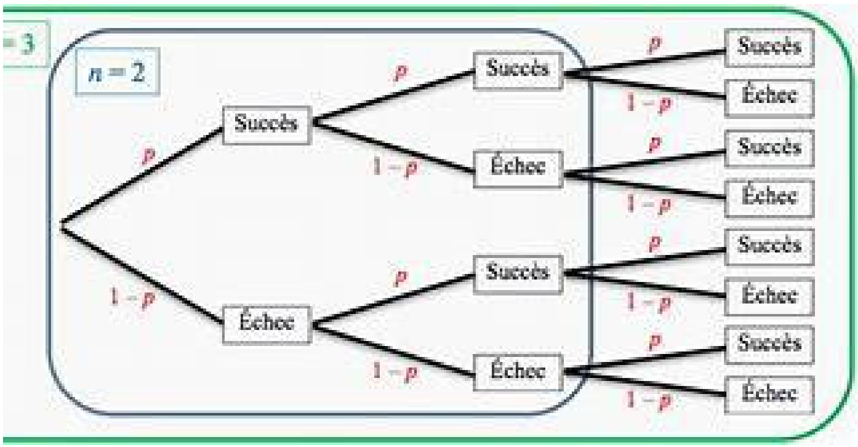
Variables aléatoires discrètes I

Table des matières



1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions et propriétés

remarque 1 (*définition v.a. cas fini*)

L'année dernière vous avez vu une définition simplifiée de variable aléatoire.
Ω étant toujours un univers fini, on considérait toujours la tribu $\mathcal{T} = P(\Omega)$ et E un ensemble quelconque, on appelait variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E.
L'ensemble $X(\Omega)$, qui est l'ensemble des images prises par X, était forcément un ensemble fini.

définition 1: variables aléatoires discrètes

Soit Ω un univers muni de la tribu $\mathcal{T}$,et E un ensemble.
Une VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE sur Ω est une application $X : \Omega \to E$ telle que

i) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, (càd fini ou dénombrable)
ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est un événement

rem: on donne cette définition pour être sûr de pouvoir calculer la probabilité de tous les événements du type $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$, et d'une manière générale de tous les événements "liés à X"

Dans ce cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle discrète. En abrégé, on notera v.a.r.d.

remarque 2 (*peu important*)

- *E n'est pas forcément un ensemble de nombres: cependant c'est le cas le plus courant!*
- *Si Ω est fini ou dénombrable et que l'on a choisi comme tribu l'ensemble des parties de Ω (càd $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$) alors toute application définie sur Ω est obligatoirement une variable aléatoire. En effet, pour tout $x \in X(\Omega)$,$(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est par définition un sous-ensemble de Ω*

remarque 3 (*Important!*)

Attention! Une autre écriture possible de $(X = x)$ est $X^{-1}(\{x\})$, mais cela ne présuppose en rien que l'application X^{-1} existe c'est à dire que X est bijective! La notation X^{-1} est ici piègeuse!

$$\boxed{X^{-1}(\{x\}) = (X = x) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}}$$

D'une manière générale, lorsque U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(U)$ désigne l'ensemble des antécédents des élements de U par l'application X, c'est à dire $X^{-1}(U) = \{w \in \Omega \quad / \quad X(w) \in U\}$.
Les notations suivantes sont équivalentes

$$\boxed{X^{-1}(U) = (X \in U) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in U\}}$$

exemple 1:

Si X désigne une vard alors les ensembles suivants sont des événements

$$(X \leqslant 4) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant 4\} = X^{-1}(]-\infty,4])$$

$$(3 < X) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega)\} = X^{-1}(]3,+\infty[)$$

$$(3 < X \leqslant 4) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega) \leqslant 4\} = X^{-1}(]3,4]) = (3 < X) \cap (X \leqslant 4)$$

exemple 2: variable aléatoire constante

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.
Soit k un réel fixé. On considère l'application constante $\boxed{\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & k \end{array}}$

X est bien une variable aléatoire car

i) $X(\Omega) = \{k\}$ est bien un ensemble fini

ii) L'événement $(X = k) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\} = \Omega$ appartient à $\mathcal{T}$ par définition d'une tribu

A noter que:

- *Pour tout réel $x \neq k$, $(X = x) = \emptyset$. On écrirait encore $X^{-1}(\{x\}) = \emptyset$*
- *De même que l'on écrirait aussi $X^{-1}(\{k\}) = \Omega$*

On utilise la notation X^{-1} mais attention X n'est pas bijective et donc n'admet pas de fonction réciproque!

exemple 3: pour définir une v.a. sur Ω fini: pas de pb!

On considère $\Omega = [\![1,6]\!]$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
On considère l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

On a

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $(X = 0) = \{1,3,5\} = X^{-1}(\{0\})$ et $(X = 1) = \{2,4,6\} = X^{-1}(\{1\})$
- *La va $Y = X^2 - X$ est la variable aléatoire nulle (=constante, égale à zéro)*

théorème 1: propriétés des images réciproques

Si X est une variable aléatoire et si $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset X(\Omega)$ alors

$$\boxed{(X \in (A \cup B)) = (X \in A) \cup (X \in B)} \quad \text{et} \quad \boxed{(X \in (A \cap B)) = (X \in A) \cap (X \in B)}$$

proposition 1 (***fonction d'une variable aléatoire***)

Soit X une une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, alors $g \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ notée $g(X)$
exemple: si X est une v.a. réelle alors $\sin(X), X^2, e^X$ sont v.a. réelles aussi

définition 2: loi d'une variable aléatoire, syst. complet associé à une variable

Soit X une une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.

- $X(\Omega)$ désigne l'ensemble image de X
- La LOI DE PROBABILITÉ DE LA VARIABLE X , que l'on note P_X, est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$
- La famille d'évènement $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements; on l'appelle SYSTÈME COMPLET D'ÉVÈNEMENTS ASSOCIÉ À LA VARIABLE ALÉATOIRE X.

remarque 4 (***notation*** $\sim$)

Soient X et Y deux variables aléatoires

- *lorsque X et Y suivent la même loi (càd $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $P_X = P_Y$), on note $X \sim Y$*
- *si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$*

1.2 distribution de probabilités pour une variable aléatoire

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire.

– On note $X(\Omega)$ l'ensemble image de X, càd l'ensemble des valeurs prises par X.

méthode 1: définition pratique d'une variable aléatoire

1. Si $X(\Omega)$ est fini, on note $X(\Omega) = \{x_1,x_2,\dots,x_n\} = \{x_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ et $p_i = P(X = x_i) \geqslant 0$
   Il s'agit d'avoir $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
   Le SCE lié à X est $((X = x_1),(X = x_2),\dots,(X = x_n)) = ((X = x_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$

2. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on note $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $p_i = P(X = x_i) \geqslant 0$
   Il s'agit d'avoir $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$
   Le SCE lié à X est $((X = x_1),(X = x_2),\dots) = ((X = x_i))_{i\in\mathbb{N}}$

exemple 4: exemples de référence

– **loi uniforme**
On a $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$ et pour tout i, $p_i = P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$.
On a bien $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n} = 1$

– **loi de Bernoulli de paramètre** p
On a $X(\Omega) = \{0,1\}$ avec $p_0 = P(X = 0) = p$ et $p_1 = P(X = 1) = 1 - p$
On a bien

$$p_0 + p_1 = p + (1 - p) = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0),(X = 1))$

– **Loi binomiale de paramètre** (n,p)
On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall i \in [\![0,n]\!], p_i = P(X = i) = \dbinom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$
On a bien

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0),(X = 1),\dots,(X = n))$

– **Loi de Poisson (de paramètre $\lambda > 0$)**
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $i, p_i = P(X = i) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^i}{i!}$
On a bien

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}.\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$$

Le SCE lié à X est $((X = 0),(X = 1),(X = 2),\dots) = ((X = i))_{i\in\mathbb{N}}$

– **Loi géométrique de paramètre** p
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i, p_i = P(X = i) = (1-p)^{i-1}.p$
On a bien

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}.p = p.\sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p.\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Le SCE lié à X est $(,(X = 1),(X = 2),\dots) = ((X = i))_{i\in\mathbb{N}^*}$

1.3 Espérance et variance (cas fini: 1ère année)

définition 3: espérance, variance - cas fini

Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ soit fini.

i) On appelle ESPÉRANCE DE X, et on note $E(X)$, le réel

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)$$

ii) On appelle VARIANCE DE X, et on note $V(X)$, le réel positif

$$V(X)=E(\,[X-E(X)]^2\,)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

iii) On appelle ÉCART-TYPE DE X, et on note $\sigma(X)$, le réel positif $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

iv) On dit que X est une variable aléatoire CENTRÉE RÉDUITE lorsque $E(X)=0$ et $V(X)=1$

rem: l'espérance de la v.a. X correspond à la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.

rem: on verra que lorsque $X(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini mais dénombrable alors X ne possèdera pas forcément d'espérance ou de variance!

exemple 5: résultats immédiats en percevant l'espérance comme une moyenne

Montrer les résultats suivants:

1. Si X est la var constante égale à c alors $E(X)=c$ et $V(X)=0$
2. Si X est une var pour laquelle il existe un réel c tel que $P(X=c)=1$ alors $E(X)=c$ et $V(X)=0$
3. s'il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall\omega\in\Omega, m\leqslant X(\omega)\leqslant M$ alors $m\leqslant E(X)\leqslant M$

théorème 2: théorème de transfert - cas fini

Soit X une v.a. telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$ est à valeurs réelles

Alors $E(g(X))=\sum_{i=1}^{n} g(x_i).P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} g(x).P(X=x)$

rem: ce théorème est très important d'un point de vue pratique car il nous permet de déterminer l'espérance de la v.a.r. $g(X)$ sans déterminer sa loi, mais uniquement en connaissant celle de X

théorème 3: linéarité: admis- positivité- croissance

Soient X et Y deux v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

i) Pour tous a et b réels, $\boxed{E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)}$

ii) Si $X\geqslant 0$ alors $E(X)\geqslant 0$

iii) Si $X\geqslant Y$ alors $E(X)\geqslant E(Y)$

iv) Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X).E(Y)$

démo:

i) et iv) admis!

ii) Soit X une var telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ avec $x_i\geqslant 0$ pour tout i.

On a par définition $E(X)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{x_i}_{\geqslant 0}.\underbrace{P(X=x_i)}_{\geqslant 0}$

Comme le produit et la somme de réels positifs sont encore des réels positifs, on a bien $E(X)\geqslant 0$

iii) Soient X et Y tels que $X\geqslant Y$ (càd $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\geqslant Y(\omega)$).

Comme $X-Y\geqslant 0$ on a d'après ii) $E(X-Y)\geqslant 0$

et par linéarité de l'espérance $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$. On a montré que $E(X)-E(Y)\geqslant 0$

théorème 4:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ avec $X(\Omega)$ fini

1. Si X est une v.a. constante (égale à k), on a $E(X)=k$ et $V(X)=0$
2. $V(X)=E([X-E(X)]^2)=E(X^2)-E(X)^2$ et $E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)$
3. Pour tous réels a et b: $\boxed{V(aX+b)=a^2V(X)}$ et $\boxed{\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)}$
4. $V(X)=0$ ssi l'événement "X est constante" est presque certain ($\Longleftrightarrow \exists\, \mu\in\mathbb{R}, P(X=\mu)=1$)
5. Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

démo

1. Pour plus de lisibilité nous noterons $\mu=E(X)$ (μ est une constante).
   On a $(X-E(X))^2=(X-\mu)^2=X^2-2\mu X+\mu^2$
   Par linéarité de l'espérance on a donc
   $$E((X-E(X))^2)=E(X^2)-2\mu\underbrace{E(X)}_{=\mu}+\mu^2\underbrace{E(1)}_{=1}=E(X^2)-\mu^2=E(X^2)-(E(X))^2$$
2. Il suffit d'exploiter les formules précédentes, en particulier la linéarité de l'espérance
   $$\begin{aligned}V(aX+b)&=E((aX+b)^2)-(E(aX+b))^2\\&=E(a^2X^2+2abX+b^2)-(aE(X)+b\underbrace{E(1)}_{=1})^2\\&=a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2\overbrace{E(1)}^{=1}-\left(a^2E(X)^2+2abE(X)+b^2\right)\\&=a^2(E(X^2)-(E(X))^2)=a^2V(X)\end{aligned}$$
3. On note $X(\Omega)=\{x_i|i\in[\![1,n]\!]\}$ et $P(X=x_i)=p_i$. (on suppose les x_i distincts)
   $\boxed{\text{Supposons que } V(X)=0}$
   On a
   $$V(X)=E([X-E(X)]^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.p_i=0$$
   Or une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul.
   On a donc
   $$\forall i\in[1,n],(x_i-\mu)^2.p_i=0$$
   Comme $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, on a au moins un des $p_i\neq 0$ et donc il existe i_0 tel que $p_{i_0}\neq 0$ et $x_{i_0}=\mu$
   Comme les x_i sont distincts , on a alors $\forall i\neq i_0, p_i=0$
   et on en déduit alors que $p_{i_0}=1$
   On a montré que $P(X=\mu)=1$ cqfd!

   $\boxed{\text{Réciproquement, on suppose que } \exists\,\mu\in\mathbb{R}, P(X=\mu)=1}$

exemple 6: utilisation du théorème de tranfert ou calcul de la loi

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On note $Y=(-1)^X$ et $Z=\dfrac{Y+1}{2}$
Déterminer les espérances et variances de Y et Z

2 Lois à connaître

2.1 Loi uniforme(rappel)

définition 4: loi uniforme (sur un ensemble fini forcément!)

Soit X une variable aléatoire sur Ω fini, telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (on a $n = card(X(\Omega))$)

On dit que X SUIT LA LOI UNIFORME SUR Ω lorsque $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ (constante).

On écrit $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$

cas particulier important:

X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ lorsque:

1. $X(\Omega) = [\![1,n]\!] = \{1,2, \dots, n\}$
2. *pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $P(X = i) = \dfrac{1}{n}$*

On écrit donc $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\}) = \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

Le système complet d'événements associés à X est $(X = i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

On utilise cette loi dans les situations d'équiprobabilité (par exemple on tire un dé équilibré à n faces et on note X le nombre tiré)

théorème 5: (Hors-programme)

Soit $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Alors:

i) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

ii) $G_X(t) = \dfrac{1}{n} . \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} = \dfrac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$ et $R = \infty$

démo:

on utilisera $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} i.P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.i = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} P(X = i).i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.i^2 \\ &= \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

.

et ainsi $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \dots = \dfrac{n^2-1}{12}$

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{i=1}^{n} P(X = i)t^i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n}t^i = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t^i$

. et ainsi $\forall t \neq 1, \dfrac{1}{n}.\dfrac{t - t^{n+1}}{1-t}$

2.2 Loi de Bernoulli de paramètre p

Contexte usuel: Il s'agit de modéliser l' expérience la plus simple qui soit (appelée "*épreuve de Bernoulli*"): elle ne possède que deux issues possibles, appelées conventionnellement Succès et Echec.
L'événement $(X = 1)$ correspondra au Succès et l'événement $(X = 0)$ correspondra à l'Echec.

définition 5: loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$.
On dit que X SUIT LA LOI DE BERNOULLI DE PARAMÈTRE p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0,1\}$
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p = q$

On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou encore $X \sim \mathcal{B}(1,p)$
Le système complet d'événements associé à X est $((X = 0),(X = 1))$

remarque 5

Si X suit une loi de Bernoulli alors pour tout $n \geqslant 1, X^n = X$

théorème 6:

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$
i) $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$
ii) $G_X(t) = 1 - p + pt$ et $R = \infty$

démo:
i) $E(X) = P(X = 0).0 + P(X = 1).1 = p$
ii) $E(X^2) = P(X = 0).0^2 + P(X = 1).1^2 = p$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
iii) $G_X(t) = P(X = 0).t^0 + P(X = 1).t^1 = 1 - p + pt = q + pt$

exemple 7: fonction indicatrice: exemple important de v.a. de Bernoulli

Soit A un événement (c'est à dire un élément de $\mathcal{T}$).
On appelle <u>fonction indicatrice de A</u> la fonction notée $\mathbf{1}_A$, définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{1}_A : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

La fonction indicatrice de A vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon

Dans l'exemple 3, la variable aléatoire X n'est rien d'autre que la fonction indicatrice de l'événement A = "le nombre tiré est pair"

1. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire. A quoi est égal le carré de cette v.a.?
2. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a. de Bernoulli. De quel paramètre?
3. Déterminer la variance et l'espérance de $\mathbf{1}_A$
4. Soient A et B deux événements, montrer que:

   i) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$

   ii) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$

   iii) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$

2.3 Loi binomiale V136

Contexte usuel: on modélise *une expérience (appelée "épreuve de Bernoulli")consistant en la réalisation de n épreuves de Bernouilli identiques(càd de même loi $\mathcal{B}(p)$) et indépendantes* ,
et $\boxed{\text{on note } X \text{ le nombre total de succès.}}$

La variable X prend toutes les valeurs comprises entre 0 et n; la probabilité que $(X = k)$ est égale à la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'obtenir p succès et $n-p$ échecs, multipliée par le nombre de façons d'obtenir cette configuration, c'est à dire le coefficient binomial "k parmi n"

définition 6: loi binomiale de paramètres n et p

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [0,1]$.
On dit que X SUIT LA LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES n ET p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\} = [\![0,n]\!]$
2. pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

On écrit $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p)}$
Le système complet d'événements associé à X est $((X = i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$

théorème 7:

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$
i) $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$
ii) $G_X(t) = (1-p+pt)^n = (q+pt)^n$ et $R = \infty$

exemple 8:

Un compteur devrait afficher les valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Mais lorsque X est nulle, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n. Lorsque X est non nulle, il affiche bien X.
On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre affiché par le compteur.
Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

- On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$
- Comme $((X = 0),(X = 1), \ldots, (X = n))$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales on a pour tout événement A,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A \cap (X = k)) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(A|X = k)$$

- Soit i un entier fixé entre 1 et n, on a $P(Y = i) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(Y = i|X = k)$
- On a $\boxed{P(Y = i|X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 0 \text{ et } i \text{ quelconque} \\ 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \geqslant 1 \text{ et } k \neq i \end{cases}}$

  d'où $P(Y = i) = \frac{1}{n}.P(X = 0) + P(X = i) = \frac{1}{n}.\binom{n}{0}.p^0.(1-p)^n + \binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i}$

  Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], P(Y = i) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i}}$
- Vous devez trouver $E(Y) = \frac{n+1}{2}(1-p)^n + np$

exemple 9: Des variables aléatoires prennent l'ascenseur!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n personnes montent dans l'ascenseur d'un immeuble de p étages.
On suppose qu'elles se rendent chacune à un étage quelconque.

– On prend $\Omega = [\![1,p]\!]^n, \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.

exemple pour $n = 3$ et $p = 5$.
(on suppose que les 3 personnes sont messieurs Cauchy, Kolmogorov et Riemann!)
Chaque issue possible peut être représentée par un triplet de $\Omega = [\![1,5]\!]^3$:

$$(\text{étage de M. Cauchy}, \text{étage de M. Kolmogorov}, \text{étage de M. Riemann})$$

L'événement "aucune des personnes ne descend au 2nd étage" correspond à l'ensemble des triplets dont les composantes sont à valeurs dans $\{1,3,4,5\}$. C'est un ensemble de cardinal 4^3

On définit les variables aléatoires suivantes:

– Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note
  – T_k la v.a. qui vaut 1 si au moins une personne descend à l'étage k, et 0 sinon.
  – Z_k la v.a. égale au nombre de personnes qui descend à l'étage k
– On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

On a alors:

– *Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ fixé on a* $\boxed{T_k(\Omega) = \{0,1\}}$ *et* $\boxed{Z_k(\Omega) = [\![0,n]\!]}$ *ainsi que* $X(\Omega) = [\![1, \min(n,p)]\!]$
– *L'événement $(T_k = 0)$ correspond à l'événement "aucune des p personnes ne descend à l'étage k": il s'agit donc de l'ensemble des $n-$uplets d'éléments de $\{1,2,\dots,k-1,k,k+1,\dots,n\} - \{k\}$.*
  C'est un ensemble de cardinal $(p-1)^n$.
  Comme $\text{card}(\Omega) = p^n$ et que P est la probabilité uniforme on a

$$P(T_k = 0) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \text{ et } P(T_k = 1) = 1 - P(T_k = 0) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

  càd T_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ $\boxed{T_k \sim \mathcal{B}(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n)}$
– *Z_k suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{p}$:* $\boxed{Z_k \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{p}).}$ *En effet*
  Z_k comptabilise le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendants de paramètre de succès $\frac{1}{p}$
– *On remarque que $X = T_1 + T_2 + \cdots + T_p$*
  ce qui nous permet d'écrire par linéarité de l'espérance que

$$E(X) = E(T_1) + E(T_2) + \cdots + E(T_p) = \sum_{k=1}^{p} E(T_k)$$

  Comme on sait que T_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$,
  on sait d'après le cours que $E(T_k) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$
– *Au final on trouve que* $\boxed{E(X) = p - p(1 - 1/p)^n}$.
  Application numérique: pour $n = 10$ et $p = 12$ on trouve qu'il y a en moyenne à peu près 7 arrêts en moyenne

2.4 Loi géométrique

Expérience type : On procède à une succession d'expériences de type Succès -Echec(loi de Bernoulli) jusqu' à obtenir un premier succès. Les expériences sont supposées indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0,1[$, et $\boxed{\text{on note } X \text{ le rang du premier succès}}$.
La loi de X est calculée dans l'exemple 10.

définition 7: loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On dit que X suit une LOI GÉOMÉTRIQUE DE PARAMÈTRE p sur $\mathbb{N}^*$ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = q^{k-1}p$

On écrit : $\boxed{X \sim \mathcal{G}(p)}$
Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k \geqslant 1}$

théorème 8:

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$

i) $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

ii) $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt} = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et $R = \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{q}$

exemple 10: répétitions d'un nombre infini d'expériences identiques indépendantes

On réalise une infinité d'expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p(schéma de Bernoulli). On note X le rang du premier succès (et $X = 0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner la loi de X .
Solution

- On note pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_i =$"échec au i-ème tirage"
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(X = 1) = P(\overline{E_1}) = p$
- $P(X = 2) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1)P(\overline{E_2}) = qp$
- d'une manière plus générale, soit $k \geqslant 1$
  $P(X = k) = P(E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}) = P(E_1)\dots P(E_{k-1})P(\overline{E_k}) = q^{k-1}.p$
- Reste à déterminer $P(X = 0)$!

  Comme $((X = k))_{k \geqslant 0}$ est un syst.complet d'événements on a $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$

  On a déjà $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p.\sum_{k=0}^{\infty} q^k = p.\dfrac{1}{1-q} = 1$

  On en déduit que $P(X = 0) = 0 \quad (!)$

  rem: dans ce cas, $((X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un quasi-SCE

2.5 Loi de Poisson

définition 8: La loi de Poisson n'est pas associée à une expérience type!

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.
On dit que X SUIT LA LOI DE POISSON DE PARAMÈTRE λ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

On écrit $\boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k\in\mathbb{N}}$

théorème 9:

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

i) $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)} = \exp(\lambda.(t-1))$ et $R = \infty$

théorème 10: somme de variables indépendantes suivant une loi de Poisson

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes,
et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!], X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ alors:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

*En particulier, si X_1 et X_2 sont 2 variables indépendantes
telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$*

3 Indépendance de variables aléatoires discrètes

3.1 Indépendance deux à deux, mutuelle indépendance

définition 9: indépendance de deux variables aléatoires

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.
LES VARIABLES ALÉATOIRES X ET Y SONT DITES INDÉPENDANTES, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, lorsque :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x).P(Y = y)$$

rem: on peut aussi préférer les notations plus légères

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x).P(Y = y) \text{ ou } P(X = x\,, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$$

Cela correspond à dire que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si le fait que X prenne une valeur donnée est indépendant du fait que Y prenne une valeur donnée.

théorème 11: admis

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A).P(Y \in B)$$

C'est à dire lorsque les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont des ÉVÉNEMENTS indépendants

exemple 11:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$.
On peut donc écrire par exemple

$$P(X \leqslant 10 \cap Y \in \{1,3\}) = P(X \leqslant 10).P(Y \in \{1,3\})$$

ou

$$P(X \leqslant 5 \cap Y \geqslant 3) = P(X \leqslant 5).P(Y \geqslant 3)$$

remarque 6

On étend naturellement cette notion indépendances au cas de n variables aléatoires:

- *les v.a. $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont dites indépendantes lorsque*

$$\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

- *cela revient aussi à dire que $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall A_i \subset X_i(\Omega)$ on a*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

théorème 12: fonctions de variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes
Soient f et g deux fonctions
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
exemple: si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X^2 \perp\!\!\!\perp Y^3 + 2Y + 1$
rem: se généralise bien sûr au cas de n v.a.

théorème 13: lemme des coalitions

Si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes
alors les variables aléatoires $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi
rem: ce résultat se généralise à plus de 2 coalitions
rem: ce lemme indique en particulier que si des va sont indépendantes alors elles sont indépendantes deux à deux (réciproque fausse comme d'habitude)

exemple 12:

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ des variables aléatoires indépendantes.
Le lemme des coalitions permet d'affirmer que

- X_1 et X_5 sont deux va indépendantes
- $X_1+3X_2^2$ et $X_4^2+X_5-2X_6$ sont deux va indépendantes
- X_1 et $X_2^2+\cos(X_3)$ et X_4-X_6 sont trois va indépendantes

exemple 13:

Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{-1,+1\})$.
On considère la v.a $Z=XY$
Montrer que X,Y et Z sont des variables indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes.

exemple 14:

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ des variables indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.
On note $S_1=\max(X_1,X_3,X_5)$ et $S_2=\max(X_2,X_4,X_6)$ ainsi que $S=S_1+S_2$
Déterminer la loi de S

exemple 15:

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des variables indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$.
On note $M=\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$.
Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$ déterminer $P(M\geqslant k)$ puis la loi de M

3.2 Modélisation du jeu de pile ou face infini

- Le jeu de pile ou face infini est modélisé par une suite de variables indépendantes et identiquement distribués (iid) de variables de Bernoulli.
- On considère $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une telle suite avec $X_n\sim\mathcal{B}(p)$ avec p la probabilité(par exemple) d'obtenir un Face
- Le nombre de Face obtenus lors des n premiers lancers est une variable aléatoire $N\sim\mathcal{B}(n,p)$
- Le rang d'obtention du premier Face est une variable aléatoire $R\sim\mathcal{G}(p)$
- On a également $R=\min(n\geqslant 1\,|\,X_n=1)$

3.3 Somme de variables aléatoires

théorème 14: loi de la somme de deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit (X,Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la variable aléatoire Z définie par $\boxed{Z = X + Y}$. Alors:

i) Z est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi est donnée par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P((X = k) \cap (Y = n - k))}$$

ii) Si de plus les deux variables sont indépendantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(Y = n - k)$$

démonstration:

– Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, un système complet d'événements est $((X = k))_{k \geqslant 0}$.
On sait alors que pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B \cap (X = k))$$

– Pour $n \geqslant 0$ fixé. On considère l'événement $B = (Z = n) = (X + Y = n)$, on a alors

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Z = n) \cap (X = k))$$

or

$$(Z = n) \cap (X = k) = (X + Y = n) \cap (X = k) = (Y = n - k) \cap (X = k)$$

d'où

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Y = n - k) \cap (X = k))$$

– Comme $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, l'événement $(Y = n - k)$ est l'événement impossible quand $k > n$, et donc $P(Y = n - k) = 0$ quand $k > n$.
La somme précédente est donc égale à $P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P((X = k) \cap (Y = n - k))$

théorème 15: somme de v.a. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli

1. Soit $p \in]0,1[$.
   Si $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont des variables aléatoires <u>indépendantes</u> qui suivent la loi $\mathcal{B}(p)$
   Alors $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$
2. *(c'est la réciproque)*
   Soit $p \in]0,1[$ et $n \geqslant 1$ un entier.
   Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
   Il existe n v.a. $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, telle que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   rem: une v.a. qui suite une loi binomiale peut être vue comme la somme de variables de Bernoulli indépendantes

exemple 16: somme de 2 binomiales indépendantes de même paramètre de succès

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m,p)$

4 Loi conjointe, lois marginales

définition 10:

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Un couple de variables aléatoires est un couple (X,Y) où X et Y sont deux variables aléatoires réelles, c'est à dire un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Z=(X,Y):\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega)) \end{array}}$$

rem: on montre que $Z=(X,Y)$ est une variable aléatoire et bien sûr $Z(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

définition 11:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

- les lois marginales sont les lois de X et de Y
- la loi conjointe du couple (X,Y) est la donnée des valeurs prises par (X,Y) et des réels
  $P((X,Y)=(x,y))=P((X=x)\cap(Y=y))=P(X=x,Y=y)$ où $x\in X(\Omega)$ et $y\in Y(\Omega)$

rem: on présente souvent, dans le cas fini, la loi conjointe à l'aide d'un tableau
rem: si $P(Y=y)=0$ alors $\forall x\in X(\Omega), P((X=x)\cap(Y=y))=0$

exemple 17:

On considère une urne contenant 3 boules rouges et 4 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise et on note X_1 [resp. X_2] la va qui vaut 1 si une boule rouge a été tirée au premier [resp. deuxième] tirage et 0 sinon.
Déterminer la loi conjointe du couple (X_1,X_2) ainsi que les lois marginales.

méthode 2: Comment déterminer les lois marginales à l'aide de la loi conjointe

Grâce aux systèmes complets d'événements $(X=x)_{x\in X(\Omega)}$ d'une part, et $(Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$ d'autre part, on a

- la loi de X à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\boxed{\forall x\in X(\Omega),\quad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}P((X=x)\cap(Y=y))}$$

- la loi de Y à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\boxed{\forall y\in Y(\Omega),\quad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}P((X=x)\cap(Y=y))}$$

Plus précisément:

- dans le cas où $Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ est fini, on a $P(X=x)=\sum_{j=1}^{n}P((X=x)\cap(Y=y_j))$
- dans le cas où $Y(\Omega)=\{y_j|j\in\mathbb{N}\}$ est dénombrable, on a $P(X=x)=\sum_{j=0}^{\infty}P((X=x)\cap(Y=y_j))$

remarque: $((X=x,Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un SCE

remarque 7

- *La connaissance de la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales.(cf.ci-dessus)*
- *La connaissance des lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe, comme le prouve le tableau ci-dessous*

$X \setminus Y$	.	.	.

définition 12: loi conditionnelle d'une va sachant un événement

Soit X une variable aléatoire et A un événement.
On appelle LOI CONDITIONNELLE DE X SACHANT L'ÉVÉNEMENT A l'application

$$\boxed{\begin{array}{ccl} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P_A(X=x) = \dfrac{P((X=x)\cap A)}{P(A)} \end{array}}$$

autrement dit, c'est la distribution des réels $P_A(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

exemple 18:

Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	. .
1	0.08	0.04	0.16	0.12	
2	0.04	0.02	0.08	0.06	
3	0.08	0.04	0.16	0.12	

$Z \setminus T$	1	2	3	4	. .
1	.	.	.	.	
2					
3					

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y)
2. Si l'on souhaite regarder si X et Y sont indépendantes, combien de vérifications devrait-on effectuer? En effectuer quelques unes.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=2)$ puis celle de X sachant $(Y=3)$
4. On pose $Z=\min(X,Y)$ et $T=\max(X,Y)$. Déterminer la loi conjointe du couple (Z,T)

exemple 19: Poisson et Binomiale

On suppose que le nombre N de clients allant en caisse suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Le magasin dispose de 2 caisses et chaque client se dirige au hasard et indépendamment des autres clients vers la caisse 1 avec une probabilité p ou vers la caisse 2 avec une probabilité $q=1-p$
On note N_1 le nombre de clients se dirigeant vers la première caisse.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer la loi de N_1 sachant $(N=n)$
2. Déterminer la loi de N_1. Remarque?