# ESPACES PROBABILISES

## Table des matières



## 1 Probabilité

### définition 1: rappel de la définition de sup dans le cas $\Omega$ fini

Soit $\Omega$ un ensemble fini.
On appelle probabilité sur $\Omega$ toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour tout couple d'évènements disjoints A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité finie)

*Il est facile de vérifier que cette définition est compatible avec la définition 2 plus générale lorsque l'on prend* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu

### définition 2: axiomes des probabilités

Soit $\Omega$ un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.
On appelle PROBABILITÉ SUR $(\Omega,\mathcal{T})$ une application $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ telle que

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>deux à deux incompatibles</u> on a

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

*(La définition implique implicitement que la série est convergente.)*
Le triplet $(\Omega,\mathcal{T},P)$ s'appelle UN ESPACE PROBABILISÉ

*Un espace probabilisé est donc la donnée d'un univers, de l'ensemble des événements(=la tribu) et d'une probabilité pour chacun de ces événements*

*On rappelle que <u>deux à deux incompatibles</u> signifie <u>deux à deux disjoints</u>*
*c'est à dire que* $\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$

Les propriétés suivantes, valables sur un espace probabilisé fini, sont aussi valables sur un esp. proba. dénombrable!

**théorème 1:**

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé dénombrable ou fini :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Si $A$ est un évènement alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Si $A$ et $B$ sont deux évènements, tels que $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ *(croissance)*
4. Si $A$ et $B$ sont deux évènements, alors
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$
   - si de plus $A$ et $B$ sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(additivité finie)*
   - $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

**exemple 1: formule du crible de Poincaré(HP)**

Soient $A_1,A_2,\dots,A_N$ des événements (on ne les suppose pas 2 à 2 disjoints )

$$\boxed{P(\bigcup_{k=1}^{N} A_k) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})}$$

*Par exemple pour $N = 3$ cela donne*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

*à savoir redémontrer en posant $B = A_2 \cup A_3$ et en utilisant le 4 du théorème 1*

**théorème 2: probabilité d'une union**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dévènements de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.

1. cas d'une union finie :
   - pour tout entier $N$, on a $P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$
   - Si de plus les événements sont incompatibles deux à deux, $P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$
2. cas d'une union dénombrable :
   - Si la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge alors on a $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$
   - Si de plus les événements sont incompatibles 2 à 2, on a $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

"La probabilité de l'union est majorée par la somme des probabilités"

"quand on calcule la probabilité d'une union, on se demande si cette union est disjointe 2 à 2"

**remarque 1** (***Très importante***)

***Pour calculer la probabilité d'une union on se demande si cette union est disjointe deux à deux.***

- *Si c'est le cas: la probabilité de l'union est égale à la somme des probabilités*
- *Si ce n'est pas le cas: on peut juste dire que la probabilité de l'union est majorée par la somme des probabilités*

### définition 3: événement négligeable

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé,
Un évènement $A$ est dit NÉGLIGEABLE OU PRESQUE IMPOSSIBLE si $P(A)=0$
Un évènement $A$ est dit PRESQUE SÛR OU PRESQUE CERTAIN si $P(A)=1$

*$\emptyset$ est un événement négligeable, ce n'est peut-être pas le seul.*
*$\Omega$ est un événement presque certain, ce n'est peut-être pas le seul.*

*Pour comprendre ces notions, appuyons nous sur les* ***lois normales****(HP):*
*si une variable aléatoire réelle $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors la probabilité que la valeur de $X$ soit dans l'intervalle $[a,b]$ était égal à $P(a\leqslant X\leqslant b)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt$, et donc en particulier la probabilité que $X$ soit égale à une valeur fixée $x_0$ était égale à*

$$P(X=x_0)=P(x_0\leqslant X\leqslant x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{x_0} e^{-t^2/2}dt=0$$

*Oui, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, l'événement $(X=x_0)$ est de probabilité nulle!*
*Les événements $(X=1),(X=\pi),(X=2020),\dots$ sont tous des événements négligeables*

*Qu'en est-il des événements $(X\in\mathbb{N})$ ou $(X\in\mathbb{Z})$ ou $(X\in\mathbb{Q})$ ?*

### exemple 2: probabilité uniforme

1. $\boxed{\text{cas où } \Omega \text{ est fini: } \Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_N\}}$

   On appelle <u>probabilité uniforme sur $\Omega$</u> la probabilité $P$ pour laquelle tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
   Comme la somme des probabilités élémentaires doit valoir un, on a donc

   $$\boxed{\text{pour tout } \ i\in[\![1,N]\!], P(\{\omega_i\})=\frac{1}{N}}$$

2. $\boxed{\text{cas où } \Omega \text{ est dénombrable: } \Omega=\{\omega_i/i\in\mathbb{N}\}.}$

   **Il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\Omega$ !**

   *En effet,* ***supposons qu'une telle probabilité existe*** *et notons $c$ la probabilité commune à tous les événements élémentaires.*
   *On sait que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ doit être une série convergente (de somme égale à un).*
   - *Notons $S_n$ la somme partielle d'indice $n$ de la série précédente.*
     *On a*
     $$\forall n\geqslant 0, S_n=\sum_{i=0}^{n} P(\{\omega_i\})=(n+1).c$$
     *Or si $c\neq 0$, il est clair que la suite $(S_n)$ est divergente, ce qui signifie que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ diverge.*
     *Nous venons de prouver que $c=0$*
   - *Mais alors on a $P(\Omega)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} P(\{\omega_i\})=\sum\limits_{i=0}^{\infty} 0=0\neq 1$*
     ***contradiction!***

- ON RETIENDRA QU'IL N'EXISTE PAS DE PROBABILITÉ UNIFORME SUR UN UNIVERS DÉNOMBRABLE,
- SUR UN UNIVERS FINI LA PROBABILITÉ UNIFORME VÉRIFIE $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$ POUR TOUT ÉVÉNEMENT $A$

## 2 Probabilité conditionnelle

**définition 4: probabilité conditionnelle**

Soient $A$ et $B$ deux évènements de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.
On appelle PROBABILITÉ CONDITIONNELLE DE $A$ SACHANT $B$, et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, le réel

$$\boxed{P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

*rem: on rappelle que $A|B$ ne désigne pas un événement!*

**théorème 3:**

Soit $B$ un évènement de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.
Alors l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} P_B : \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & P_B(A) \end{array}}$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{T})$ ,
*on l'appelle* LA PROBABILITÉ CONDITIONNÉE À $B$

**démonstration: on montre que $P_B$ vérifie les axiomes d'une probabilité**

i) $P_B$ est clairement à valeurs positives

ii) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ car $\Omega\cap B = B$

iii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements <u>deux à deux incompatibles</u>.

Notons pour tout $n,\ C_n = B\cap A_n$.

La suite d'événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite d'événements <u>deux à deux incompatibles</u>.
*En effet: soit $n \neq m$*
*On a $C_n \cap C_m = (A_n\cap B)\cap(A_m\cap B) = (A_n\cap A_m)\cap B = \emptyset\cap B = \emptyset$*

Comme $P$ est une probabilité on peut écrire

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(C_n)$$

Or $B\bigcap(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(B\bigcap A_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$

donc $P(B\bigcap(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n)$

Ainsi

$$P(B\bigcap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n\cap B)$$

En divisant chaque membre de cette égalité par $P(B) > 0$ cela donne

$$\frac{P(B\bigcap(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n))}{P(B)} = \frac{1}{P(B)}.\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n\cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(A_n\cap B)}{P(B)}$$

c'est à dire $P_B(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$

### théorème 4: formule de Bayes ou des causes

Soient A et B deux évènements de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé, tel que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$
On a

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)}$$

*rem: cela provient simplement de l'égalité évidente*

$$P(B)P_B(A) = P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

### théorème 5: Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé,
et $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une suite finie d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}).P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

*En particulier pour $n = 3$ cela donne* $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1\cap A_2}(A_3)}$
*rem: cette formule permet de calculer une intersection d'un nombre fini d'évenements*

**démo dans le cas $n = 3$ et $n = 4$**

### exemple 3:

Dans une urne se trouvent 3 boules vertes et 3 boules rouges.
On extraie successivement,sans remise, 3 boules en suivant la règle suivante: si la boule extraite est verte, on ajoute deux boules rouges, sinon on ajoute deux boules vertes.
Déterminer la probabilité de tirer successivement 3 boules vertes.

*Solution*

## 3 Système complet d'événements, formule des probabilités totales

### définition 5: système complet d'événements (SCE)

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.

1. Une suite finie $(A_n)_{n\in[1,N]}$ d'événements est un qsystème complet d'événements lorsque:
   i) les évènements sont 2 à 2 disjoints : $\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
   ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup\limits_{n\in[1,N]} A_n = \Omega$
2. Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est un SYSTÈME COMPLET DÉNOMBRABLE D'ÉVÈNEMENTS lorsque :
   i) les évènements sont 2 à 2 disjoints : $\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
   ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

*rem: Une famille d'événements est un SCE* $\boxed{\textit{ssi}}$ *chaque élément de $\Omega$ appartient à un et un seul des événements de la famille.*
*càd,* $\boxed{\textit{ssi}}$ *un et un seul des événements de la famille se réalise lorsque l'expérience alétoire se déroule*

*rem:(cas important) si $A$ est un événement alors $(A,\overline{A})$ est un SCE*

*illustration d'un SCE comme partition de $\Omega$*

### exemple 4: savoir reconnaître un SCE

**Expérience aléatoire: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.**

Indiquer si les familles suivantes sont des SCE

1. $\mathcal{F} = (A,B)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le premier lancer a donné face"
2. $\mathcal{F} = (A,B)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le second lancer a donné face"
3. $\mathcal{F} = (A,B,C)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le second lancer a donné face" et C="le second lancer a donné pile"
4. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in[\![0,4]\!]}$ avec $A_n$ =" on a obtenu exactement $n$ Piles avec les quatre premiers lancers"
5. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_n$ = "on a obtenu Face au $n$-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0$= "aucun lancer n'a donné Face"
6. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $A_n$ = "on a obtenu Face pour la première fois au $n$-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_n$ = "on a obtenu Face pour la première fois au $n$-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0$= "aucun lancer n'a donné Face"

### définition 6: système quasi-complet d'événements

Une suite d'événements $(A_i)_{i\in J}$ est un système quasi-complet d'événements lorsque
i) les évènements sont 2 à 2 disjoints : $\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
ii) $P(\bigcup\limits_{i\in J} A_i) = 1$

*rem: un système complet d'événements est aussi un système quasi-complet mais la réciproque est fausse*

### théorème 6: formule des probabilités totales avec un système complet fini

Soit $(A_n)_{n\in[1,N]}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements.
Alors pour tout événement $B$ on a

$$\boxed{P(B)=\sum_{n=1}^{N}P(B\cap A_n)=\sum_{n=1}^{N}P(A_n)P(B|A_n)} \quad \textit{avec la convention } P(A_n).P(B|A_n)=0 \textit{ lorsque } P(A_n)=0$$

*remarque: très souvent on utilise cette formule avec* $N=2$ *et* $A_2=\overline{A_1}$:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap\overline{A_1})=P(A_1).P(B|A_1)+P(\overline{A_1}).P(B|\overline{A_1})$$

### exemple 5: trop classique, lien entre SCE et arbre

Dans une fabrique, un étude statistique a montré que le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées est égal à 2%. Pour éliminer les pièces défectueuses, un test de qualité est mis en place dont les résultats sont les suivants:

- le test élimine 99% des pièces défectueuses
- le test élimine 0,5% des pièces non défectueuses.

Questions:

1. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit éliminée à tort.
2. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'a pas été éliminée par le test.

*Réponses:*

- *On note* $D$ *l'événement "la pièce est défectueuse", et* $T$ *l'événement "le test élimine la pièce".*
- *L'énoncé donne* $P(D)=0.02 \qquad P(T|D)=P_D(T)=0.99$ et $P(T|\overline{D})=P_{\overline{D}}(T)=0.005$

1. *La première question revient à calculer* $P(T\cap\overline{D})$
   *On a* $P(T\cap\overline{D})=P(\overline{D}).P(T|\overline{D})$ avec $P(\overline{D})=1-P(D)=1-0.02=0.98$.
   *Ainsi* $P(T\cap\overline{D})=0.98\times0.005=0.0049$

2. *La deuxième question revient à calculer* $P(D|\overline{T})=P_{\overline{T}}(D)$
   *On a* $P_{\overline{T}}(D)=\dfrac{P(D)}{P(\overline{T})}P_D(\overline{T})$ . *Il nous manque* $P(\overline{T})$ et $P_D(\overline{T})$.
   *Comme* $(D,\overline{D})$ *est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales*

   $$P(T)=P_D(T).P(D)+P_{\overline{D}}(T).P(\overline{D})=0.99\times0.02+0.005\times0.98=0.0247$$

   *Donc* $P(\overline{T})=0.9753$
   *On a* $P_D(\overline{T})=1-P_D(T)=1-0.99=0.01$ *et* $P_{\overline{T}}(D)=\dfrac{0.02}{0.9753}\times0.01=0.0002$ *à* $10^{-4}$ *près, soit à peu près* 0.02%

**représentation avec un arbre**

**exemple 6:**

Dans tout cet exemple, on notera:

- $B$ l'événement la boule tirée est blanche
- $A_n$ l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée $n$

1. Soit $N \geqslant 1$ un entier fixé.
   On dispose de $N$ urnes numérotées de 1 à $N$.
   L'urne numérotée $n$ renferme $n$ boule(s) blanche(s) et $N-n$ boule(s) noire(s).
   On choisit au hasard de manière équiprobable une des urnes et l'on extrait une boule.
   Cette boule est blanche! Quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans l'urne numéro $n$?
   - Pour tout $n$ on a $P(A_n) =$ et $P(B|A_n) = P_{A_n}(B) =$
   - $(A_1,A_2,\ldots,A_N)$ est un système complet d'événements (fini) donc d'après la formule des probabilités totales on a
   $$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n).P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^{N}.\frac{1}{N}.\frac{n}{N} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{N^2}.\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N}$$
   - On cherche pour $n$ fixé $P_B(A_n)$. D'après la formule de Bayes on a
   $$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)}{P(B)}.P_{A_n}(B) = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{N+1}{2N}}.\frac{n}{N} = \frac{2n}{N(N+1)}$$


**théorème 7: formule des probabilités totales avec un système complet dénombrable**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'évènements
Alors pour tout évènement B,

la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et $\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}$

avec la convention : $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$ si $P(A_n) = 0$
*rem: cette convention est justifiée par le fait que* $B\cap A_n \subset A_n$ *et donc que* $P(B\cap A_n) \leqslant P(A_n) = 0$

**démo**

**exemple 7:**

Dans tout cet exemple, on notera:

- $B$ l'événement la boule tirée est blanche
- $A_n$ l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée $n$

2. On dispose d'une infinité d'urnes numérotées par $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'urne numérotée $n$ renferme $n$ boule(s) blanche(s) et 2 boules noires.

L'expérience consiste à choisir une urne au hasard (*on suppose que* $P(A_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ *pour tout* $n \geqslant 1$), et à en extraire une boule. On se pose les mêmes questions que précédemment

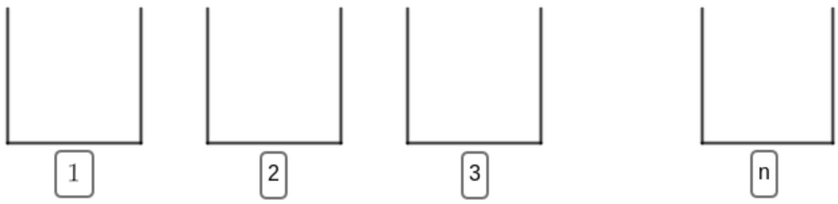
- Pour tout $n$ on a $P_{A_n}(B) =$

- Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (dénombrable) on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.\frac{n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Un calcul classique prouve que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}$ et donc $P(B) = \dfrac{1}{2}$

- Pour $n$ fixé on a cette fois $P_B(A_n) = \dfrac{P(A_n)}{P(B)}.P_{A_n}(B) = \dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{2}}.\dfrac{n}{n+2} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$




**théorème 8: formule de Bayes-deuxième version (à savoir retrouver)**

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé et soit $B$ un évènement tel que $P(B) > 0$, alors

1. Si $(A_n)_{n\in[1,N]}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements, on a

   pour tout $n \in [1,N]$ tel que $P(A_n) > 0$, on a $\boxed{P_B(A_n) = \dfrac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{N} P(A_k)P_{A_k}(B)}}$

2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) dénombrable d'évènements, on a

   pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(A_n) > 0$, on a $\boxed{P_B(A_n) = \dfrac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(A_k)P_{A_k}(B)}}$

**exemple 8: des probabilités en cascade**

*Une urne contient $2n$ boules : $n$ noires et $n$ blanches . On tire successivement et sans remise $n$ boules de l'urne. On note $B_i$ l'évènement "la i-ième boule tirée est blanche"*

1. *Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?*
2. *On suppose que $n$ est pair(on note $n = 2k$) .Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche, puis une une noire , en commençant par une blanche ?*
3. *Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche ?*

*Réponse*

1. On utilise la formule des probabilités composées:
   $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1).P(B_2|B_1).P(B_3|B_1 \cap B_2)...P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1})$ avec
   - $P(B_1) = \dfrac{n}{2n}$ (il y a $n$ boules blanches et $2n$ boules au total)
   - $P(B_2|B_1) = \dfrac{n-1}{2n-1}$(il y a $n-1$ boules blanches et $2n-1$ au total)
   - $P(B_3|B_1 \cap B_2) = \dfrac{n-2}{2n-2}$
   - $P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) = \dfrac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$ (il y a $n-(k-1)$ boules blanches et $2n-(k-1)$ au total)

   d'où $\boxed{P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = (\dfrac{n}{2n})(\dfrac{n-1}{2n-1})(\dfrac{n-2}{2n-2})...(\dfrac{1}{n+1}) = \dfrac{n!}{\dfrac{(2n)!}{n!}} = \dfrac{n!^2}{(2n)!}}$
2. On note $N_k$ l'évènement "la $k$-ième boule tirée est noire" .
   On utilise encore la formule des probabilités composées :
   $P(B_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n) = (\dfrac{2k}{4k})(\dfrac{2k}{4k-1})(\dfrac{2k-1}{4k-2})...(\dfrac{k+1}{2k+2})(\dfrac{k+1}{2k+1})$
   Ce qui se simplifie en $\boxed{P(B_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n) = \dfrac{(2k)!^3}{k!^2(4k)!}}$
3. Notons $A$ l'événement "ne tirer qu'une boule blanche"
   $A$ est la réunion disjointe des événements:
   $$(B_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n) \quad , \quad (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_n) \quad ,\dots, \quad (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$
   On a toujours avec la même formule des probabilités composées:
   - $P(B_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n) = \dfrac{n}{2n}.\dfrac{n}{2n-1}.\dfrac{n-1}{2n-2} \cdots \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{n.n!^2}{(2n)!}$
   - $P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_n) = \dfrac{n}{2n}\dfrac{n}{2n-1}\dfrac{n-1}{2n-2} \cdots \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{n.n!^2}{(2n)!}$
   - $P(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_n) = \dfrac{n}{2n}\dfrac{n-1}{2n-1}\dfrac{n}{2n-2}\dfrac{n-2}{2n-3} \cdots \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{n.n!^2}{(2n)!}$

   Comme $A$ est la réunion disjointe des événements ci-dessus on sait que $P(A)$ est égal à la somme de leurs probabilités, d'où:
   $$P(A) = P(B_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \cdots \cap N_n) + \cdots + P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$
   Comme toutes ces probabilités sont égales cela donne $\boxed{P(A) = n^2\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$
   *application numérique: pour $n = 4$ on a $P(A) \simeq 23\%$ et pour $n = 10$ on a $P(A) \simeq 0{,}05\%$*

## 4 Evénements indépendants

### définition 7: indépendance cas fini

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé
On dit que:

i) LES ÉVÉNEMENTS $A$ ET $B$ SONT INDÉPENDANTS lorsque $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
*(c'est à dire $P_B(A)=P(A)$ quand $P(B)>0$)*

ii) les évènements $(A_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ sont 2 À 2 INDÉPENDANTS lorsque

$$\forall(i,j)\in\{1,\ldots,N\}^2 \text{ tels que } i\neq j\ ,\ P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

iii) les évènements $(A_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ sont (MUTUELLEMENT) INDÉPENDANTS lorsque

$$\text{pour tout sous ensemble } I\subset\{1,\ldots,N\},\ P\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)=\prod_{i\in I}P(A_i)$$

*rem 1:* ***Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible!***

*rem 2:* ***il est clair que la (mutuelle) indépendance implique l'indépendance 2 à 2 , mais la réciproque est fausse.***

**Question malicieuse : pour montrer la mutuelle indépendance de $N$ évéments, combien de vérifications doit-on effectuer?**

**remarque 2** (***ne pas confondre indépendants et incompatibles***)

- *Des événements peuvent être indépendants pour une probabilité $P$ mais ne plus l'être pour une probabilité $P_1$ !*
- *En revanche, la notion d'incompatibilité ne dépend pas de la probabilité $P$ choisie sur l'espace.*
- *Il n'y a pas d'implication entre "indépendant" et "incompatible".*

**remarque 3** (***importante***)

*QUAND ON CONSIDÈRE LA PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION D'UN NOMBRE FINI D'ÉVÉNEMENTS, ON SE DEMANDE S'IL S'AGIT D'ÉVÉNEMENTS (MUTUELLEMENT) INDÉPENDANTS*

### exemple 9: l'indépendance mutuelle entraine l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

On lance 2 dés parfaits. $A_1$ est l'évènement "le premier dé amène un nombre pair", $A_2$ est l'évènement "le deuxième dé amène un nombre pair", $A_3$ est l'évènement "la somme des dés est paire".
Montrer que $(A_1,A_2,A_3)$ sont des événements 2 à 2 indép.s mais qu'ils ne sont pas mutuellement indép.

**théorème 9:**

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé

i) Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants
alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et B , ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$

ii) Si $(A_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ sont (mutuellement) indépendants et si $\forall i \in [\![1,N]\!]$ on a $B_i = \overline{A_i}$ ou $B_i = A_i$,
alors $(B_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ sont (mutuellement) indépendants

*Par exemple si on sait que $(A_1,A_2,A_3,A_4)$ sont des événements (mutuellement) indépendants, on peut affirmer que:*

- $(A_1,A_2,\overline{A_3},A_4)$ *sont (mutuellement) indépendants*
- $(A_1,\overline{A_2},\overline{A_3},A_4)$ *sont (mutuellement) indépendants*
- $(\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3},A_4)$ *sont (mutuellement) indépendants*
- ...

**démonstration du i)**

On suppose que $A$ est $B$ sont indépendants, c'est à dire que $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

- On a $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ et cette union est DISJOINTE.

  d'où $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$

  et donc

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A).P(\overline{B})$$

## 5 Continuité croissante et décroissante

**exemple 10:**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Notons pour tout $n\in\mathbb{N}, C_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ et $D_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$

1. Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion
2. Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion
3. Montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$
4. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$

ce qui s'écrit encore $\boxed{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ et $\boxed{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

**théorème 10: continuité croissante**

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé .
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements pour l'inclusion(*c'est à dire* $\forall n\in\mathbb{N},\quad A_n\subset A_{n+1}$).

**Alors** $\boxed{P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)}$

*remarques:*

- *le théorème affirme implicitement l'existence de* $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$
- $P(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n)$ *n'a aucun sens car* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ *n'a aucun sens!*

### théorème 11: continuité décroissante

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé .
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements pour l'inclusion(*c'est à dire* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n$).

**Alors** $\boxed{P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$

**démonstration du théorème 11 à partir du théorème 10**

- Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante d'événements pour l'inclusion

  Notons pour tout entier $n, B_n = \overline{A_n}$.
  La suite $(B_n)$ est alors une suite croissante d'événements!
  D'après le théorème 11, on peut donc affirmer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim P(B_n)$

  Or:

  i) $P(B_n) = 1 - P(A_n)$

  ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ et donc $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

  Ainsi $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1 - \lim P(B_n) = 1 - \lim(1 - P(A_n)) = \lim P(A_n)$

### méthode 1: calcul de $\lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n)$ ou de $\lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{n=0}^{N} A_n)$

Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotone ou pas), on a

$$\lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) = P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \qquad \text{et} \qquad \lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{n=0}^{N} A_n) = P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$$

Pour justifier ceci, on introduit la suite d'événements $(C_n)$ ou $(D_n)$ de l'exemple 10 , et on utilise les théorèmes de continuités croissantes ou décroissantes.

### exemple 11: exemple important

On considère l'expérience qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce de monnaie.
On suppose les tirages indépendants et la pièce parfaitement équilibrée.
On souhaite prouver qu'il est presque impossible de n'obtenir que des Faces.

*Notons:*

- *pour tout* $k \geqslant 1, F_k$ *l'événement "Face est sorti au k-ème tirage".*
- *A l'événement "Face est sorti à tous les tirages".*

*On a bien sûr* $\boxed{A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n}$

*La suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'est pas une suite décroissante pour l'inclusion: nous ne pouvons donc appliquer directement la théorème de continuité décroissante!*
*Nous allons utiliser l'astuce de la méthode 1*

# 6 Démonstrations

**démonstration du théorème 10:**

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante d'événements.

i) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ on a $\boxed{\forall n \geqslant 0, P(A_n) \leq P(A_{n+1})}$
La suite $(P(A_n))_{n\geqslant 0}$ est donc une suite croissante et majorée (par un),
elle est donc convergente! Conclusion: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) \text{ existe}}$

ii) $\boxed{\text{On souhaite définir une suite d'événements 2 à 2 disjoints } (B_n)_{n\geqslant 0} \text{ telle que } \forall n \geqslant 0, A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k}$

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad B_n = A_n - A_{n-1} = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$ .

- Soit $j > i$
  on a $B_i \subset A_i \subset A_{j-1}$, et $B_j \subset \overline{A_{j-1}}$ donc $B_i \cap B_j = \emptyset$
  ceci montre que les événements de la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ sont 2 à 2 disjoints.
- Par récurrence sur $n$, on montre que $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$
  i) $A_0 = B_0$ par définition
  ii) on suppose que $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$ pour un $n \geqslant 0$ fixé quelconque
  Comme $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$ on a donc $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1} = (\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k) \cup B_{n+1}$
  c'est à dire $A_{n+1} = \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} B_k$

iii) Comme les $B_k$ sont disjoints 2 à 2 on a $\boxed{P(A_n) = P(\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(B_k)}$ pour tout $n \geqslant 0$

iv) On a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k)$ et l'on a vu que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$
On a ainsi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ et $\boxed{P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n)}$

v) Or d'après la définition d'une probabilité on peut écrire, car $(B_n)_{n\geqslant 0}$ suite d'événements 2 à 2 incompatibles
$P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} P(B_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$ cqfd!

---

**démonstration du théorème 2, 1, deuxième point**

Soit $N$ un entier et $A_1, A_2, \ldots, A_N$ des évènements 2 à 2 disjoints

Considérons la suite d'événements $(B_n)_{n\geqslant 0}$ définis par $\begin{cases} B_n = A_n & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant N \\ B_n = \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

Il est aisé de se convaincre que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles.
*en effet:*
*soient $n$ et $m$ deux entiers distincts*

- *si $1 \leqslant n \neq m \leqslant N$, on a $B_n \cap B_m = A_n \cap A_m = \emptyset$*
- *sinon on a $B_n = \emptyset$ ou $B_m = \emptyset$ et donc $B_n \cap B_m = \emptyset$*

On peut donc affirmer que $P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$

Or

i) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{n=N} A_n$

ii) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = P(B_0) + \sum\limits_{n=1}^{N} P(B_n) + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} P(B_n) = 0 + \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n) + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} 0 = \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n)$

On a bien prouvé que $\boxed{P(\bigcup\limits_{n=1}^{n=N} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n)}$