance.

Réponse

1. - On a $X(\Omega) = \{0,1,3,4,6,7,9,10,\dots\} = \{3k,3k+1 | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$
   - Comme

   $$((X=0),(X=1),(X=3),(X=4),(X=5),\dots) = ((X=3k))_{k\geqslant 0} \cup ((X=3k+1))_{k\geqslant 0}$$

   est le système complet d'événements associé à X,
   on doit avoir $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1) = 1$
   - Or $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k} = \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^3}\right)^k = \dfrac{\lambda}{1-\dfrac{1}{3^3}} = \dfrac{27\lambda}{26}$
   et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k-1} = \frac{\lambda}{3}\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^{-3k} = \frac{\lambda}{3}.\frac{27}{26} = \frac{9\lambda}{26}$
   - La condition est donc $\dfrac{27\lambda}{26} + \dfrac{9\lambda}{26} = 1$, càd $\boxed{\lambda = \dfrac{13}{18}}$
2. - Par définition on a

   $$\begin{aligned} G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k)t^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1)t^{3k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k}t^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k-1}t^{3k+1} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k + \lambda.\frac{t}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k \\ &= \frac{13}{18}(1+\frac{t}{3})\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k \end{aligned}$$

   Or la série géométrique $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k$ converge ssi $\left|\frac{t^3}{3^3}\right| < 1$ càd $|t| < 3$

   Le rayon est donc $R = 3$ et l'on a $\forall t \in]-3,+3[, G_X(t) = \dfrac{13}{18}(1+\dfrac{t}{3}).\dfrac{1}{1-\dfrac{t^3}{3^3}} = \dfrac{13}{2}.\dfrac{1+3t}{27-t^3}$
   - Comme le rayon vaut 3, on sait que G_X est C^∞ sur $]-3,+3[$.
   En particulier, on sait que G_X est dérivable et deux fois dérivable en 1, ce qui, par théorème, permet d'affirmer que X possède une espérance et une variance
   - *Connaître l'espérance et la variance nécessite de fastidieux calculs de dérivées...*

4 covariance

théorème 12: inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X^2 et Y^2 possèdent une espérance alors

i) XY posssède une espérance

ii) $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}.\sqrt{E(Y^2)}$ avec égalité ssi $\begin{cases} P(X=0)=1 \\ \text{ou} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, P(Y=\lambda.X)=1 \end{cases}$

définition 5: covariance de 2 variables aléatoires

Si X et Y possèdent une variance, on appelle COVARIANCE DE X ET Y, et on note $\text{cov}(X,Y)$ la quantité

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = E\left((X-E(X)).(Y-E(Y)\right)}$$

rem: la covariance est l'espérance du produit des deux variables préalablement centrées.
rem: deux va dont la covariance est nulle sont dites DÉCORRÉLÉES

exemple 11: décorrélées $\not\Longrightarrow$ indépendantes

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.
Soient X la variable prenant pour valeur de nombre de Pile obtenus moins un, et Y la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y)
2. Calculer la covariance des variables X et Y
3. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

théorème 13: Formule de Koenig-Huygens

Lorsque la covariance de X et de Y existe, on a

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

méthode 3: comment calculer la covariance de 2 va

Notons $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j | j \in J\}$ ainsi que $\mu_X = E(X)$ et $\mu_Y = E(Y)$.
Le théorème de transfert se généralisant à une fonction de 2 variables, on a en particulier

$$E(XY) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i.y_j.P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

et

$$E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y).P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

- Le calcul de la covariance se fait donc par le calcul d'une double somme.
- Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, il n'y a pas de problème de convergence!
- Dans le cas particulier classique où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i.j.P(X = i \cap Y = j)$$

exemple 12:

Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau de gauche suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

$Z \setminus T$	1	2	3	4
1	0.08	0.08	0.24	0.12
2		0.02		
3				

1. Déterminer $\text{cov}(X,Y)$ (on devra trouver 0)
2. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer $\text{cov}(Z,T)$
   (on trouvera $E(ZT) = 5.6$ et $\text{cov}(Z,T) = 0.2496$)

théorème 14:

Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X,Y) = 0$

c'est à dire (X et Y indépendantes $\Longrightarrow$ X et Y décorrélées)
rem: la réciproque est fausse

théorème 15: lien entre variance et covariance

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes possédant une variance.

i) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la variable aléatoire $aX + bY$ possède une variance et l'on a

$$\boxed{V(aX + bY) = a^2.V(X) + b^2.V(Y) + 2ab.\,\text{cov}(X,Y)}$$

ii) en particulier,

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{cov}(X,Y) \quad \text{et} \quad V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\text{cov}(X,Y)}$$

rem: bien sûr, lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, les variances et la covariance existent toujours

théorème 16: variance d'une somme finie

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des va qui possèdent des variances.
Alors

- $V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \text{cov}(X_i,X_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \text{cov}(X_i,X_j)$
- Si les variables sont deux à deux décorrélées on a $V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(X_i)$

ex: $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2.\,\text{cov}(X_1,X_2) + 2.\,\text{cov}(X_1,X_3) + 2.\,\text{cov}(X_2,X_3)$

théorème 17: propriétés de la covariance

cov est une forme bilinéaire symétrique et positive!

- $\text{cov}(X,X) = V(X) \geqslant 0$
- $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$
- $\text{cov}(a.X_1 + b.X_2,Y) = a.\,\text{cov}(X_1,Y) + b.\,\text{cov}(X_2,Y)$
- $\text{cov}(X,a.Y_1 + b.Y_2) = a.\,\text{cov}(X,Y_1) + b.\,\text{cov}(X,Y_2)$

5 Résultats asymptotiques V146

théorème 18: inégalité de Markov

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r.d à VALEURS POSITIVES et admettant une espérance.

Alors pour tout a réel strictement positif : $\boxed{P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}$

démo : On note $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $a > 0$.
On note:

- I l'ensemble des indices i pour lesquels $x_i < a$
- J l'ensemble des indices j pour lesquels $x_j \geqslant a$

Ainsi $(X \geqslant a) = \bigcup_{j \in J} (X = x_j)$ et donc $P(X \geqslant a) = \sum_{j \in J} P(X = x_j)$
Comme pour tout $j \in J$ on a $x_j \geqslant a$, on a aussi

$$\sum_{j\in J} x_j P(X = x_j) \geqslant \sum_{j\in J} a.P(X = x_j) = a \sum_{j \in J} P(X = x_j) = a.P(X \geqslant a)$$

Comme pour tout $i \in I$ on a $x_i \geqslant 0$ on en déduit que $\sum_{i\in I} x_i.P(X = x_i) \geqslant 0$

On a donc $E(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n) = \underbrace{\sum_{i\in I} x_i.P(X = x_i)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sum_{j\in J} x_j.P(X = x_j)}_{aP(X\geqslant a)} \geqslant a.P(X \geqslant a)$

exemple 13:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{n})$.

Montrer que $P(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$

De l'inégalité de Markov,on en déduit DIRECTEMENT l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev :

théorème 19: inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a. qui admet une variance

Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$ ou $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \frac{\sigma(X)}{\varepsilon}) \leqslant \varepsilon^2}$

rem: cette inégalité permet d'estimer l'écart entre la variable aléatoire et son espérance.
On parle D'INÉGALITÉS DE CONCENTRATION

démo:
Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
L'événement $(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$ est égal à l'événement $\left((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right)$
L'inégalité de Markov permet d'obtenir directement

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) = P((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$ fixé.
Posons $\varepsilon = \frac{\sigma(X)}{\varepsilon_1} > 0$
D'après l'inégalité à peine prouvée, on peut écrire

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{\sigma(X)}{\varepsilon_1}\right) = P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2(X)}{\epsilon^2} = \epsilon_1^2$$

théorème 20: loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribués (iid) de variance finie. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

où $m = E(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

rem: dans le programme il est indiqué que vous devez savoir retrouver l'inégalité suivante qui est une partie de la démo du résultat ci-dessus

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n.\varepsilon^2}$$

exemple 14:

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{p}\right| < \varepsilon\right) = 1$

exemple 15: utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce non truquée n fois de suite.

1. Trouver une condition suffisante sur l'entier n pour que la fréquence de face obtenus soit strictement comprise entre 0.4 et 0.6 avec une probabilité supérieure à 0.95
2. Au bout de 1000 lancers, on observe une proportion de pile de 0.65 . La pièce est-elle vraiment honnête?

démonstration du théorème 7:

1. Soit X une va telle que $E(X^2)$ existe.

Comme $E(X^2)$ existe on sait que $E(X)$ existe.

De plus, comme une va constante possède une espérance et que $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$

On peut affirmer que $(aX+b)^2$ possède une espérance, càd $aX+b$ possède une variance.

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2(E(X))^2 + 2abE(X) + b^2) \\ &= a^2E(X^2) - a^2(E(X))^2 = a^2V(X) \end{aligned}$$

rem: on a utilisé $E(aX+b) = a.E(X) + E(b) = a.E(X) + b$

2. Soit X une vard. On note $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ avec I fini ou dénombrable.

On sait donc que $((X = x_i))_{i\in I}$ *est un SCE et donc que* $\sum\limits_{i\in I} P(X = x_i) = 1$

On note $E(X) = \mu$ et alors $V(X) = \sum\limits_{i\in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i)$

i) **On suppose que l'événement "X est constante" est presque certain.**

càd qu'il existe $k \in I$ tel que $P(X = x_k) = 1$

Comme $\sum\limits_{i\in I} P(X = x_i) = 1$, on a $\sum\limits_{i\in I-\{k\}} P(X = x_i) = 0$.

Comme tous les termes de cette somme sont positifs ceci implique que $\forall i \neq k, P(X = x_i) = 0$

On a ainsi $\mu = E(X) = \sum\limits_{i\in I} x_i.P(X = x_i) = x_k$

et finalement $V(X) = \sum\limits_{i\in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = (x_k - \mu)^2.P(X = x_k) = (\mu - \mu).1 = 0$

On a bien la variance de X qui est nulle.

ii) **On suppose que** $V(X) = 0$

Ceci signifie que $\sum\limits_{i\in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = 0$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, on peut en déduire que

$$\forall i \in I, (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = 0 \, (*)$$

Cependant comme $\sum\limits_{i\in I} P(X = x_i) = 1$ on a forcément un $k \in I$ tel que $P(X = x_k) \neq 0$.

Avec $(*)$ on en déduit que forcément $x_k = \mu$

Toujours avec $(*)$, on en déduit maintenant que $\forall i \neq k, P(X = x_i) = 0$.

Comme $\sum\limits_{i\in I} P(X = x_i) = 1$ on en déduit que $P(X = x_k) = 1$.

On a bien prouvé qu'il existe x_k tel que $P(X = x_k) = 1$

On dit que *l'événement "X est constante" est presque certain*

iii) *remarque: on vient de montrer l'équivalence* $V(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$