ENSEMBLES DENOMBRABLES - TRIBUS

Table des matières

---

1 Produit cartésien (rappels)

définition 1: produit cartésien(rappel)

1. Soient E et F deux ensembles.
   Le produit cartésien de E et de F est $E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$.

2. Soient $E_1, \ldots, E_p$ p ensemble.
   Le produit cartésien de ces ensembles est

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \mid \forall i \in [\![1,p]\!], x_i \in E_i\}$$

3. Soit E une ensemble et $p \geqslant 1$ un entier

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}} = \{(x_1, \ldots, x_p) \mid \forall i \in [\![1,p]\!], x_i \in E\}$$

théorème 1:

1. Si E et F sont finis, on a $\boxed{\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)}$
2. Si $E_1, \ldots, E_p$) sont finis, on a

$$\boxed{\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \cdots \times \text{card}(E_p)}$$

3. Si E est fini, on a $\boxed{\text{card}(E^p) = (\text{card}\, E)^p}$

2 Ensembles finis

définition 2: ensemble fini

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que E EST UN ENSEMBLE FINI lorsqu'il existe un entier naturel non nul n et une bijection $\phi : [\![1,n]\!] \to E$
- Dans ce cas, n est appelé LE CARDINAL DE E, on le note $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
- *et les éléments de E peuvent alors être numérotés* $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_i | i \in [\![1,n]\!]\} = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$

On convient que l'ensemble vide a pour cardinal zéro: c'est le seul ensemble de cardinal nul.

théorème 2:

Deux ensembles finis de même cardinal sont en bijection

remarque: nous allons voir que deux ensembles infinies ne sont pas forcément en bijection et également que deux ensembles infinis peuvent être en bijection même si l'un est strictement inclus dans l'autre!

démo:

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis de cardinal n.
On sait alors que

- il existe une bijection ϕ_1 de $[\![1,n]\!] \to E_1$
- il existe une bijection ϕ_2 de $[\![1,n]\!] \to E_2$

Comme l'application réciproque d'une bijection est encore une bijection et que la composée de deux bijections est toujours une bijection, on peut affirmer $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est une bijection de $E_1 \to E_2$

théorème 3: le point 2 se généralise avec la formule de Poincaré(cf. exo)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E

1. A est fini et $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$, avec égalité ssi $A = E$
2. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
3. si A et B sont disjoints on a donc $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
4. $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ où $\overline{A} = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$
5. $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$ où $A - B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$

3 Ensembles dénombrables, au plus dénombrables

définition 3: ensemble dénombrable, ensemble au plus dénombrable

1. Un ensemble E est DÉNOMBRABLE lorsqu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \to E$
   Dans ce cas, les éléments de E peuvent être indicés par $\mathbb{N}$, càd que l'on peut écrire $E = \{x_i \,|\, i \in \mathbb{N}\} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

2. Un ensemble E est dit AU PLUS DÉNOMBRABLE lorsqu'il est fini ou dénombrable
   Dans ce cas, E peut s'écrire $E = \{x_i \,|\, i \in I\}$ avec I sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et les x_i distincts

exemple 1:

- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable
- L'ensemble des entiers naturels pairs est dénombrable
- L'ensemble des entiers naturels impairs est dénombrable
- $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, [0,1] ne sont pas dénombrables

théorème 4:

1. $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable
2. le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable
   En particulier $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
3. les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrable *(càd qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est soit fini, soit dénombrable)*
4. (HP): l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable!

$\mathbb{Z}$	...	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	...
$\mathbb{N}$	...	8	6	4	2	0	1	3	5	7	...

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -\dfrac{p}{2} & \text{si } p \text{ pair} \\ \dfrac{p+1}{2} & \text{si } p \text{ impair} \end{cases} \end{array}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
0	0	2	5	9	14	
1	1	4	8	13		
2	3	7	12			
3	6	11	...			
4	10	16				
...	15					

<—$\mathbb{N}^2$ est dénombrable

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & p + \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} \end{array}$$

4 Rappels classiques de dénombrement

définition 4: $p-$liste ou $p-$uplet

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ un entier.

- On appelle $p-$LISTE D'ÉLÉMENTS DE E (ou encore $p-$UPLET) tout élément de E^p
- *exemple:*
  Si $E = \{1{,}3{,}5\}$ *il y a neuf* $2-$*listes (= couples), à savoir*

  $$(1{,}1) \quad (1{,}3) \quad (1{,}5) \quad (3{,}1) \quad (3{,}3) \quad (3{,}5) \quad (5{,}1) \quad (5{,}3) \quad (5{,}5)$$

  et vingt-sept $3-$*listes(=triplets), à savoir*

  $$(1{,}1{,}1) \quad (1{,}1{,}3) \quad (1{,}1{,}5) \quad (1{,}3{,}1) \quad (1{,}3{,}3) \quad (1{,}3{,}5) \quad (1{,}5{,}1) \quad (1{,}5{,}3) \quad (1{,}5{,}5)$$

  $$(3{,}1{,}1) \quad (3{,}1{,}3) \quad (3{,}1{,}5) \quad (3{,}3{,}1) \quad (3{,}3{,}3) \quad (3{,}3{,}5) \quad (3{,}5{,}1) \quad (3{,}5{,}3) \quad (3{,}5{,}5)$$

  $$(5{,}1{,}1) \quad (5{,}1{,}3) \quad (5{,}1{,}5) \quad (5{,}3{,}1) \quad (5{,}3{,}3) \quad (5{,}3{,}5) \quad (5{,}5{,}1) \quad (5{,}5{,}3) \quad (5{,}5{,}5)$$

- A utiliser lorsque l'on effectue p tirages successifs avec remise dans un urne comportant n éléments : **l'ordre compte et il peut y avoir répétition.**

définition 5: $p-$arrangement (HP)

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \geqslant p \geqslant n$ un entier.

- On appelle $p-$ARRANGEMENT DE E toute $p-$liste d'éléments de E sans répétition (dans le cas où $p = n$ on parle de PERMUTATION
- *exemple:*
  Si $E = \{1{,}3{,}5\}$ *il y a six* $2-$*listes sans répétition, à savoir*

  $$\cancel{(1{,}1)} \quad (1{,}3) \quad (1{,}5) \quad (3{,}1) \quad \cancel{(3{,}3)} \quad (3{,}5) \quad (5{,}1) \quad (5{,}3) \quad \cancel{(5{,}5)}$$

  et six $3-$*listes sans répétition(=permutations) aussi, à savoir*

  $$\cancel{(1{,}1{,}1)} \quad \cancel{(1{,}1{,}3)} \quad \cancel{(1{,}1{,}5)} \quad \cancel{(1{,}3{,}1)} \quad \cancel{(1{,}3{,}3)} \quad (1{,}3{,}5) \quad \cancel{(1{,}5{,}1)} \quad (1{,}5{,}3) \quad \cancel{(1{,}5{,}5)}$$

  $$\cancel{(3{,}1{,}1)} \quad \cancel{(3{,}1{,}3)} \quad (3{,}1{,}5) \quad \cancel{(3{,}3{,}1)} \quad \cancel{(3{,}3{,}3)} \quad \cancel{(3{,}3{,}5)} \quad (3{,}5{,}1) \quad \cancel{(3{,}5{,}3)} \quad \cancel{(3{,}5{,}5)}$$

  $$\cancel{(5{,}1{,}1)} \quad (5{,}1{,}3) \quad \cancel{(5{,}1{,}5)} \quad (5{,}3{,}1) \quad \cancel{(5{,}3{,}3)} \quad \cancel{(5{,}3{,}5)} \quad \cancel{(5{,}5{,}1)} \quad \cancel{(5{,}5{,}3)} \quad \cancel{(5{,}5{,}5)}$$

- A utliser lorsque l'on effectue p tirages successifs sans remise dans une urne comportant n éléments: **l'ordre compte mais il n'y a pas de répétition**

définition 6: $p-$combinaison ou parties à p éléments

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ un entier.

- On appelle $p-$COMBINAISON DE E toute partie(=sous-ensemble de E) à p éléments
- *exemple:*
  Si $E = \{1{,}3{,}5{,}7\}$ *il y 6 parties à deux éléments, à savoir*

  $$\{1{,}3\} \qquad \{1{,}5\} \qquad \{1{,}7\} \qquad \{3{,}5\} \qquad \{3{,}7\} \qquad \{5{,}7\}$$

  et 4 parties à 3 éléments, à savoir

  $$\{1{,}3{,}5\} = \overline{\{7\}} \qquad \{1{,}3{,}7\} = \overline{\{5\}} \qquad \{1{,}5{,}7\} = \overline{\{3\}} \qquad \{3{,}5{,}7\} = \overline{\{1\}}$$

- A utiliser lorsque tire simultanément p éléments dans une urne comportant n éléments: **il n'y a ni ordre, ni répétition**

théorème 5:

Soit E un ensemble fini à n et éléments et $p \geqslant 1$ un entier.

1. Le nombre de $p-$listes d'éléments de E est n^p.
2. Le nombre de $p-$listes sans répétition d'éléments de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$
   En particulier le nombre de permutations est $n!$
3. Le nombre de parties de E à p éléments est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
4. Le nombre de parties de E est $2^{\operatorname{card} E} = 2^n$

exemple 2: à retenir

Soient E et F deux ensembles finis

- le nombre d'applications de E dans F est $(\operatorname{card} E)^{\operatorname{card} F}$
- le nombre d'applications injectives de E dans F est $\dfrac{p!}{(p-n)!}$ où $\operatorname{card}(E) = n \leqslant p = \operatorname{card}(F)$

théorème 6: propriétés des coefficients binomiaux

Lorsque les coefficients ci-dessous ont un sens, on a

1. $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1 \qquad \dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n \qquad \dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
2. $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
3. $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$ (triangle de Pascal)
4. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} a^p b^{n-p}$ Formule du binôme de Newton

remarque:

très souvent, par convention, lorsque $p > n$ on pose $\dbinom{n}{p} = 0$

Il faut aussi savoir redémontrer les formules suivantes:

- *Formule de Vandermonde* $\sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{n}{k}\dbinom{m}{p-k} = \dbinom{n+m}{p}$
- pour $1 \leqslant p \leqslant n$ on a $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ Formule du capitaine

théorème 7:

Si E est un ensemble de cardinal fini n alors $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n$

démo:

Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, notons E_p l'ensemble des sous-ensembles de E à p éléments

Comme $\mathcal{P}(E) = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup\limits_{p=0}^{p=n} E_p$, et que les E_p sont disjoints deux à deux,

on sait que $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card}(E_p)$

Or on sait également que $\operatorname{card}(E_p) = \dbinom{n}{p}$

Ainsi $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} = \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} .1^p.1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$

exemple: cas n=3: Ecrire E_0, E_1, E_2 et E_3

5 Tribu (V125)

5.1 Opérations avec un nombre fini d'ensembles (rappels)

On rappelle que:

i) Ω désigne un ensemble appelé *univers.*

ii) Il est d'usage en probabilités de noter ω un élément quelconque de l'ensemble Ω (plutôt que x).

iii) Les sous-ensembles de Ω sont notées à l'aide d'une lettre majuscule: $A, B, \ldots$

On a les définitions suivantes:

- $\omega \in \overline{A} \Longleftrightarrow \omega \notin A$ *($\overline{A}$ = complémentaire de A)*
- $\omega \in A \cup B \Longleftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$
- $\omega \in A \cap B \Longleftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$
- $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \Longleftrightarrow \exists j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(union d'une nombre fini d'ensembles)*   OU
- $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N \Longleftrightarrow \forall j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(intersection d'une nombre fini d'ensembles)*   ET
- $\omega \in A - B \Longleftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \notin B$

théorème 8: Lois de De Morgan (Rappel)

i) Soient A et B deux ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)

$$☛\,\overline{\overline{A}} = A \qquad ☛\,\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad ☛\,\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

ii) Soient A, B et C trois ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)

$$☛\,A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad ☛\,A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

iii) Soient $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ un nombre fini d'ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*). On a

$$☛\,\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N} = \overline{\bigcup_{j=1}^{N} A_j} = \bigcap_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_N}$$

$$☛\,\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N} = \overline{\bigcap_{j=1}^{N} A_j} = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cap \overline{A_N}$$

$$☛\,B \bigcap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = (B \cap A_1) \bigcup (B \cap A_2) \bigcup \cdots \bigcup (B \cap A_N)$$

$$☛\,B \bigcup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = (B \cup A_1) \bigcap (B \cup A_2) \bigcap \cdots \bigcap (B \cup A_N)$$

5.2 Opérations avec un nombre dénombrable d'ensembles

définition 7: intersection ou union dénombrable

Soit Ω un ensemble(=univers) et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω

1. On note $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent au moins à un ensemble A_n.
   Ainsi:
   $$\boxed{\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \omega \in A_n}$$
2. On note $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les ensembles A_n.
   Ainsi:
   $$\boxed{\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n}$$

remarque 1 (***avec le vocabulaire probabiliste***)

- $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow$ *au moins un des évènements* A_n *est réalisé* $\Longleftrightarrow \omega$ *appartient à au moins un des* A_n
- $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow$ *tous les évènements* A_n *sont réalisés* $\Longleftrightarrow \omega$ *appartient à tous les* A_n

remarque 2 (***unification des définitions***)

Soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable càd AU PLUS DÉNOMBRABLE
On a

- $\boxed{\omega \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, \omega \in A_i}$ càd $\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall i \in I, \omega \in A_i\}}$
- $\boxed{\omega \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I, \omega \in A_i}$ càd $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, i \in I, \omega \in A_i\}}$

exemple 3: On considère $\Omega = \mathbb{N}$

Dans les quatre cas suivants, indiquer ce que valent $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1. $A_n = \{n\}$
2. $A_n = \{n,n+1\}$
3. $A_n = \{0,1,2,\dots,n\} = [\![0,n]\!]$
4. $A_n = \{n,n+1,n+2,n+3,\dots\} = \{p \geqslant n | p \in \mathbb{N}\}$

théorème 9: Loi de De Morgan

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous ensembles de Ω et B un sous-ensemble de Ω

1. $\boxed{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, $\boxed{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$
2. $\boxed{B\bigcap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B\bigcap A_n)}$, $\boxed{B\bigcup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B\bigcup A_n)}$

rem: nous sommes soulagés de constater que ce sont les mêmes formules qu'avec un nombre fini d'ensembles!

- *"Le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires."*
- *"Le complémentaire d'un intersection est l'union des complémentaires"*

démonstration

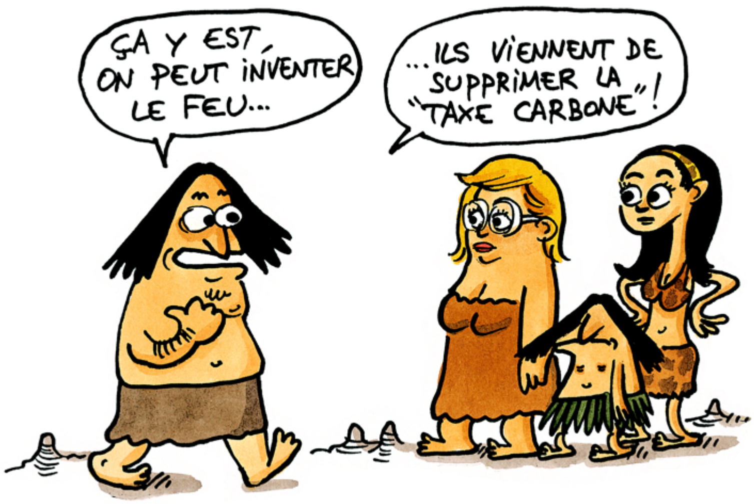
On a les équivalences

$$\omega \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \iff \omega \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \notin A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \overline{A_n} \iff \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

$$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in \overline{A_n} \iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \notin A_n \iff \omega \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

$$\omega \in B\bigcap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \iff \begin{cases} \omega \in \quad B \\ \text{et} \\ \omega \in \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases} \iff \begin{cases} \omega \in B \\ \text{et} \\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in A_n \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in B \cap A_n \iff \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B\bigcap A_n)$$

$$\omega \in B\bigcup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \iff \begin{cases} \omega \in \quad B \\ \text{ou} \\ \omega \in \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases} \iff \begin{cases} \omega \in B \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in A_n \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in B \cup A_n \iff \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B\bigcup A_n)$$



5.3 tribu

définition 8: axiomes des tribus

Soit Ω un ensemble non vide.
On dit qu'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est UNE TRIBU lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$

ii) Si $A \in \mathcal{T}$, alors le complémentaire $\overline{A} \in \mathcal{T}$ ("stabilité par passage au complémentaire")

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ("stabilité par union dénombrable")

- *Une tribu est donc un ensemble de sous-ensembles de Ω*
- *c'est à dire qu'une tribu est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$*
- *Les éléments de la tribu sont appelés les événements*

théorème 10:

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.
Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$

2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ("stabilité par intersection dénombrable")

3. $\mathcal{T}$ est stable par unions et intersections finies

A retenir: une tribu est un ensemble de parties de Ω qui contient l'ensemble vide et Ω, qui est stable par complémentarité, et par intersection ou réunion finies ou dénombrables.

démonstration

1. On sait que $\Omega \in \mathcal{T}$

   et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire

   donc $\overline{\Omega} \in \mathcal{T}$ càd $\emptyset \in \mathcal{T}$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$

   comme $A_n \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, on a $\overline{A_n} \in \mathcal{T}$

   Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \in \mathcal{T}$ et que $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on a $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{T}$

   et donc $\overline{B} \in \mathcal{T}$, car $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire

   or $\overline{B} = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{A_n}} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

   On a bien montré que $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable

3. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous allons poser
   $$B_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant N \\ \emptyset & \text{si } n \geqslant N+1 \end{cases}$$
   On constate que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{T}$

   Comme $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on peut dire que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$

   Or $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{N} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n$

   On a prouvé que $\bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

   et donc $\mathcal{T}$ est stable par union finie
4. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous allons poser
   $$C_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant N \\ \Omega & \text{si } n \geqslant N+1 \end{cases}$$
   On constate que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{T}$

   Comme $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, on peut dire que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{T}$

   Or $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap\limits_{n=0}^{N} C_n = \bigcap\limits_{n=0}^{N} A_n$

   On a prouvé que $\bigcap\limits_{n=0}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

   et donc $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie

remarque 3 (*vocabulaire*)

- *Un singleton $\{w\}$ est appelé un <u>événement élémentaire.</u>*
- *L'événement $\overline{A}$ est appelé <u>l'événement contraire de l'événement A</u>*
- *L'événement Ω est appelé <u>l'événement certain,</u>*
- *l'événement $\emptyset$ est appelé <u>l'événement impossible.</u>*
- *<u>deux événements sont dit incompatibles</u> lorsque leur intersection est l'ensemble vide.*
  càd
  $$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \iff A \cap B = \emptyset \iff A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$
- *On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements <u>incompatibles deux à deux</u> lorsque $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$*