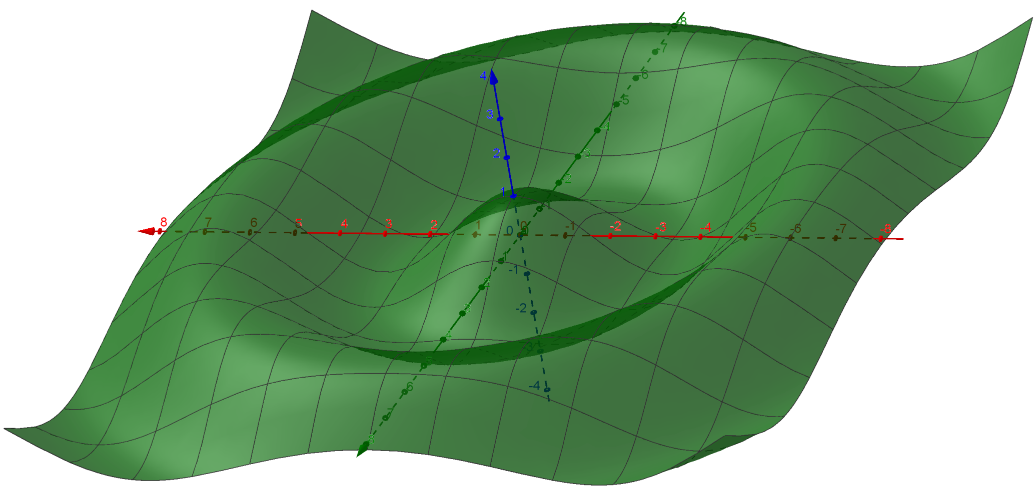
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on considèrera l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



remarque 1 (***fonctions de deux variables à valeurs dans*** $\mathbb{R}^3$)

- *On considère* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u+v,\dfrac{u^2}{v},u+v^2) \end{array}}$

  Donner $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$

1 Courbes paramétrées de l'espace

- Une COURBE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de points(de l'espace) qui sont paramétrés par UN, ET UN SEUL, paramètre réel. $\boxed{\Gamma = \{M(t)\,|\,t \in I\}}$

définition 1:

- On appelle COURBE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ DE CLASSE C^1 tout couple (I,f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction vectorielle de classe C^1 de $I \to \mathbb{R}^3$
- On note $M(t)$ ou M_t le point de coordonnées $f(t)$.
- On appelle SUPPORT DE LA COURBE PARAMÉTRÉE, et on note Γ, l'ensemble des points M_t avec $t \in I$

On a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t),y(t),z(t)) \end{array}}$ *et* $\boxed{\Gamma = \{M(t)\,|\,t \in I\}`}$

Comme pour les arcs paramétrés plans, un même support peut posséder deux paramétrisations distinctes

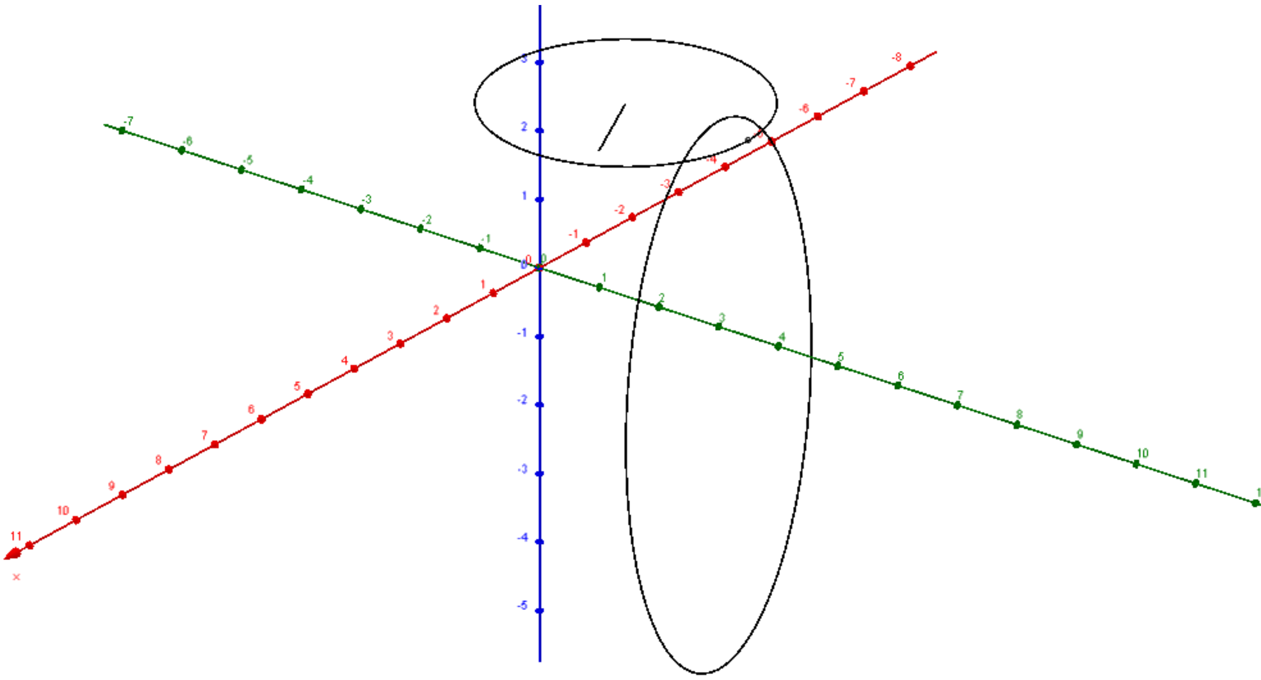
exemple 1:

- Le couple $(\mathbb{R},f)$ avec $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) = (2t,5-t,-3+2t) \end{array}}$ est une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$.

exemple 2:

Reconnaître le support des courbes paramétrées suivantes:

1. $f : t \mapsto M(t) = (2+2\cos(t)\,,3+2\sin(t)\,,4)$ avec $t \in [0,2\pi]$
2. $g : t \mapsto M(t) = (1+\cos(t)\,,2+\cos(t)\,,3+\cos(t))$ avec $t \in [0,2\pi]$
3. $h : t \mapsto M(t) = (2\cos(t)\,,3\,,-1+4\sin(t))$ avec $t \in [0,2\pi]$



exemple 3:

On considère la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (2\cos t, \sin t, \cos t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. La courbe possède-t-elle des symétries évidentes?
2. Déterminer les projections orthogonales sur les plans de coordonnées de cette courbe.
3. Montrer que la courbe est plane, et donner l'équation cartésienne de ce plan.
4. En effectuant un changement de repère judicieux, montrer que la courbe est une ellipse.

théorème 1: longueur d'un arc

La longueur est donnée par la formule : $\boxed{l(\widehat{M_{t_1}M_{t_2}}) = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(u)||du}$

définition 2: point régulier, droite tangente

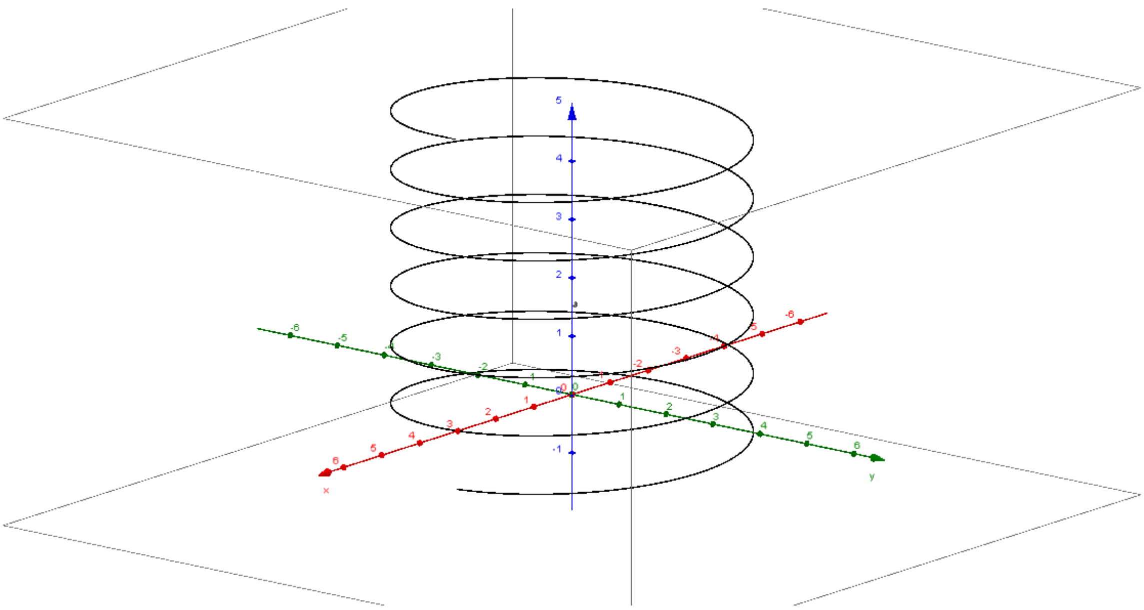
i) On dit que LE POINT $M_t = f(t)$ EST UN POINT RÉGULIER DE LA COURBE PARAMÉTRÉE (I,f) lorsque $f'(t) \neq \vec{0}$.
Dans le cas contraire, on dit que M_t EST SINGULIER OU STATIONNAIRE.

ii) Soit M_t un point régulier.
On appelle DROITE TANGENTE EN M_t À Γ la droite passant par M_t et de vecteur directeur $M'(t) = f'(t)$

exemple 4:

On considère l'hélice (H) de rayon $R > 0$ paramétrée par $f : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (x = R\cos t, y = R\sin t, z = t)$

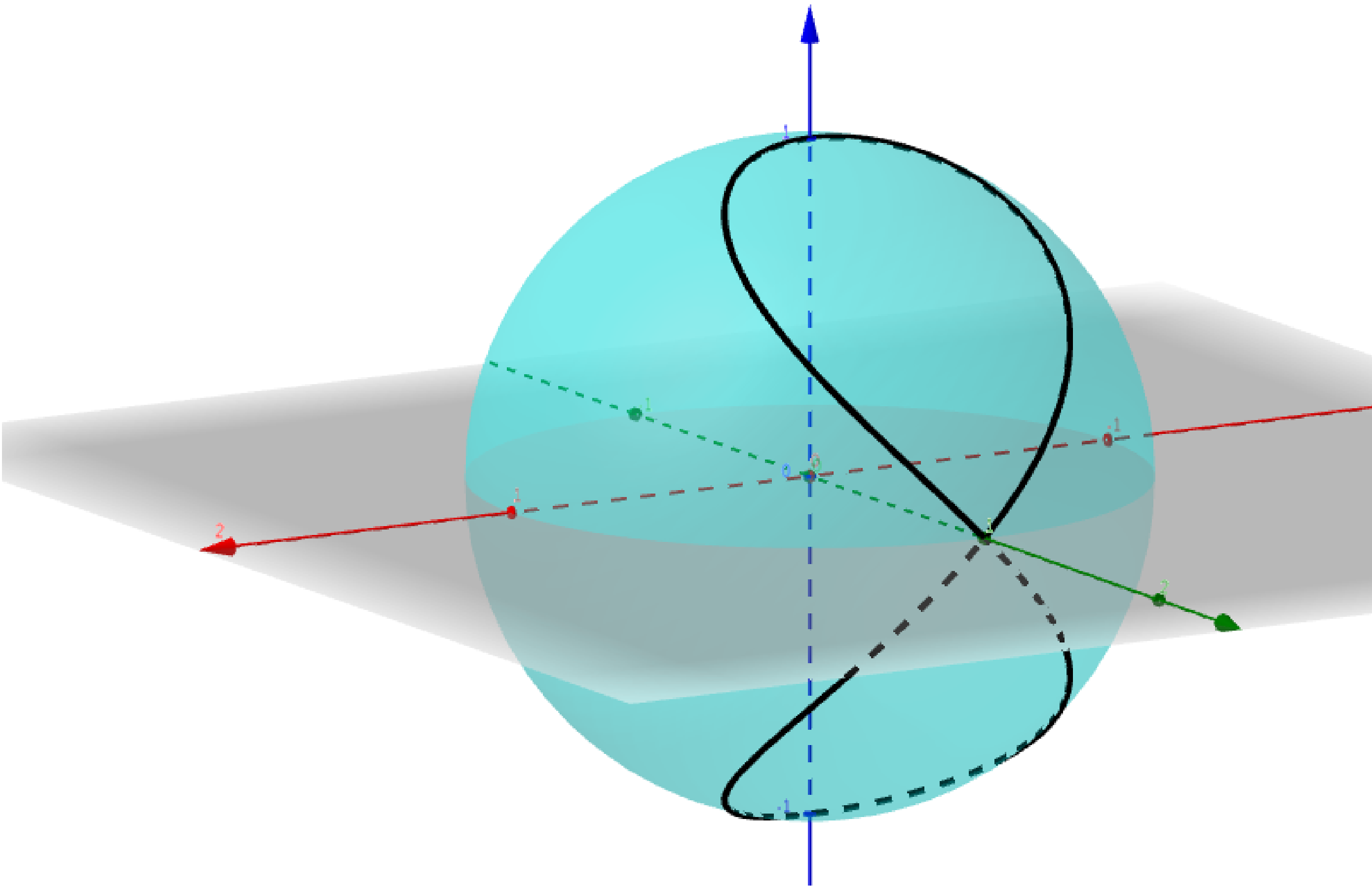
1. Cette courbe passe-t-elle par le point $O(0,0,0)$? Par le point $(0,R,\frac{\pi}{2})$?
2. Déterminer le projeté de (H) sur le plan xOy et le représenter
3. Déterminer le projeté de (H) sur le plan xOz et le représenter
4. Déterminer l'intersection de (H) avec le plan xOz
5. Ecrire une équation paramétrique de la droite tangente à (H) au point $M(\pi/2)$
6. Montrer que tout point est régulier
7. Calculer la longueur prise sur la courbe entre les points $M(0)$ et $M(\pi/2)$
8. Montrer qu'en tout point l'angle entre la tangente et l'axe (Oz) est constant.
9. Pour tout t réel, calculer la longueur entre le point $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ le long de la courbe



exemple 5:

Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f:[0{,}2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad t & \longmapsto & (\cos(t)\sin(t),\sin^2(t),\cos(t)) \end{array}}$.

- On a pour tout t, $f'(t) = (\cos(2t),\sin(2t),-\sin(t)) \neq \vec{0}$.
  car $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ ne peuvent être nuls simultanément, donc tout point est régulier.
- Ci-dessous la représentation graphique de Γ : l'arc est tracé sur la sphère de centre O et de rayon un, car $\forall t \in [0{,}2\pi], x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$: il s'agit d'un "huit" tracé sur la sphère...



- On remarque que le point $A(0{,}1{,}0)$ est un point double de l'arc paramétré.
  Déterminer l'angle entre les deux tangentes en ce point

2 Surface paramétrée - Nappe paramétrée

- Une SURFACE PARAMÉTRÉE DE $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de points(de l'espace) qui sont paramétrés par **DEUX** PARAMÈTRES RÉELS **INDÉPENDANTS**. $\boxed{\Sigma = \{M(u,v) \mid (u,v) \in U\}}$

2.1 courbes coordonnées

définition 3: nappe paramétrée ou surface paramatrée de classe C^1

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$, et $f \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$.
On appelle NAPPE PARAMÉTRÉE DE CLASSE C^k, ou SURFACE PARAMÉTRÉE DE CLASSE C^k, le couple (U,f).

- En notant (u,v) les variables de f, et (x,y,z) ses fonctions coordonnées,
  f est donc définie comme suit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \end{array}}$
- On note $M(u,v)$ le point de coordonnées $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.
- L 'ensemble $\{M(u,v) | (u,v) \in U\}$ est LE SUPPORT DE LA NAPPE PARAMÉTRÉE, c'est une surface.
- Dans la pratique, on identifie le point $M(u,v)$ avec $f(u,v)$.

définition 4: courbes coordonnées

On appelle COURBES COORDONNÉES DE LA SURFACE (U,f), toute courbe paramétrée du type suivant:

$\boxed{u \longrightarrow f(u,v) \text{ , } v \text{ étant fixé}}$. ou $\boxed{v \longrightarrow f(u,v) \text{ , } u \text{ étant fixé}}$

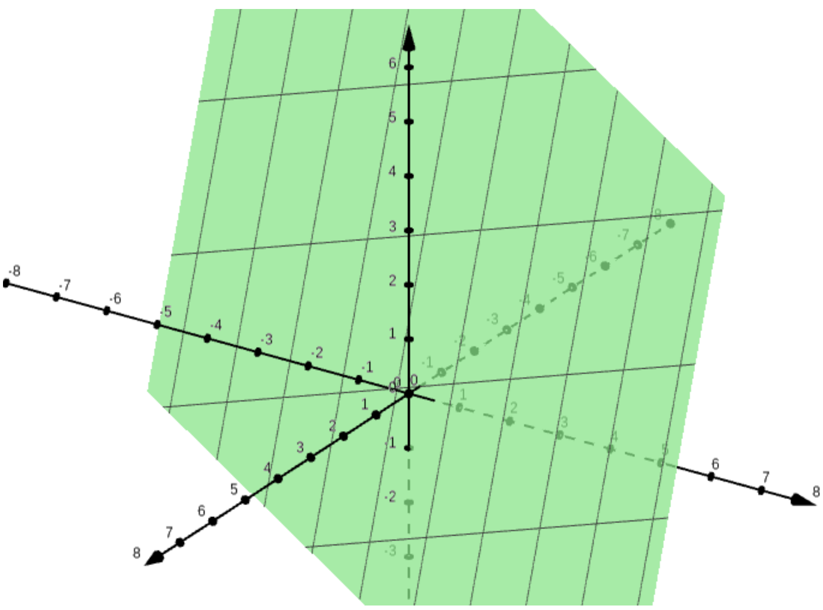
rem: les courbes coordonnées sont des courbes tracées "sur" la surface

exemple 6: un plan est bien le support d'une surface paramétrée.

- Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (1+u+v, 1+2u, -2+u-3v) \end{array}}$
- $(\mathbb{R}^2,f)$ est une surface paramétrée de classe C^∞
- on a

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} 1+u+v \\ 1+2u \\ -2+u-3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

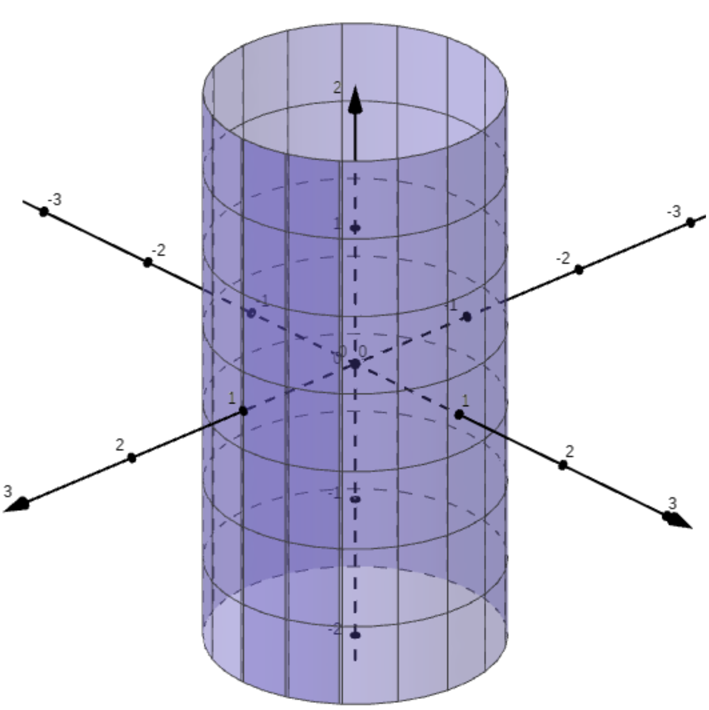
- on reconnait la paramétrisation du plan passant par le point $A(1,1,-2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{d} = (1,2,1)$ et $\vec{d'} = (1,0,-3)$

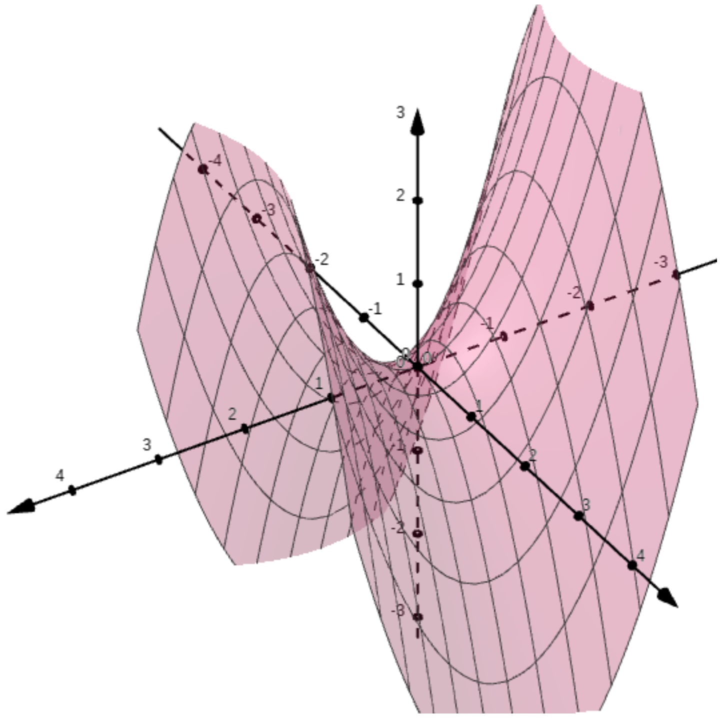


exemple 7:

Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f : [0{,}2\pi]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad (u{,}v) & \longmapsto & (\cos u, \sin u{,}v) \end{array}}$

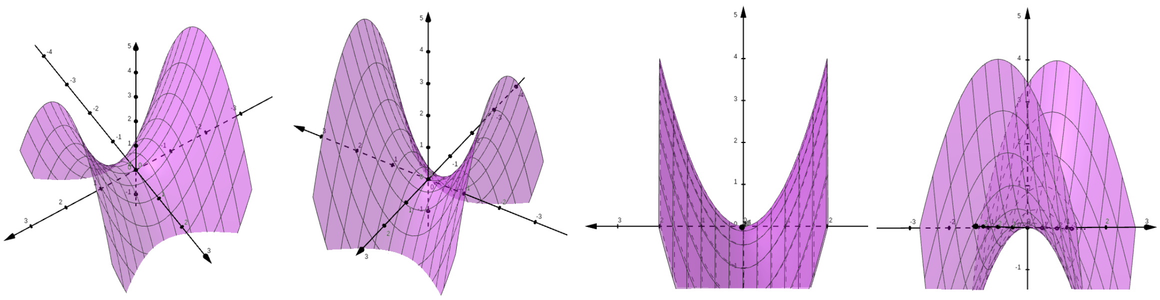
- à v fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} [0{,}2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad u & \longmapsto & (\cos u, \sin u{,}v) \end{array}}$ est le cercle de rayon un, tracé dans le plan d'équation $z = v$, et centré en $(0{,}0{,}v)$
- à u fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & (\cos u, \sin u{,}v) = (\cos u, \sin u{,}0) + v(0{,}0{,}1) \end{array}}$ est la droite qui passe par le point $(\cos u, \sin u{,}0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{k}$





exemple 8:

- Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad (u{,}v) & \longmapsto & (u{,}v{,}u^2 - v^2) \end{array}}$
- à v fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (u{,}v{,}u^2 - v^2) \end{array}}$ une parabole "tournée vers le haut" tracée dans le plan d'éq. $y = v$
- à u fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & (u{,}v{,}u^2 - v^2) \end{array}}$ une parabole"tournée vers le bas" tracée dans le plan d'éq. $x = u$



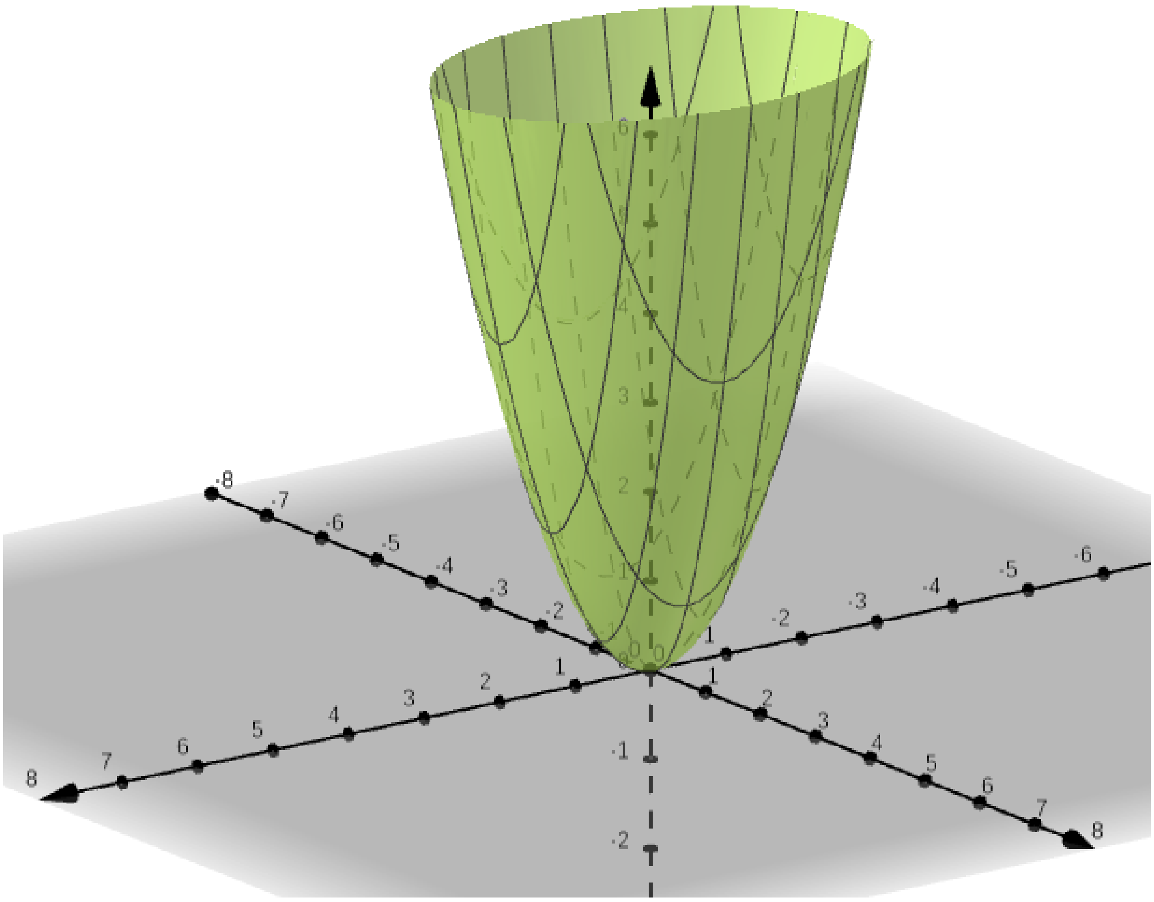
exemple 9:

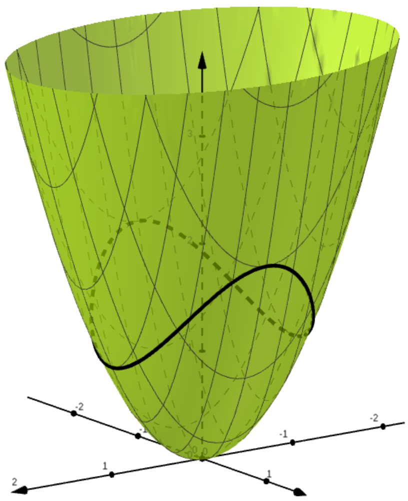
On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ avec $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,u^2+2v^2)\end{array}$

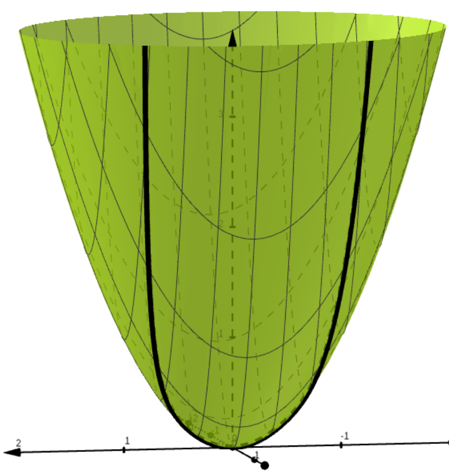
1. Dans quelle partie de l'espace, le support de cette nappe est-il inclus?
2. Déterminer les lignes coordonnées.

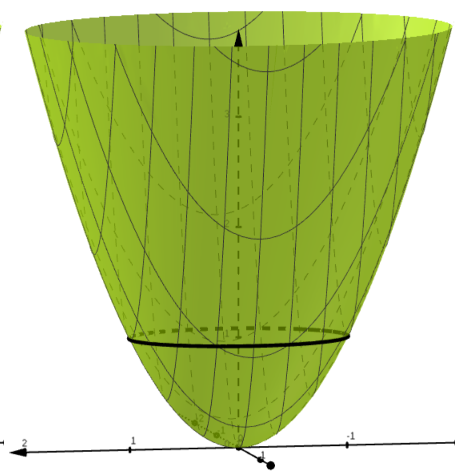
dans les dessins ci-dessous, nous avons aussi représenté deux arcs paramétrés tracés sur la surface, pour cela il suffit que les deux paramètres u et v ne soient plus indépendants mais liés

- $u \mapsto (u,u^4,u^2+2u^8)$
- $t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos^2 t + 2\sin^2 t)$









2.2 plan tangent

définition 5: point régulier

Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point de la nappe $\Sigma = (U,f)$.

- On dit que LE POINT M_0 EST UN POINT RÉGULIER DE Σ lorsque $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.
- Dans le cas contraire, on dit que M_0 EST UN POINT SINGULIER OU STATIONNAIRE.

On utilise encore la notation $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0,v_0)$ *pour* $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$

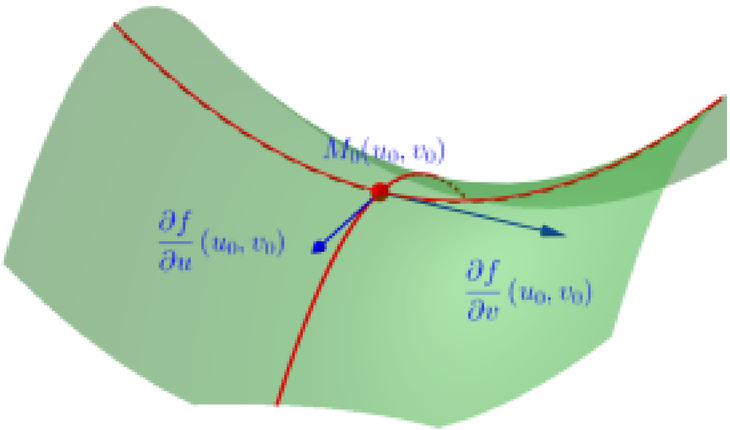
définition 6: plan tangent, droite normale en un point régulier

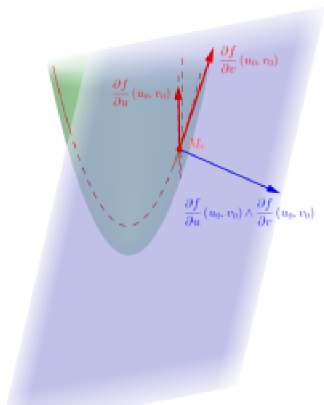
Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point régulier de Σ

- on appelle PLAN TANGENT EN M_0 À LA SURFACE Σ le plan qui passe par le point M_0 et qui a pour vecteurs directeurs $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$
- on appelle DROITE NORMALE EN M_0 À LA SURFACE Σ la droite qui passe par M_0 et qui est orthogonale au plan tangent en M_0

remarques:

- *le vecteur* $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0,v_0)$ *est un vecteur normal à la surface au point* $M_0(u_0,v_0)$
- *La droite normale a pour rep. paramétrique:* $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \longmapsto & M_0 + \lambda.\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0,v_0) \end{array}}$
- *le plan tangent au point* $M_0(u_0,v_0)$ *est dirigé par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées au point* $M_0(u_0,v_0)$
- *le plan tangent admet pour rep. paramétrique :* $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & M_0 + \lambda\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0) \end{array}}$





exemple 10:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, v-u, u^2+v^2) \end{array}}$ et A le point de coordonnées $(1, -3{,}5)$

1. Montrer que le point A est un point de la surface
2. Montrer que le point A est un point régulier de cette surface
3. Donner l'équation cartésienne du plan tangent au point A.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite normale à la surface au point A

exemple 11: la sphère vue comme une nappe paramétrée

Soit $\boxed{\begin{array}{lll} f: [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\sin u.\cos v, \sin u.\sin v, \cos u) \end{array}}$

1. Déterminer les points réguliers
2. Montrer qu'en un point régulier le plan tangent a pour équation

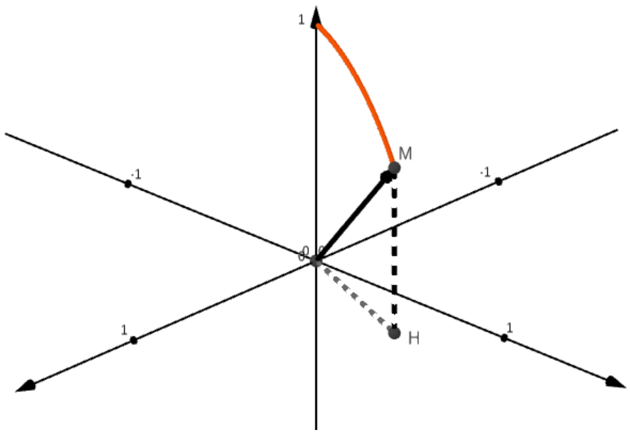
$$\sin u_0.\cos v_0.x + \sin u_0.\sin v_0.y + \cos u_0.z - 1 = 0$$

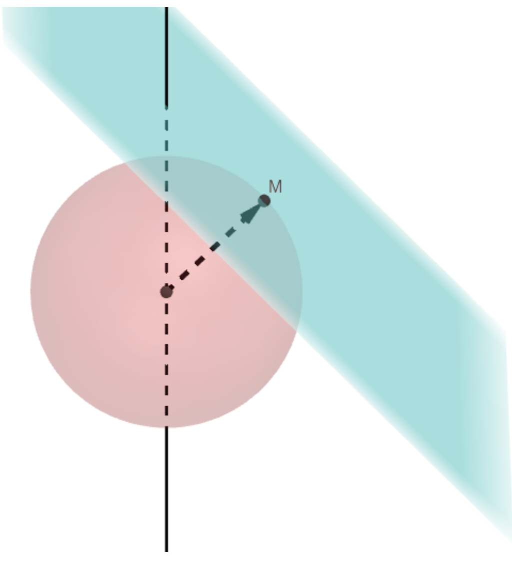
3. Vérifier qu'en un point régulier la droite normale à la surface passe par l'origine

éléments de réponse

- Il s'agit d'une nappe paramétrée de classe C^∞ car les fonctions coordonnées sont des fonctions de classe C^∞ en tant que produit de fonctions usuelles.
- On a $\boxed{\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \cos u_0.\cos v_0 \\ \cos u_0.\sin v_0 \\ -\sin u_0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} -\sin u_0.\sin v_0 \\ \sin u_0.\cos v_0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

  d'où $\boxed{\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \sin^2 u_0.\cos v_0 \\ \sin^2 u_0.\sin v_0 \\ \cos u_0.\sin u_0 \end{pmatrix} = \sin(u_0).\begin{pmatrix} \sin u_0.\cos v_0 \\ \sin u_0.\sin v_0 \\ \cos u_0 \end{pmatrix}}$





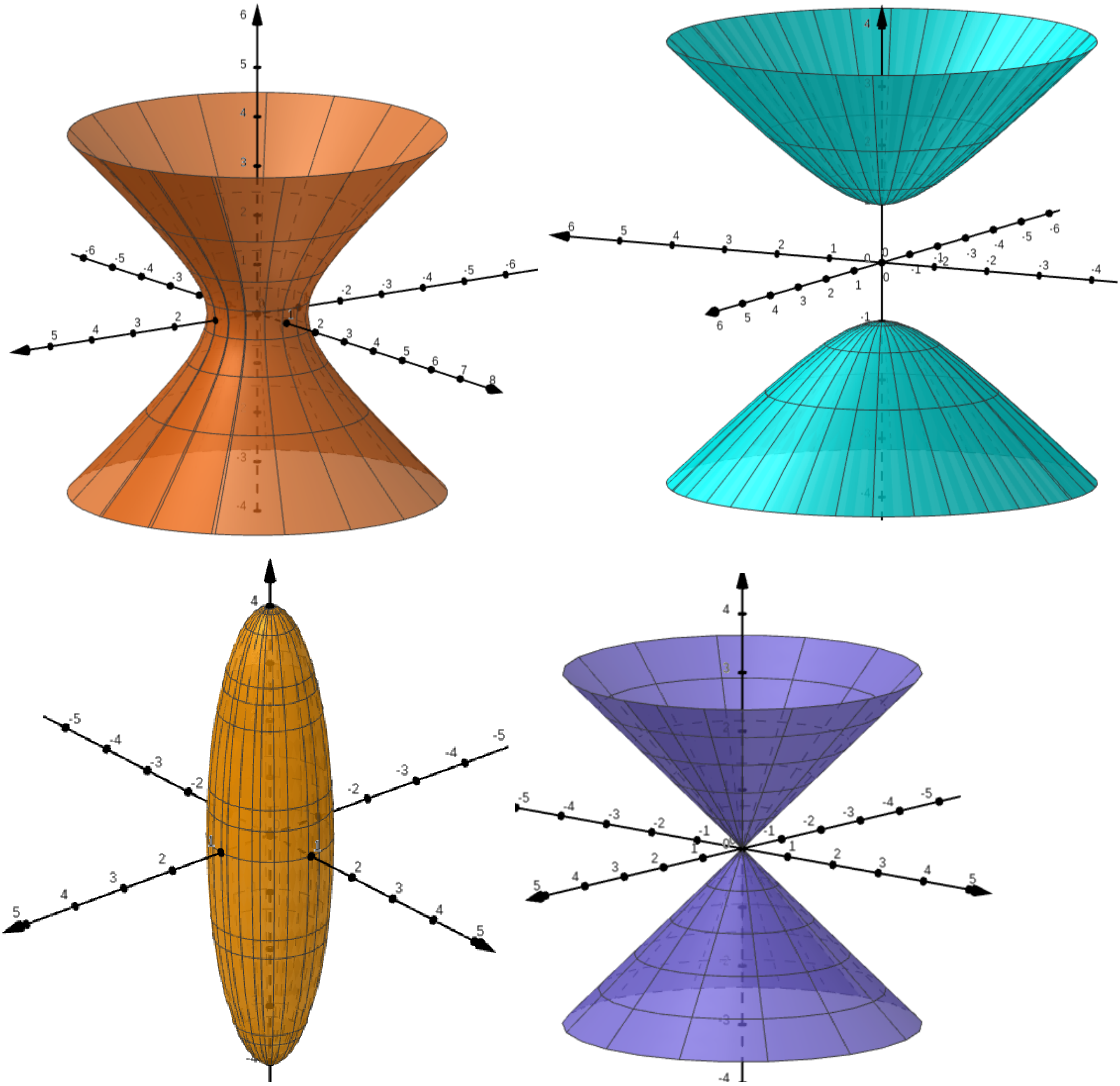
3 Surfaces définies par une équation cartésienne

définition 7: Equation cartésienne d'une surface

Soit F une fonction de $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
On appelle SURFACE D'ÉQUATION CARTÉSIENNE $F(x,y,z) = 0$ l'ensemble des points de $U \subset \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées vérifient l'équation.
Autrement dit:

$$S = \{M(x,y,z) \in U \subset \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,z) = 0\}$$

exemple 12:



définition 8: point régulier d'une surface définie par éq.cart.

Soit $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ un point de la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$
On dit que le point M_0 est RÉGULIER lorsque $\overrightarrow{grad}_{M_0}(F) = \overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F) \neq \vec{0}$

théorème 2: plan tangent en un point régulier d'une surface définie par éq.cart.

Soit M_0 un point RÉGULIER DE LA SURFACE D'ÉQUATION CARTÉSIENNE $F(x,y,z) = 0$.

- $\overrightarrow{grad}_{M_0}(F) = \overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F)$ est un vecteur orthogonal (=normal) à la surface en M_0
- l'équation du plan tangent en M_0 est donc :

$$\boxed{< \overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F),\overrightarrow{M_0M} >= 0 \quad \text{càd} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M_0).(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0).(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0).(z-z_0) = 0}$$

rem: le gradient est évalué en M_0 (très important)

exemple 13:

On considère la surface d'équation $3x^2 - y^2 = 3z^2$ et le point $M_0(2,3,-1)$

- Cette surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ avec

$$\boxed{\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 3x^2 - y^2 - 3z^2 \end{array}}$$

- On a $\nabla(F) =$ donc $\nabla_{M_0}(F) =$

  Le point M_0 est donc un point régulier de la surface

- Le plan tangent en ce point est le plan qui passe par M_0 et qui a pour vecteur normal

  Il a pour équation cartésienne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$ soit

- On peut remarquer que le point $O(0,0,0)$ est un point de la surface mais que ce n'est pas un point régulier car $\nabla_O(F) = (0,0,0)$

exemple 14: la sphère

On considère la surface S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Déterminer les points réguliers
2. Donner l'équation cartésienne du plan tangent en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ régulier
3. Reprendre les questions précédentes avec la surface S' d'équation cartésienne $(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0$

remarque 2

a priori une surface donnée peut être définie mathématiquement soit par une représentation paramétrique, soit par une équation cartésienne. Le choix n'est pas neutre ! Certains problèmes se traitent plus simplement en utilisant une représentation paramétrique, et d'autres en utilisant une équation cartésienne. Sans entrer dans des détails compliqués, retenons que :

- *pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne, on élimine les paramétres et on cherche une égalité qui lie les coordonnées x,y et z*
- *pour passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique, on essaye de deviner des paramètres. . . parfois x ou y ou z marchent. . . parfois non. . .*

remarque 3 (*peu important*)

- *Soit un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ de la surface S, on admet qu'il existe localement un paramétrage de classe C^1 de la surface cad : il existe I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une boule de centre M_0 rayon r tels que les points de la surface proches du point M_0 (cad appartenant $B(M_0,r) \cap S$ avec r assez petit) sont représentés par la paramétrisation de classe C^1 : $\quad (u,v) \in I \times J \mapsto M(u,v)$*

définition 9: surfaces de niveau de F

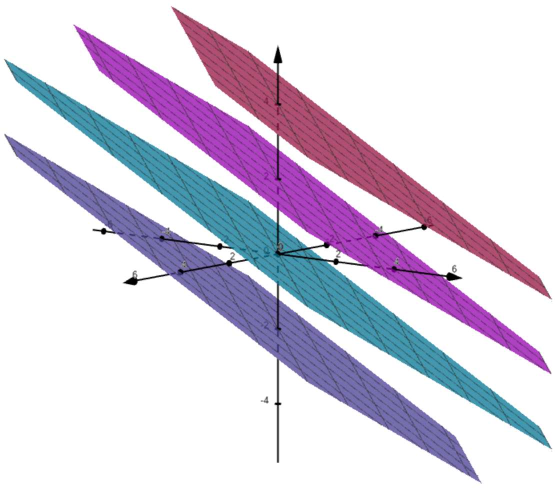
On appelle SURFACE DE NIVEAU DE F toute surface S_k d'équation cartésienne $F(x,y,z) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ fixé.

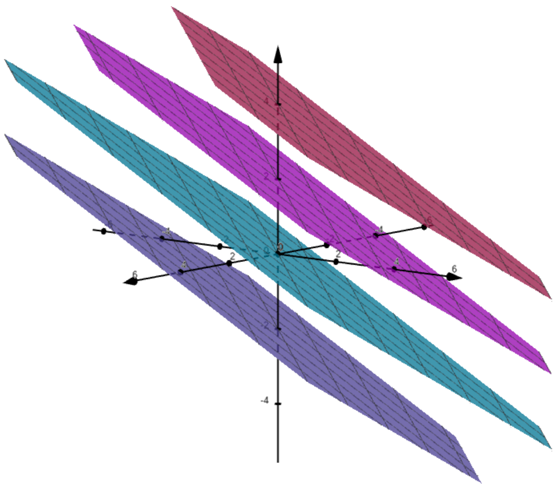
On montre que le gradient de F (lorsqu'il est non nul) est orthogonal aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de F.

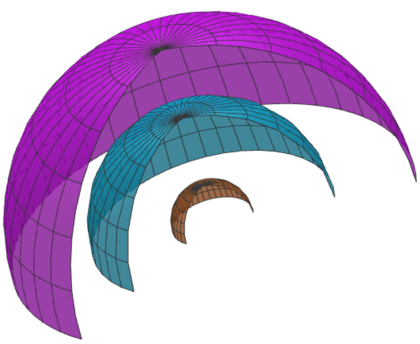
(rappel: on avait montré un résultat comparable pour les lignes de niveau en géométrie plane)

exemple 15:

- Les surfaces de niveau de la fonction $F : (x,y,z) \mapsto x + 2y - z$ sont des plans parallèles
- Les surfaces de niveau de la fonction $F : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + (z-1)^2$ sont des sphères de centre $\Omega(0,0,1)$







4 Surfaces réglées

définition 10: surface réglée

Une surface (Σ) est dite RÉGLÉE lorsque (Σ) est réunion de droites.

i) ces droites s'appellent LES GÉNÉRATRICES de la surface (Σ)

ii) une courbe qui coupe toutes les génératrices de (Σ) s'appelle UNE COURBE DIRECTRICE.

rem: pour définir une surface réglée, on se donne une courbe (la courbe directrice) et en chaque point de cette courbe un vecteur non nul (qui dirigera la génératrice en ce point.

remarque 4

les surfaces réglées sont les surfaces qui admettent un paramétrage du type :

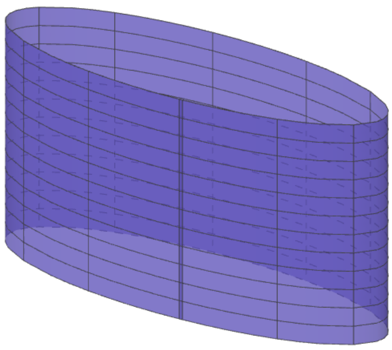
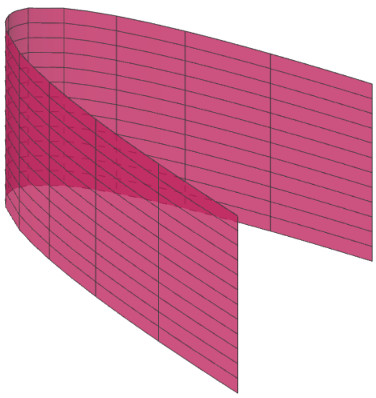
$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v)=g(u)+v.h(u) \end{array}} \quad \text{avec :}$$

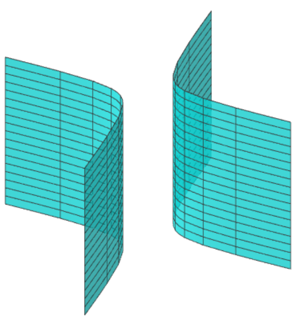
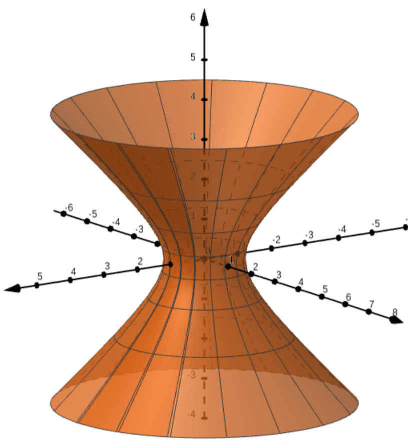
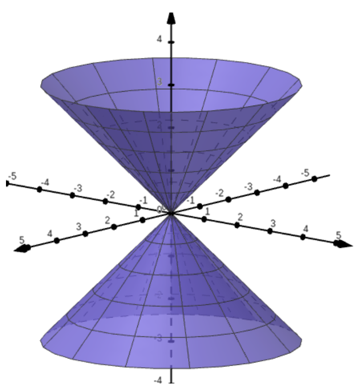
- *I un intervalle réel*
- *g une fonction de $I \to \mathbb{R}^3$*
- *h une fonction de $I \to \mathbb{R}^3$ ne s'annulant pas sur I.*
- *(I,g) est une paramétrisation d'une courbe directrice*

Une surface réglée est donc une surface qui possède une paramétrisation

$$\boxed{\begin{array}{rcl} I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(u,v)=\alpha(u)+v.d_1(u) \\ y(u,v)=\beta(u)+v.d_2(u) \\ z(u,v)=\gamma(u)+v.d_3(u) \end{pmatrix} \end{array}}$$

avec $d=(d_1,d_2,d_3)$ fonction ne s'annulant pas

exemple 16:

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O, de rayon 1 tracé dans le plan xOy.
Dans chaque cas, donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la surface réglée considérée.

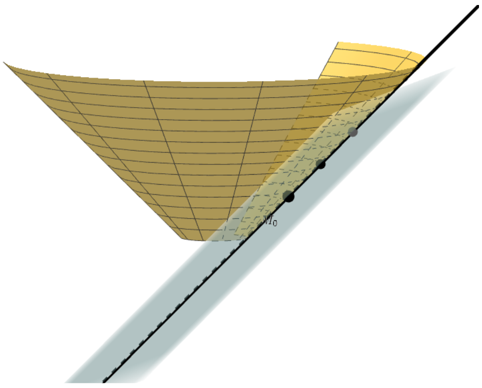
1. surface de courbe directrice $\mathcal{C}$ et donc les génératrices sont dirigées par le vecteur $\vec{k}$
2. surface qui est l'ensemble des droites qui s'appuient sur le cercle $\mathcal{C}$ et qui passent par le point $S(3{,}0{,}0)$

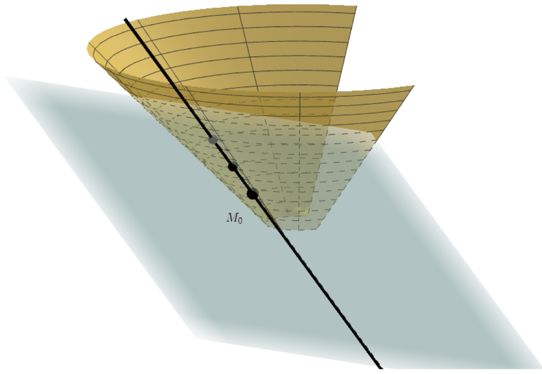
remarque 5 (*cylindre, cône (HP)*)

- *une surfaces réglée dont les génératrices sont des droites parallèles est appelée* UN CYLINDRE.
- *une surface réglée dont les génératrices passent toutes par un même point est appelée* UN CÔNE.

théorème 3: plan tangent en un point régulier d'une surface réglée

Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.





exemple 17:

On considère la surface réglée Σ $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u^2+v(u+1) \\ z &= u+1+vu \end{cases}$ avec $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

1. Montrer que le point $A(0,-1{,}1)$ est un point de la surface
2. Déterminer la génératrice qui passe par le point A
3. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point A.
4. Montrer que le point $B(2{,}3{,}3)$ est sur la même génératrice que A.
5. Les plans tangents en A et B sont-ils identiques?
6. D'une manière générale le plan tangent est-il le même le long d'une génératrice?

exemple 18:

Soit Σ la surface réglée de courbe directrice $\Gamma(x=a\cos u, y=b\sin u, z=0)$ avec $u\in[0,2\pi]$ et de génératrices dirigées par $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$. ($a>0$ et $b>0$ sont des constantes)

1. Donner une représentation paramétrique de Σ
2. Donner une équation cartésienne de Σ
3. Considérons le nouveau repère $\mathcal{R}(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ avec $\vec{I}=\vec{i},\vec{K}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$ et $\vec{J}=\vec{K}\wedge\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{k})$.
   Donner l'équation de Σ dans ce nouveau repère .
   A quelle condition la section droite est-t-elle un cercle?
   (On appelle section droite l'intersection de Σ avec un plan orthogonal aux génératrices)

5 Surfaces de révolution

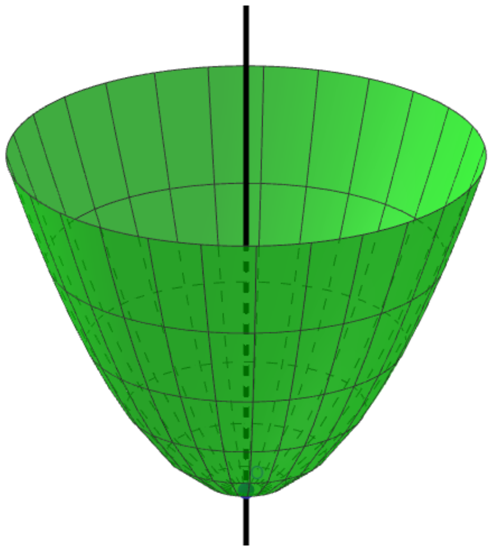
définition 11: surface de révolution

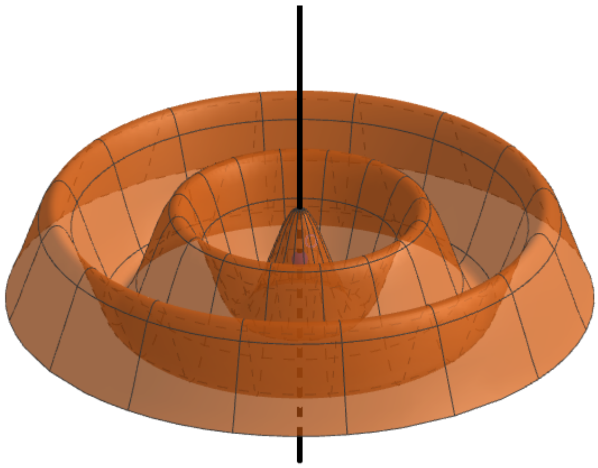
Soit Σ une surface et (D) une droite.
On dit que Σ est UNE SURFACE DE RÉVOLUTION D'AXE (D) lorsque l'image de tout point de Σ par toute rotation d'axe (D) appartient encore à Σ, c'est à dire lorsque Σ EST GLOBALEMENT INVARIANTE PAR TOUTE ROTATION D'AXE (D)

$$\forall M \in \Sigma, \forall \theta \in \mathbb{R}, r_{D,\theta}(M) \in \Sigma$$

remarque 6

Une surface Σ est une surface de révolution d'axe D lorsque l'intersection de tout plan perpendiculaire à D avec Σ est soit vide, soit un point de D, soit un cercle centré en D, soit une réunion de cercles centrées en D.

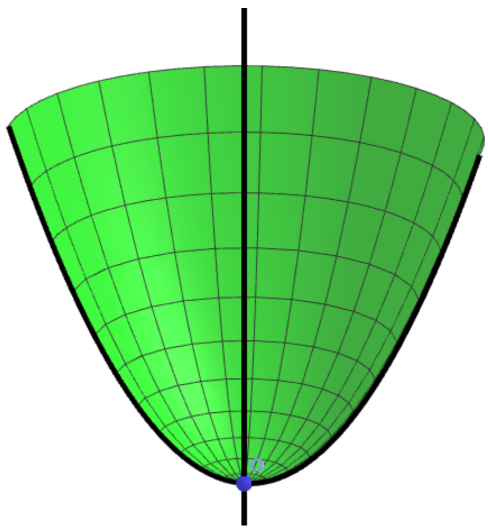


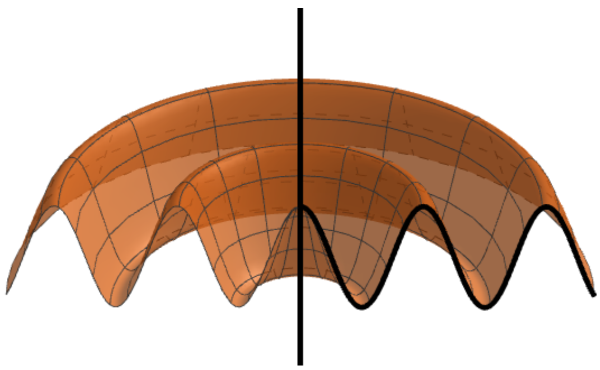


définition 12: parallèles et méridiennes

1. l'intersection de Σ avec un plan orthogonal à (D) est un cercle (si non vide), et s'appelle UN PARALLÈLE.
2. l'intersection de Σ avec un plan contenant (D) est constituée de deux courbes planes symétriques par rapport à (D), et qu'on appelle UNE MÉRIDIENNE.

- *une méridienne est composée de deux demi-méridiennes*
- *pourquoi les parallèles s'appellent-ils parallèles ?*





exemple 19:

Montrer que la surface paramétrée $f : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u.\cos v, u.\sin v, u)$ est une surface de révolution d'axe (Oz)

remarque 7 (***Rappel important***)

- *On a vu en algèbre linéaire que la matrice dans la base orthonormée directe* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *de la rotation d'axe* $D = \mathrm{vect}(\vec{k})$ *et d'angle* θ *est* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *On en déduit que l'image du point* $M(x,y,z)$ *par la rotation d'axe* (Oz) *et d'angle* θ *est le point* $M'(\cos\theta.x - \sin\theta.y, \sin\theta.x + \cos\theta.y, z)$
  Il suffit pour cela d'effectuer le produit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- *On rappelle que la matrice dans la base orthonormée directe* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *de la rotation d'axe* $D = \mathrm{vect}(\vec{i})$ *et d'angle* θ *est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

exemple 20:

Montrer que la surface d'équation $z^2 + y^2 = 1$ est une surface de révolution d'axe (Ox) . Préciser les méridiennes

exemple 21:

On souhaite déterminer une représentation paramétrique et une equation cartésienne de la surface obtenue en faisant tourner la parabole $(z = y^2, x = 0)$ autour de l'axe (Oz)

- *La parabole ci-dessus sera une méridienne de notre surface,*
  sa représentation paramétrique est $\boxed{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (0,u,u^2) \end{array}}$ *notons* $P(u)$ *le point* $(0,u,u^2)$
- *Notons* $M(u,v)$ *l'image du point* $P(u)$ *par la rotation d'axe* (Oz) *et d'angle* v.
  Notre surface est l'ensemble des points $M(u,v)$, *ce qui donne la représentation paramétrique*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (-u.\sin v, u.\cos v, u^2) \end{array}} \quad \textit{soit} \quad \boxed{\begin{cases} x & = -u.\sin v \\ y & = u.\cos v \\ z & = u^2 \end{cases}}$$

- *Pour déterminer une équation cartésienne, on élimine les paramètres.*
  Ici, il est aisé de voir que $\boxed{z = x^2 + y^2}$

exemple 22:

On note $P(u) = (0, 3 + 2\cos u, 2\sin u)$ avec $u \in [0,2\pi]$, et Γ le lieu des $P(u)$.
On note Σ la surface de révolution d'axe (Oz) et de demi-méridienne Γ.

1. Reconnaître Γ, puis Σ.
2. Donner une représentation paramétrique de Σ

exemple 23: Équation cartésienne sans passer par la rep. param.

On considère la surface de révolution Σ d'axe (Oz) et de demi-méridienne la droite Δ $(x = 0, y = z)$.
Donner une équation cartésienne de cette surface

On pourra considérer $\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x^2 + y^2 & = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$, *et chercher la cns pour que* $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ *soit un parallèle de* Σ

6 un cas particulier courant: surface d'équation $z = g(x,y)$

- Parfois l'équation cartésienne de la surface Σ est donnée sous la forme $z = g(x,y)$
  exemple: soit Σ la surface d'équation $z = x^2 + y^3$

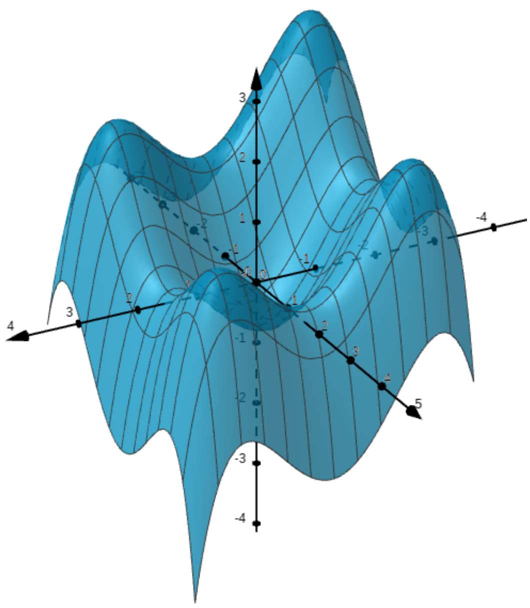
- En posant $F(x,y,z) = z - g(x,y)$ on se ramène à une équation cartésienne "du cours" $F(x,y,z) = 0$
  exemple: en posant $F : (x,y,z) \mapsto z - x^2 - y^3$, $\quad \Sigma$ a pour équation $F(x,y,z) = 0$

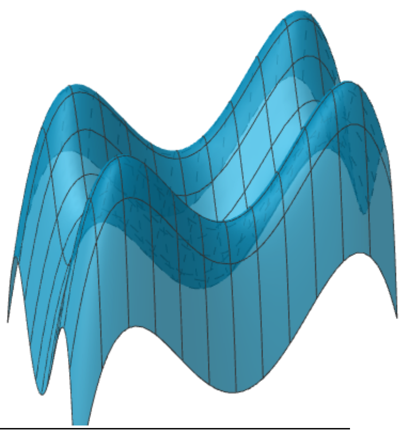
- On a alors $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
  On constate avec joie que les surfaces d'équation $z = g(x,y)$ sont des surfaces régulières, et donc en tout point le plan tangent existe!
  exemple: $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F) = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -3y_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ et le plan tangent en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ a pour équation

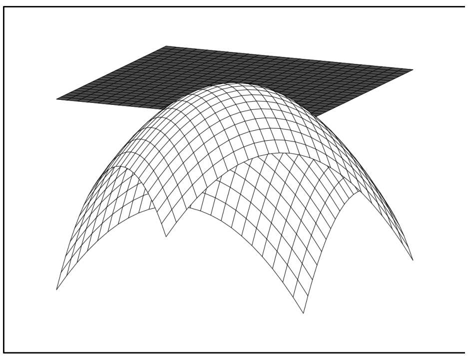
  $$< \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -3y_0^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} >= 0 \quad \textit{càd} \quad \boxed{-2x_0.x - 3y_0^2.y + z + x_0^2 + 3y_0^2 = 0} \quad (\textit{car } z_0 = x_0^2 + y_0^3)$$

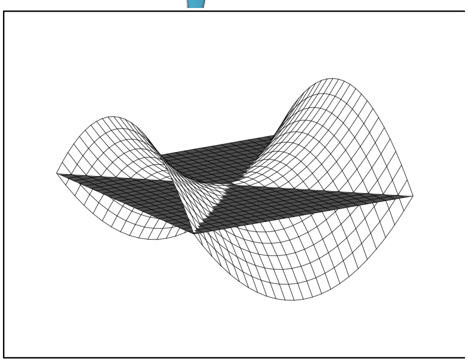
- Dans le cas particulier où $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, le plan tangent en $M(x_0,y_0,z_0)$ est horizontal
  exemple: pour $x_0 = y_0 = 0$ le plan tangent en $M_0(0,0,0)$ a pour équation $z = 0$

- On retrouve que l'on a vu dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables
  (points critiques, point col ou selle ou hyperbolique, point ballon ou point ellitique)





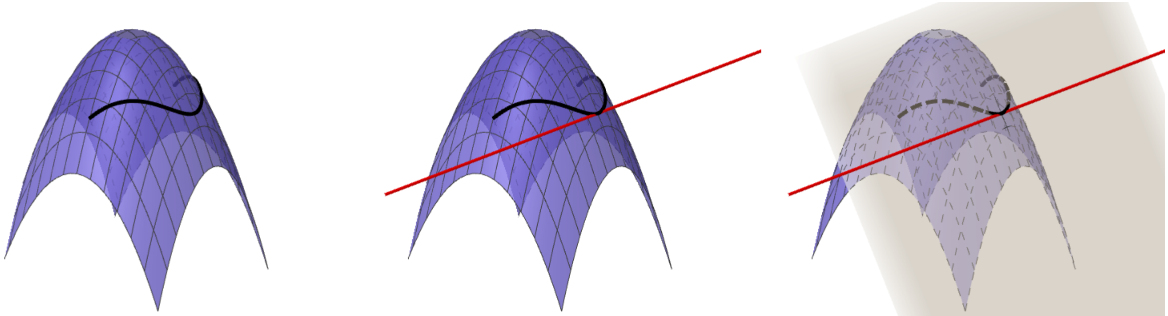




7 Courbes tracées sur une surface

- Soit Γ une courbe et Σ une surface.
  On dit que LA COURBE Γ EST TRACÉE SUR LA SURFACE Σ lorsque $\Gamma \subset \Sigma$.
  (c'est à dire que lorsque tout point de la courbe est également un point de la surface)

théorème 4: tangente à une courbe tracée sur une surface
Si Γ est une courbe tracée sur la surface Σ, et si M_0 est un point régulier à la fois de Γ et Σ, alors la droite tangente à Γ en M_0 est incluse dans le plan tangent en M_0 à Σ
la démonstration sera réalisée dans le chapitre "fonctions de plusieurs variables"



exemple 24: courbe tracée sur une surface définie par éqaution cartésienne
On considère
- la surface Σ d'équation cartésienne $e^x - y - z = 0$
- la courbe Γ d'équation paramétrique $\gamma : t \mapsto (t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$

1. Montrer que Γ est tracée sur Σ
2. Montrer que Γ est une courbe régulière
3. Montrer que Σ est une surface régulière
4. On note $M_0 = \gamma(t)$ un point de Γ avec t fixé.
   Sans utiliser le théorème ci-dessus, montrer que la tangente à Γ en M_0 est bien incluse dans le plan tangent à Σ en M_0

exemple 25: courbe tracée sur une surface définie par équation paramétrique
On considère
- la surface Σ de représentation paramétrique $(u,v) \mapsto (u, u^2.v, u + 2v)$
- la courbe Γ d'équation paramétrique $\gamma : t \mapsto (t,2t^3,5t)$
- la courbe Γ_1 d'équation paramétrique $\gamma_1 : t \mapsto (2t^2, -4t^6, 0)$

1. Justifier que les courbes Γ et Γ_1 sont tracées sur Σ
2. Justifier que Σ est une surface régulière.
   (On admettra que Γ est une courbe régulière)
3. On note $M_0 = \gamma(t)$ un point de Γ avec t fixé.
   Sans utiliser le théorème ci-dessus, montrer que la tangente à Γ en M_0 est bien incluse dans le plan tangent à Σ en M_0

8 Courbes de l'espace définies par un système d'équations cartésiennes

On considère:

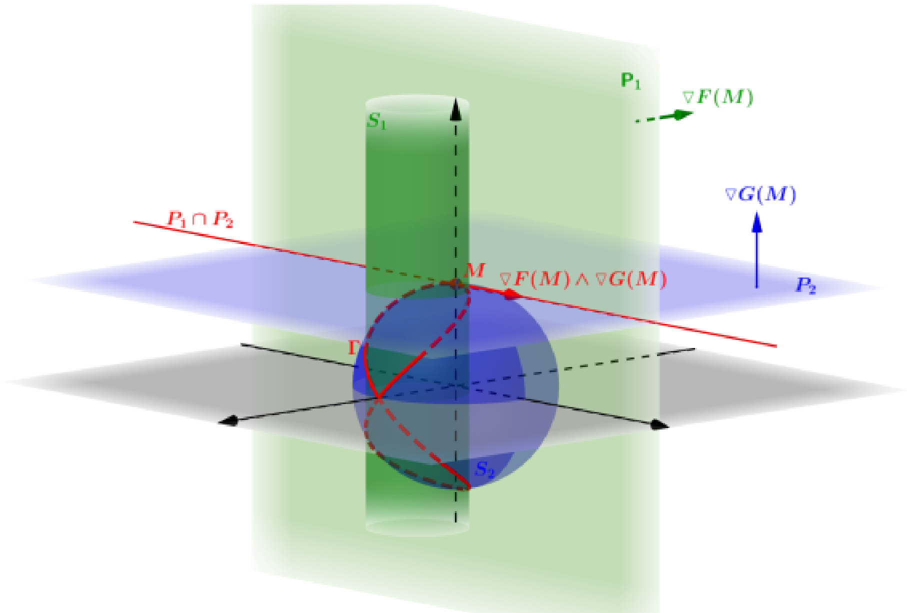
- la surface Σ_1 d'équation cartésienne $F_1(x,y,z) = 0$
- la surface Σ_2 d'équation cartésienne $F_2(x,y,z) = 0$

Généralement l'intersection de Σ_1 et de Σ_2 est une courbe.

- La courbe intersection de Σ_1 et Σ_2 est caractérisée par le système $\begin{cases} F_1(x,y,z) & = 0 \\ F_2(x,y,z) & = 0 \end{cases}$

- Notons $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

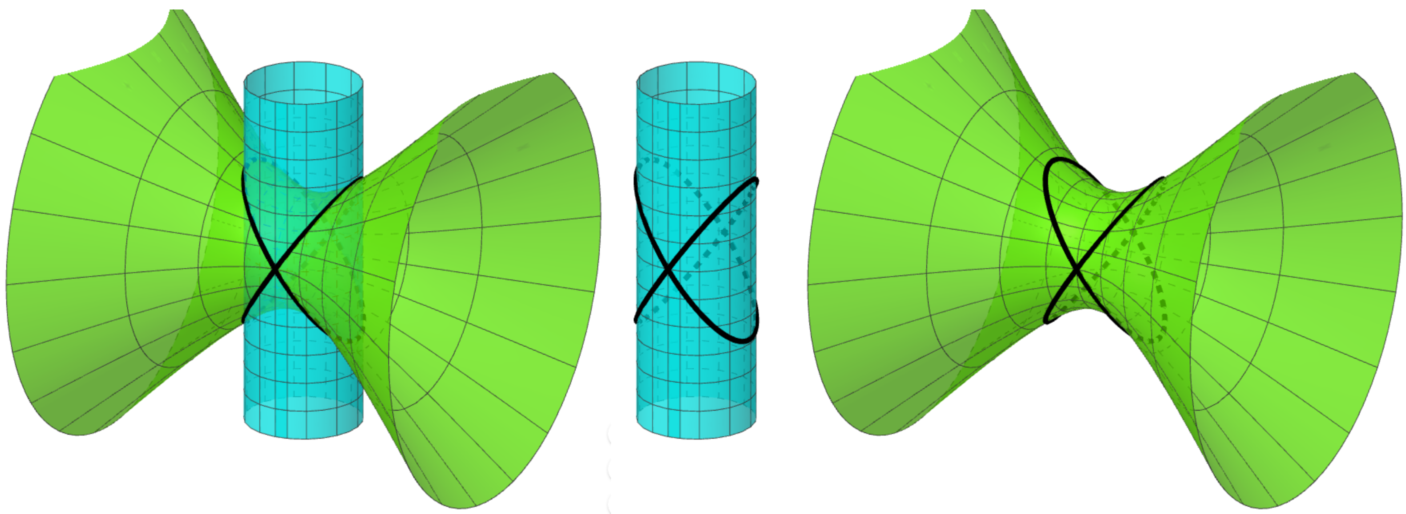
- Un point $M \in \Gamma$ est un point régulier (de Γ) lorsque les gradients de F_1 et F_2 en M ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, la droite tangente en M à Γ est dirigée par le produit vectoriel de ses gradients.



exemple 26:

Soit Γ définie par le système $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 & = 1 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$

Déterminer les points de Γ en lesquels on peut définir une tangente et préciser alors sa direction



exemple 27: cas des sections planes

Soit Σ un hyperboloïde à deux nappes d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

1. Déterminer l'intersection de Σ avec un plan d'équation $z=z_0$ et dessiner sa projection sur le plan xOy
2. Déterminer l'intersection de Σ avec un plan d'équation $y=y_0$ et dessiner sa projection sur le plan xOz

exemple 28: lignes de niveau d'une surface

- Les LIGNES DE NIVEAU de la surface S sont les intersections de S avec des plans d'équations $z=z_0$.
- La surface se reconstitue en empilant ses lignes de niveau.
- Elles permettent donc de visualiser l'allure d'une surface